第一章 信号与系统的基本概念

1-1：判断下面的信号是否为周期信号，如果是，确定其基本周期。

（1）解：$f(t)=3\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$，余弦信号为周期信号，其周期是 $2T=2\pi \Rightarrow T=\pi$。

（2）解：$f(t)=4\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)u(t)$，因为 $u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$，即 $f(t)=\begin{cases}4\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$，

故 $f(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 区间上为非周期信号。

（3）解：$f(t)=3\cos(2t)+2\cos(5t)$，其中 $\cos(2t)$ 的周期 $2T_1=2\pi \Rightarrow T_1=\pi$，$\cos(5t)$ 的周期 $5T_2=2\pi \Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{5}$，$\frac{T_1}{T_2}=\frac{5}{2}$ 为有理数，故 $f(t)$ 是周期信号，其周期 $T=2T_1=5T_2=2\pi$。

（4）解：$f(t)=\cos(2\pi t)+2\cos(5t)$，其中 $\cos(2\pi t)$ 的周期 $2\pi T_1=2\pi \Rightarrow T_1=1$，$\cos(5t)$ 的周期 $5T_2=2\pi \Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{5}$，$\frac{T_1}{T_2}=\frac{5}{2\pi}$ 为无理数，故 $f(t)$ 是非周期信号。

（5）解：$f(t)=\sin^2(2\pi t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4\pi t)$，其中 $\cos(4\pi t)$ 的周期 $4\pi T_1=2\pi \Rightarrow T_1=\frac{1}{2}$，故 $f(t)$ 是周期信号，其周期 $T=T_1=\frac{1}{2}$。

（6）解：$f(t)=e^{j3t}=\cos(3t)+j\sin(3t)$，其中 $\cos(3t)$ 和 $\sin(3t)$ 的周期都是 $3T=2\pi \Rightarrow T=\frac{2\pi}{3}$，故 $f(t)$ 是周期信号，其周期 $T=\frac{2\pi}{3}$。

1-2 判断下面的序列是否为周期序列，如果是，确定其基本周期。

（1）解：$f(k)=\sin\left(\frac{1}{3}k\right)$，其 $\Omega_0=\frac{1}{3}$，因此 $\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{1}{6\pi}$ 为无理数，故 $f(k)$ 是非周期序列。

（2）解：$f(k)=\sin\left(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{4}\right)$，其 $\Omega_0=\frac{\pi}{4}$，因此 $\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{1}{8}$ 为有理数，故 $f(k)$ 是周期序列，其周期 $N=8$。

（3）解：$f(k)=\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)$，其中 $\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$ 的 $\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{4}$ 为有理数，其周期 $N_1=4$，而 $\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)$ 的 $\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{6}$ 也为有理数，其周期 $N_2=6$，N_1 和 N_2 之间存在最小公倍数 $N=12$，因此 $f(k)$ 为周期序列，其周期 $N=12$。

（4）解：$f(k)=\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)\cos\left(\frac{1}{3}k\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right)k\right)+\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right)k\right)\right]$，其中 $\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right)k\right)$ 的 $\frac{\Omega_0}{2\pi}=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6\pi}$ 为无理数，$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right)k\right)$ 的 $\frac{\Omega_0}{2\pi}==\frac{1}{4}-\frac{1}{6\pi}$ 也为无理数，故 $f(k)$

为非周期序列。

（5）解：$f(k)=e^{j\left(\frac{k}{5}-\frac{\pi}{2}\right)}=\cos\left(\frac{k}{5}-\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(\frac{k}{5}-\frac{\pi}{2}\right)$，其中 $\cos\left(\frac{k}{5}-\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\sin\left(\frac{k}{5}-\frac{\pi}{2}\right)$ 的 $\frac{\Omega_0}{2\pi}==\frac{1}{5}\times\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{10\pi}$ 都为无理数，故 $f(k)$ 为非周期序列。

（6）解：$f(k)=\cos^2\left(\frac{\pi}{6}k\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)+1\right]$，其中 $\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)$ 的 $\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{6}$ 为有理数，其周期 $N=6$，因此 $f(k)$ 为周期序列，其周期 $N=6$。

1-3 设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是周期分别为 T_1 和 T_2 的周期信号，证明 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$ 是周期为 T 的周期信号的条件为 $mT_1=nT_2=T \quad (m,n\text{为整数})$。

证明：

已知 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是周期分别为 T_1 和 T_2 的周期信号，因此有 $f_1(t)=f_1(t+T_1)=f_1(t+mT_1)$，$f_2(t)=f_2(t+T_2)=f_2(t+nT_2)$，则 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)=f_1(t+mT_1)+f_2(t+nT_2)$。

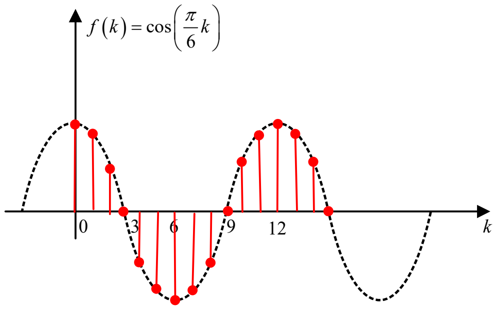
如果 $f(t)$ 为周期信号，即 $f(t)=f(t+T)$，则有

$$\begin{aligned}&f(t)=f_1(t)+f_2(t)=f_1(t+mT_1)+f_2(t+nT_2)\\&=f(t+T)=f_1(t+T)+f_2(t+T)\end{aligned}$$

上式若成立，必须使得 $mT_1=nT_2=T \quad (m,n\text{为整数})$。

1-4 设连续时间信号 $f(t)=\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$，画出以 1s 的抽样间隔对 $f(t)$ 均匀抽样所得离散时间序列的波形。

解：连续时间信号 $f(t)$ 的角频率为 $\omega_0=\frac{\pi}{6}$，以抽样间隔 $T_s=1s$ 对 $f(t)$ 均匀抽样，则离散时间序列的数字角频率为 $\Omega_0=\omega_0 T_s=\frac{\pi}{6}\ rad$，离散时间序列为 $f(k)=\cos\left(\frac{\pi}{6}k\right)$，其 $\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{1}{12}$，即周期为 $N=12$，因此其波形如下所示：



1-5 已知虚指数信号 $f(t)=e^{j\omega_0 t}$，如果对 $f(t)$ 以抽样间隔 T_s 进行均匀抽样得离散时间序列

$f(k)=f(kT_s)=e^{j\omega_0 kT_s}$，**试求出使** $f(k)$ **为周期信号的抽样间隔** T_s **。**

解：均匀抽样后的离散时间序列为 $f(k)=f(kT_s)=e^{j\omega_0 kT_s}=\cos(\omega_0 kT_s)+j\sin(\omega_0 kT_s)$，实部和虚部序列的数字角频率都是 $\Omega_0=\omega_0 T_s$，若是实部和虚部都是周期序列，则 $f(k)$ 为周期序列。实部和虚部都为周期序列的条件是，其数字角频率 $\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{\omega_0 T_s}{2\pi}=\frac{m}{N}$ 为有理数，即 $T_s=\frac{2\pi m}{\omega_0 N}$，且其中 m 和 N 为整数。

1-6 判断下列信号是能量信号，还是功率信号或者都不是。

（1） $f(t)=4\sin(2\pi t)+2\cos(3t)$，是非周期信号，当 $|t|\to\infty$ 时函数值不为无穷大，是功率信号。

（2） $f(t)=2e^{-3t}u(t)=\begin{cases}2e^{-3t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$，非周期信号，一边有限，当 $t\to+\infty$ 时函数趋向于 0，是能量信号。

（3） $f(t)=2e^{-3t}$，非周期信号，当 $t\to-\infty$ 时函数趋向于 ∞，是非能非功信号。或者按照定义式推导。该信号的能量为 $E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}4e^{-6t}dt=4\times\frac{e^{-6t}}{-6}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\infty$，该信号的功率为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}4e^{-6t}dt=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\times4\times\frac{e^{-6T}-e^{6T}}{-6}\right)=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{e^{6T}}{3T}\right)=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{6e^{6T}}{3}\right)=\infty,$$

故为非能非功信号。

（4） $f(t)=7e^{-j3t}=7\cos(3t)-j7\sin(3t)$，实部和虚部都为周期信号，是功率信号。

（5） $f(t)=6e^{-10|t|}\cos(2t)$，非周期信号，当 $t\to-\infty$ 和 $t\to+\infty$ 时函数都趋向于 0，是能量信号。

（6） $f(t)=3tu(t)=\begin{cases}3t & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$，非周期信号，当 $t\to+\infty$ 时函数趋向于 ∞，是非能非功信号。

（7） $f(t)=\frac{1}{1+t}u(t)=\begin{cases}\frac{1}{1+t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$，非周期信号，一边有限，当 $t\to+\infty$ 时函数趋向于 0，是能量信号。

（8） $f(t)=3\cos(8t)u(t)=\begin{cases}3\cos(8t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$，非周期信号，一边有限，当 $t\to+\infty$ 时函数值不为无穷大，是功率信号。

（9） $f(t)=u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$，非周期信号，一边有限，当 $t\to+\infty$ 时函数值不为无穷大，是功率信号。

1-7 判断下列信号是能量信号，还是功率信号或者都不是。

（1） $f(k)=(-1)^{k}$，是周期序列，因此是功率信号。

（2） $f(k)=e^{j2k}u(k)=\left[\cos(2k)+j\sin(2k)\right]u(k)$，非周期序列，一边有限，$k\to+\infty$ 时不为无穷大，是功率信号。

（3） $f(k)=0.5^{k}u(k)$，非周期序列，一边有限，$k\to+\infty$ 时序列趋向于零，是能量信号。

（4） $f(k)=\dfrac{1}{k+1}u(k)$，非周期序列，一边有限，$k\to+\infty$ 时序列趋向于零，是能量信号。

（5） $f(k)=ku(k)$，非周期序列，$k\to+\infty$ 时序列趋向于 ∞，是非能非功信号。

（6） $f(k)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}k\right)$，其数字角频率 $\dfrac{\Omega_0}{2\pi}=\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{1}{2\pi}=\dfrac{1}{8}$，是周期为 $N=8$ 的周期序列，是功率信号。

1-8 判断下列系统是否为线性系统，是否为时不变系统，并简单说明理由。

（1） $y(t)=2q(0)+x(t)\dfrac{dx(t)}{dt}$，非线性系统，时不变系统。

说 明： 系 统 具 有 可 分 解 性， 其 零 输 入 响 应 $y_{zi}(t)=2q(0)$ 呈 线 性， 其 零 状 态 响 应 为 $y_{zs}(t)=x(t)\dfrac{dx(t)}{dt}$ 。

激励为 $x_1(t)$ 时的零状态响应为 $y_{zs1}(t)=x_1(t)\dfrac{dx_1(t)}{dt}$，激励为 $x_2(t)$ 时的零状态响应为 $y_{zs2}(t)=x_2(t)\dfrac{dx_2(t)}{dt}$ 。则激励为 $x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)$ 时的零状态响应为：

$$y_{zs3}(t)=x_3(t)\frac{dx_3(t)}{dt}=\left[x_1(t)+x_2(t)\right]\frac{d\left[x_1(t)+x_2(t)\right]}{dt}=x_1(t)\frac{dx_1(t)}{dt}+x_2(t)\frac{dx_2(t)}{dt}+x_1(t)\frac{dx_2(t)}{dt}+x_2(t)\frac{dx_1(t)}{dt}$$

而 $y_{zs1}(t)+y_{zs2}(t)=x_1(t)\dfrac{dx_1(t)}{dt}+x_2(t)\dfrac{dx_2(t)}{dt}$，即 $y_{zs3}(t)\neq y_{zs1}(t)+y_{zs2}(t)$，零状态响应为非线性，系统为非线性系统。

零输入响应不随时间变化，而系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=x(t)\dfrac{dx(t)}{dt}$，当 $x_a(t)=x(t-t_d)$ 时，

$$y_{zsa}(t)=x_a(t)\frac{dx_a(t)}{dt}=x(t-t_d)\frac{dx(t-t_d)}{dt}=x(t-t_d)\frac{dx(t-t_d)}{d(t-t_d)}=y_{zsa}(t-t_d)$$，故系统为时不变系统。

（2） $y(t)=q(0)+\lg x(t)$，非线性系统，时不变系统。

说明：系统具有可分解性，其零输入响应 $y_{zi}(t)=q(0)$ 呈线性，但其零状态响应 $y_{zs}(t)=\lg x(t)$ 为非线性。零输入响应不随时间变化，零状态响应 $y_{zs}(t)=\lg x(t)$ 为时不变性。

（3） $y(t)=e^{q(0)}+3t^2x(t)$，非线性系统，时变系统。

说明：系统具有可分解性，其零输入响应和其零状态响应均为非线性。其零状态响应 $y_{zs}(t)=3t^2x(t)$ 为时变性。

（4） $y(t)=3q(0)x(3t)$，非线性系统，时变系统。

说明：系统不具有可分解性，因此为非线性系统。

当 $x_a(t)=x(t-t_d)$ 时，$y_a(t)=3q(0)x_a(3t)=3q(0)x(3t-t_d)$，而 $y(t-t_d)=3q(0)x\left[3(t-t_d)\right]$，二者不相等，即为时变系统。

（5） $y(t)=q(0)\cos 3t+\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$，线性系统，时变系统。

说明：系统具有可分解性，其零输入响应和其零状态响应均为线性，为线性系统。当 $x_a(t)=x(t-t_d)$ 时，

$$y_a(t)=q(0)\cos 3t+\int_{-\infty}^{t}x_a(\tau)d\tau=q(0)\cos 3t+\int_{-\infty}^{t}x(\tau-t_d)d\tau=q(0)\cos 3t+\int_{-\infty}^{t-t_d}x(\tau')d\tau'$$

而 $y(t-t_d)=q(0)\cos\left[3(t-t_d)\right]+\int_{-\infty}^{t-t_d}x(\tau)d\tau$，二者不相等，即为时变系统。

（6） $y(k)=2q(0)+\dfrac{1}{x(k)}$，非线性系统，时不变系统。

说明：系统具有可分解性，其零输入响应为线性，其零状态响应为非线性，故为非线性系统。零输入响应不随时间变化，零状态响应为时不变性，故为时不变系统。

（7） $y(k)=\sqrt{3q(0)}+5x(k)$，非线性系统，时不变系统。

说明：零输入响应为非线性。零输入响应不随时间变化，零状态响应为时不变性，故为时不变系统。

（8） $y(k)=q(0)+\sum_{n=0}^{k}x(n)$，线性系统，时变系统。

说明：系统具有可分解性，其零输入响应和其零状态响应均为线性，为线性系统。零输入响应不随时间变化，但零状态响应为时变性（参考例题 1-2-5），故为时变系统。

（9） $y(k)=(k-1)q(0)+4\left|x(k)\right|$，非线性系统，时变系统。

说明：系统具有可分解性，但其零状态响应为非线性，故为非线性系统。零输入响应随时间 k 变化，故为时变系统。

（10） $y(k)=(k-3)x(k)+3$，非线性系统，时变系统。

说明：

激励 $x_1(k)$，响应 $y_1(k)=(k-3)x_1(k)+3$，激励 $x_2(k)$，响应 $y_2(k)=(k-3)x_2(k)+3$，当激励为 $x_a(k)=x_1(k)+x_2(k)$ 时，响应 $y_a(k)=(k-3)\left[x_1(k)+x_2(k)\right]+3$，$y_a(k)\neq y_1(k)+y_2(k)$。

激励 $x_a(k)=x(k-k_d)$ 时，响应 $y_a(k)=(k-3)x_a(k)+3=(k-3)x(k-k_d)+3$，而

$y(k-k_d)=(k-k_d-3)x(k-k_d)+3$，二者不相等，故为时变系统。

1-9 判断下列方程所描述的系统是否为线性系统，是否为时不变系统，并简单说明理由。

（1）$\frac{dy(t)}{dt}+ty(t)+5\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$，为线性系统，时变系统。

说明：各项表达式为线性，故整个系统为线性系统；$ty(t)$项为时变特性，故系统为时变系统。

（2）$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)+10$，非线性系统，时不变系统。

说明：参考例 1-2-1 的推导过程，有常数项时一般为非线性系统；各项表达式都呈时不变性，故为时不变系统。具体推导如下。

激励为$x_1(t)$时，响应$\frac{dy_1(t)}{dt}+y_1(t)=x_1(t)+10$，激励$x_2(t)$，响应$\frac{dy_2(t)}{dt}+y_2(t)=x_2(t)+10$。则当激励为$x_a(t)=x_1(t)+x_2(t)$时，响应$\frac{dy_a(t)}{dt}+y_a(t)=x_a(t)+10=x_1(t)+x_2(t)+10$。而分别激励时的响应叠加为：$\frac{dy_1(t)}{dt}+y_1(t)+\frac{dy_2(t)}{dt}+y_2(t)=x_1(t)+x_2(t)+20$，即$y_a(t)\neq y_1(t)+y_2(t)$。

当激励为$x_a(t)=x(t-t_d)$时，响应$\frac{dy_a(t)}{dt}+y_a(t)=x_a(t)+10=x(t-t_d)+10$。而$\frac{dy(t-t_d)}{d(t-t_d)}+y(t-t_d)=x(t-t_d)+10$，即$y_a(t)=y(t-t_d)$，故为时不变系统。

（3）$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-\frac{dy(t)}{dt}+y(t)x(t)=x'(t)$，非线性系统，时不变系统。

说明：激励为$x_1(t)$时，响应$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}-\frac{dy_1(t)}{dt}+y_1(t)x_1(t)=x_1'(t)$，激励$x_2(t)$，响应$\frac{d^2y_2(t)}{dt^2}-\frac{dy_2(t)}{dt}+y_2(t)x_2(t)=x_2'(t)$。则当激励为$x_a(t)=x_1(t)+x_2(t)$时，响应$\frac{d^2y_a(t)}{dt^2}-\frac{dy_a(t)}{dt}+y_a(t)x_a(t)=x_a'(t)\Rightarrow\frac{d^2y_a(t)}{dt^2}-\frac{dy_a(t)}{dt}+y_a(t)\left[x_1(t)+x_2(t)\right]=\left[x_1'(t)+x_2'(t)\right]$。而分别激励时的响应叠加为：

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}+\frac{d^2y_2(t)}{dt^2}-\left[\frac{dy_1(t)}{dt}+\frac{dy_2(t)}{dt}\right]+y_1(t)x_1(t)+y_2(t)x_2(t)=x_1'(t)+x_2'(t)$$

$$\frac{d^2\left[y_1(t)+y_2(t)\right]}{dt^2}-\frac{d\left[y_1(t)+y_2(t)\right]}{dt}+y_1(t)x_1(t)+y_2(t)x_2(t)=x_1'(t)+x_2'(t)$$

对比可知，$y_1(t)x_1(t)+y_2(t)x_2(t)\neq\left[y_1(t)+y_2(t)\right]\times\left[x_1(t)+x_2(t)\right]$，即$y_a(t)\neq y_1(t)+y_2(t)$，系统为非线性系统。

当激励为$x_a(t)=x(t-t_d)$时，响应$\frac{d^2y_a(t)}{dt^2}-\frac{dy_a(t)}{dt}+y_a(t)x(t-t_d)=x'(t-t_d)$。而$\frac{d^2y(t-t_d)}{d(t-t_d)^2}-\frac{dy(t-t_d)}{d(t-t_d)}+y(t-t_d)x(t-t_d)=x'(t-t_d)$，化简后为

$\frac{d^2y(t-t_d)}{dt^2}-\frac{dy(t-t_d)}{dt}+y(t-t_d)x(t-t_d)=x'(t-t_d)$，即 $y_a(t)=y(t-t_d)$，故为时不变系统。

（4） $y(k+1)+y^2(k)=x(k)\sin 2k$，非线性系统，时变系统。

说明： $y^2(k)$ 项使得系统为非线性， $x(k)\sin 2k$ 项使得系统为时变系统。

（5） $y(k+2)+4y(k+1)+y(k)=2(k+1)x(k+1)+3x(k)$，线性系统，时变系统。

说明：激励为 $x_1(k)$ 时，响应 $y_1(k+2)+4y_1(k+1)+y_1(k)=2(k+1)x_1(k+1)+3x_1(k)$，激励 $x_2(k)$，

响应 $y_2(k+2)+4y_2(k+1)+y_2(k)=2(k+1)x_2(k+1)+3x_2(k)$。则当激励为 $x_a(k)=x_1(k)+x_2(k)$ 时，响应：

$$y_a(k+2)+4y_a(k+1)+y_a(k)=2(k+1)x_a(k+1)+3x_a(k)=2(k+1)\left[x_1(k+1)+x_2(k+1)\right]+3\left[x_1(k+1)+x_2(k+1)\right]$$

而分别激励时的响应叠加为：

$$y_1(k+2)+y_2(k+2)+4y_1(k+1)+4y_2(k+1)+y_1(k)+y_2(k)=2(k+1)x_1(k+1)+3x_1(k)+2(k+1)x_2(k+1)+3x_2(k)$$

即 $y_a(k)=y_1(k)+y_2(k)$，因此为线性系统。

当激励为 $x_a(k)=x(k-k_d)$ 时，响应

$$y_a(k+2)+4y_a(k+1)+y_a(k)=2(k+1)x_a(k+1)+3x_a(k)=2(k+1)x(k-k_d+1)+3x_a(k-k_d)。$$

而 $y(k-k_d+2)+4y(k-k_d+1)+y(k-k_d)=2(k-k_d+1)x(k-k_d+1)+3x(k-k_d)$，由于 $2(k+1)x(k+1)$ 项的存在，使得系统为时变系统。

（6） $y(k+2)+y(k)=x(k+1)+2x(k)$，线性系统，时不变系统。

说明：同上题分析类似。

1-10 判断下列系统是否为因果系统，并简单说明理由。

（1） $y(t)=\int_{-\infty}^{t+2}x(\tau)d\tau$，设 $t=0$，则 $y(0)=\int_{-\infty}^{2}x(\tau)d\tau$，零时刻的响应由 $(-\infty,2)$ 的激励引起。响应由将来的激励引起，是非因果系统。

（2） $\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau+x(t)$，设 $t=0$，则 $y'(0)+y(0)=\int_{-\infty}^{0}x(\tau)d\tau+x(0)$，响应是由当前和之前的激励引起，是因果系统。

（3） $\frac{d^2y(t)}{dt^2}-\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x'(t-1)+x(t-2)$，设 $t=0$，则 $y''(0)-y'(0)+y(0)=x'(-1)+x(-2)$，响应是由之前的激励引起，是因果系统。

（4） $\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t+10)$，设 $t=0$，则 $y'(0)+y(0)=x(10)$，响应是由将来的激励引起，是非因果系统。

（5） $y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=x(k+1)+3x(k)$，设 $k=-2$，则：

$y(0)+2y(-1)+y(-2)=x(-1)+3x(-2)$，响应是由之前的激励引起，是因果系统。

（6） $y(k+1)+3y(k)=x(k+2)+2x(k+1)+x(k)$，设 $k=-1$，则：

$y(0)+3y(-1)=x(1)+2x(0)+x(-1)$，响应是由将来的激励引起，是非因果系统。

（7） $y(k)=\sum_{n=0}^{k}x(n)$，响应由当前和之前的激励引起，是因果系统。

（8） $y(k)=\sum_{n=0}^{k+5}x(n)$，响应是由将来的激励引起，是非因果系统。

1-11 某线性系统，初始状态为 $q_1(0)$ 和 $q_2(0)$，输入为 $x(t)$，输出为 $y(t)$，已知：

（1）当 $x(t)=0$， $q_1(0)=1$， $q_2(0)=0$ 时， $y(t)=e^{-t}+e^{-2t}$；

（2）当 $x(t)=0$， $q_1(0)=0$， $q_2(0)=1$ 时， $y(t)=e^{-t}-e^{-2t}$；

（3）当激励为 $x(t)$， $q_1(0)=1$， $q_2(0)=-1$ 时， $y(t)=2+e^{-t}$。

试求当激励为 $2x(t)$，初始状态 $q_1(0)=3$， $q_2(0)=2$ 时的 $y(t)$。

解：根据已知条件，由初始状态 $q_1(0)$ 引起的零输入响应 $y_{zi1}(t)=e^{-t}+e^{-2t}$，由初始状态 $q_2(0)$ 引起的零输入响应 $y_{zi2}(t)=e^{-t}-e^{-2t}$。当激励为 $x(t)$， $q_1(0)=1$， $q_2(0)=-1$ 时的全响应为 $y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi1}(t)-y_{zi2}(t)=2+e^{-t}$。根据上述三个响应，可以求得零状态响应为：

$$y_{zs}(t)=2+e^{-t}-y_{zi1}(t)+y_{zi2}(t)=2+e^{-t}-e^{-t}-e^{-2t}+e^{-t}-e^{-2t}=2+e^{-t}-2e^{-2t}$$

因此，当激励为 $2x(t)$，初始状态 $q_1(0)=3$， $q_2(0)=2$ 时的全响应 $y(t)$ 为：

$$y(t)=2y_{zs}(t)+3y_{zi1}(t)+2y_{zi2}(t)=4+7e^{-t}-3e^{-2t}$$

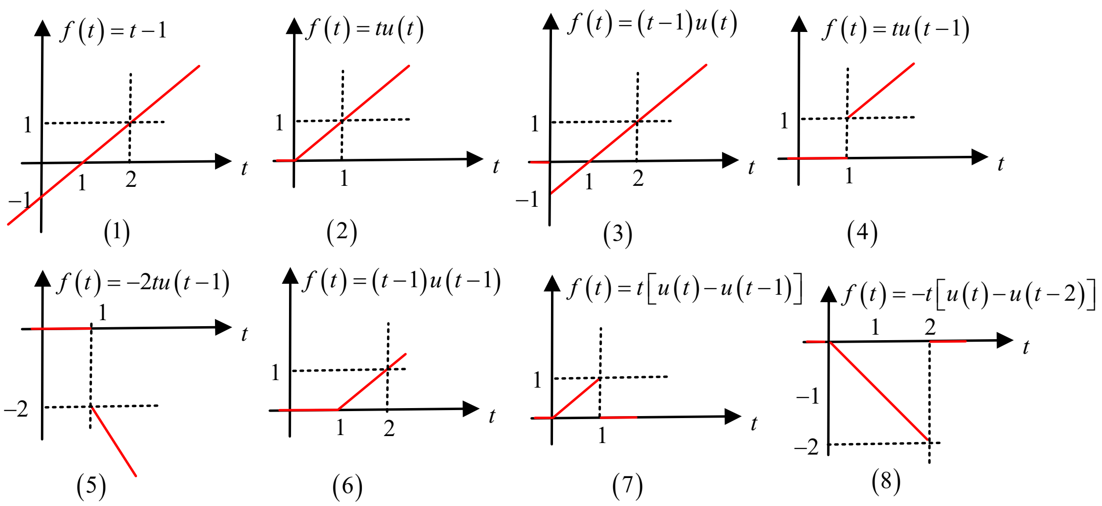
1-12 某线性系统，当输入为 $x(t)$ 时，输出 $y(t)=2+e^{-2t}-e^{-3t}$；若初始状态不变，而输入变为 $2x(t)$ 时，输出 $y(t)=4+3e^{-2t}-4e^{-3t}$，试求系统的零输入响应和当输入为 $3x(t)$ 时的全响应。

解：根据已知条件， $y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=2+e^{-2t}-e^{-3t}$， $y(t)=2y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=4+3e^{-2t}-4e^{-3t}$，合并上两式可求得零输入响应 $y_{zi}(t)=-e^{-2t}+2e^{-3t}$，零状态响应 $y_{zs}(t)=2+2e^{-2t}-3e^{-3t}$。

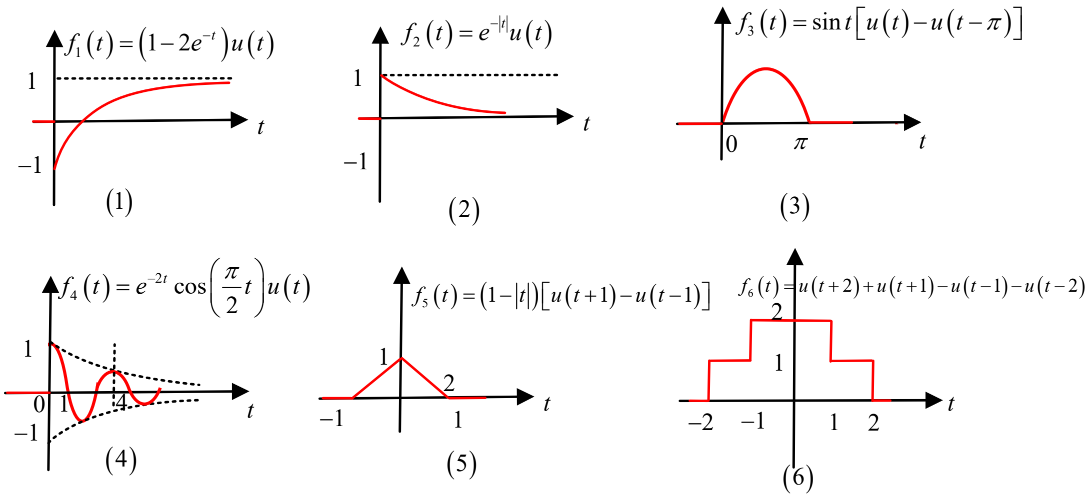
当输入为 $3x(t)$ 时的全响应为 $y(t)=3y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=6+5e^{-2t}-7e^{-3t}$。

第二章 连续时间信号与系统的时域分析

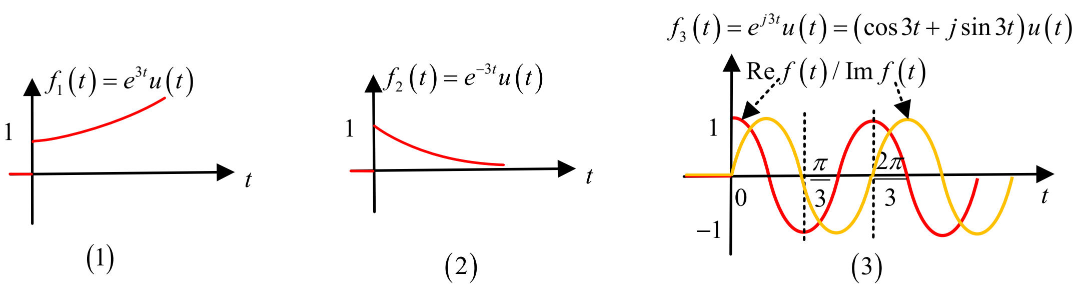
2-1 绘出下列信号的波形，注意它们的区别。



2-2 绘出下列信号的波形图。

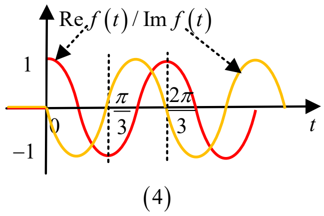


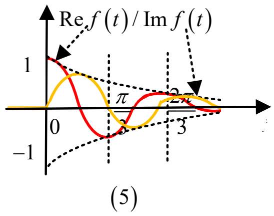
2-3 设 $f(t)=e^{st}u(t)$，绘出复频率 s 取下列值时信号的波形图。

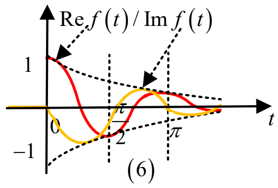


$f_4(t)=e^{-j3t}u(t)=(\cos 3t-j\sin 3t)u(t)$　$f_5(t)=e^{-3t+j3t}u(t)=e^{-3t}(\cos 3t+j\sin 3t)u(t)$

$f_6(t)=e^{-3t-j2t}u(t)=e^{-3t}(\cos 2t-j\sin 2t)u(t)$







2-4 试写出题图各信号的解析表达式。

（a） $f_1(t)=u(t+1)+u(t)-3u(t-1)+u(t-2)$

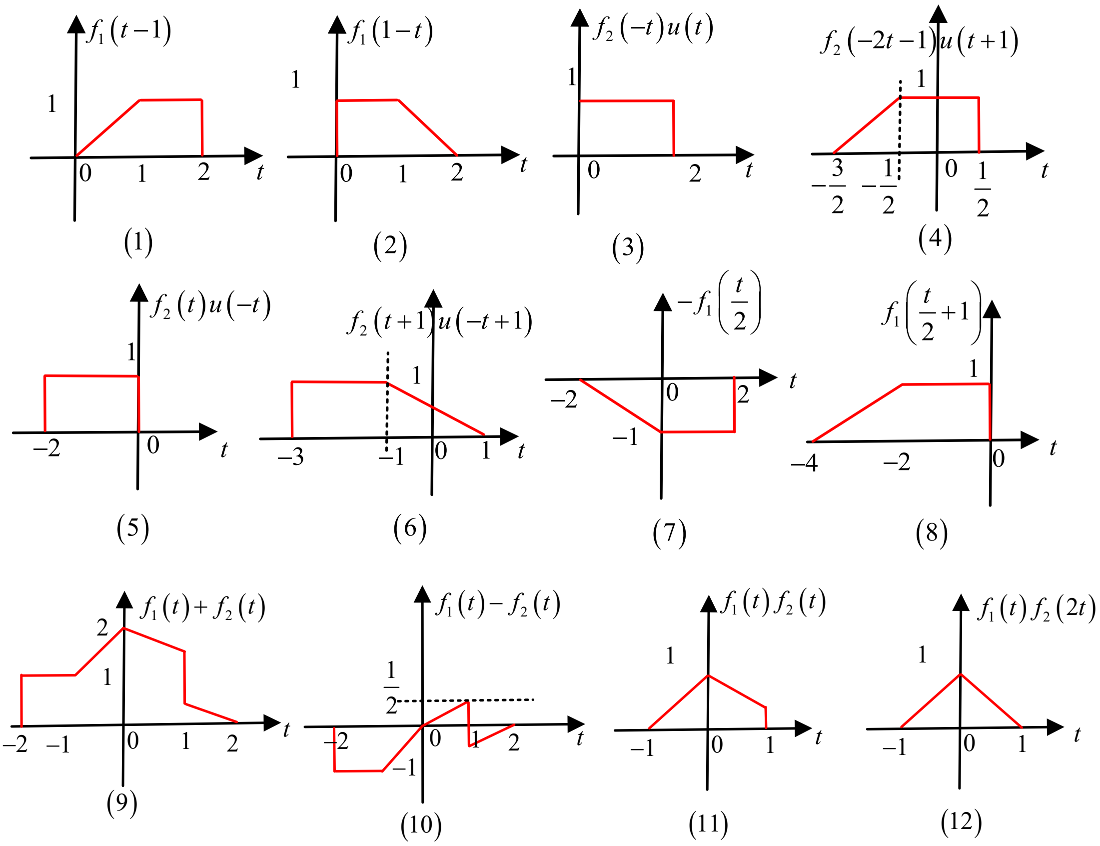
（b） $f_2(t)=2(t+1)\left[u(t+1)-u(t)\right]-(t-2)\left[u(t)-u(t-2)\right]$

（c） $f_3(t)=2e^{-t}u(t+2)$

（d） $f_4(t)=2\delta(t+1)+(t+1)\left[u(t)-u(t-1)\right]+2u(t-1)-\delta(t-2)$

（e） $f_5(t)=3e^{-2t}\sin(2\pi t)u(t-1)$ 或 $f_5(t)=3e^{-2t}\cos\left(2\pi t-\dfrac{\pi}{2}\right)u(t-1)$

2-5 已知连续时间信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 如图所示，试画出各信号的波形图。



2-6 已知信号 $f(t)$ 如图所示

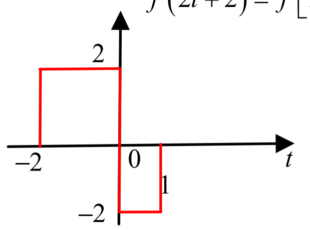
（1）用阶跃信号表示 $f(t)$： $f_a(t)=2u(t+2)-4u(t-2)+2u(t-4)$

$$f_b(t)=\frac{1}{2}(t+4)\left[u(t+4)-u(t)\right]+\frac{1}{2}(t-4)\left[u(t)-u(t-4)\right]$$

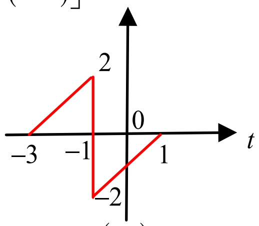
或 $f_b(t)=\frac{1}{2}(t+4)u(t+4)-\frac{1}{2}(t-4)u(t-4)-4$

（2）画出 $f(2t+2)$ 的波形。

$$f(2t+2)=f\left[2(t+1)\right]$$



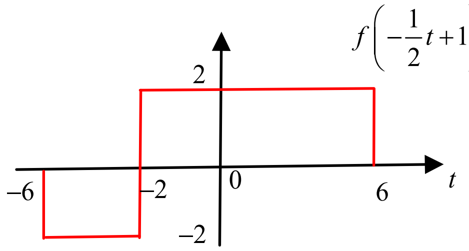
$(2a)$



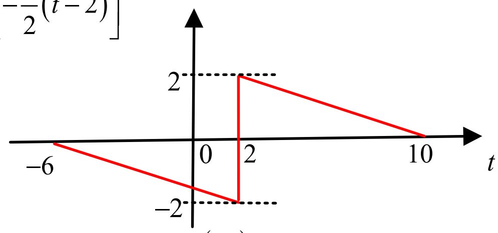
$(2b)$

（3）画出 $f\left(-\frac{1}{2}t+1\right)$ 的波形。

$$f\left(-\frac{1}{2}t+1\right)=f\left[-\frac{1}{2}(t-2)\right]$$

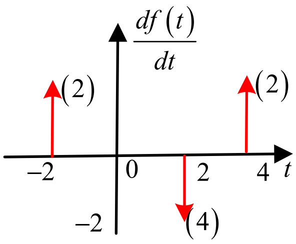


$(3a)$

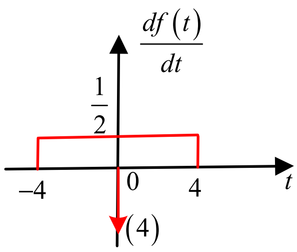


$(3b)$

（4）画出 $\frac{df(t)}{dt}$ 的波形。

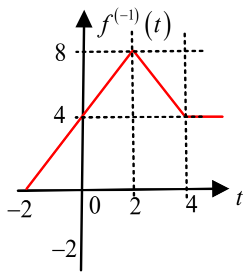


$(4a)$

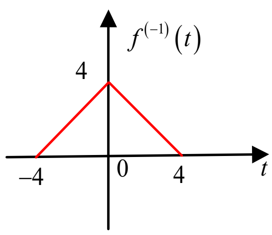


$(4b)$

（5）画出 $f^{(-1)}(t)$ 的波形。



$(5a)$



$(5b)$

2-7 化简下列各式。

（1） $\delta(2t-4)=\frac{1}{2}\delta(t-2)$

（2） $(t^2+t)\delta(t+1)=(t^2+t)\Big|_{t=-1}\delta(t+1)=0$

（3） $\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\delta(3t-1)=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\delta\left(t-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big|_{t=\frac{1}{3}}\delta\left(t-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\delta\left(t-\frac{1}{3}\right)$

（4） $e^{-2(t-1)}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\delta(t)=e^{-2(t-1)}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\Big|_{t=0}\delta(t)=\frac{1}{2}e^2\delta(t)$

（5） $\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\delta(t^2-1)=\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\delta(t+1)+\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\delta(t-1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t-1)$

（6） $e^{-(t+1)}\delta(-t+3)=e^{-(t+1)}\delta(t-3)=e^{-(t+1)}\Big|_{t=3}\delta(t-3)=e^{-4}\delta(t-3)$

（7） $\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\delta'(t+2)=\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\Big|_{t=-2}\delta'(t+2)-\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\Big|_{t=-2}\delta(t+2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\delta'(t+2)-\frac{\pi}{12}\delta(t+2)$

（8） $e^{-t}\delta'(t)=e^{-t}\Big|_{t=0}\delta'(t)-(-e^{-t})\Big|_{t=0}\delta(t)=\delta'(t)+\delta(t)$

2-8 计算下列各积分的值。

（1） $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+2)\delta(t-2)dt=(t^3+2)\Big|_{t=2}=10$

（2） $\int_{0}^{3}(t^2+2t+1)\delta(t-5)dt=0$

（3） $\int_{-\infty}^{\infty}u(t-6)\delta(t-3)dt=u(t-6)\Big|_{t=3}=0$

（4） $\int_{-\infty}^{\infty}u(t-4)\delta(t-6)dt=u(t-4)\Big|_{t=6}=1$

（5） $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j2t}\left[\delta(t+3)+\delta(t-3)\right]dt=e^{-j2t}\Big|_{t=-3}+e^{-j2t}\Big|_{t=3}=e^{6j}+e^{-6j}=2\cos 6$

（6） $\int_{-\infty}^{\infty}u(t)u(-t+6)dt=\int_{0}^{6}1\cdot 1dt=t\Big|_0^6=6$

（7） $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3t}\delta'(t-1)dt=-\left(e^{-3t}\right)'\Big|_{t=1}=3e^{-3}$

（8）

$$\int_{-2}^{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\left[\delta(t+1)+\delta(t-3)\right]dt=\int_{-2}^{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\delta(t+1)dt+\int_{-2}^{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\delta(t-3)dt=\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\Big|_{t=-1}+0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2-9 化简下列各式。

（6）

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t-1)\delta(t^2-4)dt=\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t-1)\cdot\frac{1}{4}\left[\delta(t+2)+\delta(t-2)\right]dt=\frac{1}{4}\left[(t^2+2t-1)\Big|_{t=-2}+(t^2+2t-1)\Big|_{t=2}\right]=\frac{3}{2}$$

2-10 已知系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2x'(t)+x(t)$，试求系统的冲激响应 $h(t)$。

解：设 $h_0''(t)+3h_0'(t)+2h_0(t)=\delta(t)$，其特征方程为 $\gamma^2+3\gamma+2=0$，解得特征根为：$\gamma_1=-1$，$\gamma_2=-2$。

因此 $h_0(t)$ 的形式应为：$h_0(t)=\left(c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}\right)u(t)$。

代入初始条件：$h_0'\left(0^+\right)=1$，$h_0\left(0^+\right)=0$，可得：$\begin{cases}-c_1-2c_2=1\\ c_1+c_2=0\end{cases}$，求得 $\begin{cases}c_1=1\\ c_2=-1\end{cases}$

因此有 $h_0(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

系统的冲激响应 $h(t)=2h_0'(t)+h_0(t)=2\left(-e^{-t}+2e^{-2t}\right)u(t)+\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)=\left(3e^{-2t}-e^{-t}\right)u(t)$

2-12 已知系统的微分方程为 $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=x'(t)+x(t)$，试求系统的冲激响应 $h(t)$。

解：设 $h_0''(t)+4h_0'(t)+4h_0(t)=\delta(t)$，其特征方程为 $\gamma^2+4\gamma+4=0$，解得特征根为：$\gamma_{1,2}=-2$。

因此 $h_0(t)$ 的形式应为：$h_0(t)=(c_1+c_2t)e^{-2t}u(t)$。

代入初始条件：$h_0'\left(0^+\right)=1$，$h_0\left(0^+\right)=0$，可得：$\begin{cases}c_1=0\\ c_2=1\end{cases}$，因此有 $h_0(t)=te^{-2t}u(t)$

系统的冲激响应 $h(t)=h_0'(t)+h_0(t)=\left(e^{-2t}-2te^{-2t}\right)u(t)+te^{-2t}u(t)=(1-t)e^{-2t}u(t)$

2-13 计算下列卷积。

（2）解：$2*e^{-3t}u(t)=e^{-3t}u(t)*2=e^{-3t}u(t)*2u(t+\infty)=\int\limits_0^{t+\infty}e^{-3\tau}\cdot 2d\tau\cdot u(t+\infty)=2\int\limits_0^{\infty}e^{-3\tau}d\tau=\frac{2}{3}$

（6）解：

$e^{-(t-1)}u(t-1)*e^{-(t-4)}u(t-4)=\int\limits_1^{t-4}e^{-(\tau-1)}e^{-(t-\tau-4)}d\tau\cdot u(t-1-4)=e^{-t+5}\int\limits_1^{t-4}1d\tau\cdot u(t-5)=e^{-(t-5)}(t-5)u(t-5)$

2-14 线性时不变系统的激励和零状态响应由下式联系：$y(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-2(t-\tau)}x(\tau-3)d\tau$。

（1）求系统的冲激响应。

解法一：根据冲激响应的定义，$h(t)$ 是系统在激励为 $x(t)=\delta(t)$ 时的零状态响应。根据已知的激励和零状态响应的关系，有：$h(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-2(t-\tau)}\delta(\tau-3)d\tau=e^{-2(t-3)}u(t-3)$

解法二：已知 $y(t)=x(t)*h(t)=\int\limits_{t_1}^{t-t_2}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\cdot u(t-t_1-t_2)=\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-2(t-\tau)}x(\tau-3)d\tau$

令 $\lambda=\tau-3$，则有 $y(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-2(t-\tau)}x(\tau-3)d\tau\int\limits_{-\infty-3}^{t-3}e^{-2(t-\lambda-3)}x(\lambda)d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{t-3}x(\lambda)e^{-2(t-3-\lambda)}d\lambda$，对比上两式可写出，$h(t)=e^{-2(t-3)}u(t-3)$。

（2）当输入 $x(t)=\left[u(t+1)-u(t-1)\right]$ 时，确定该系统的零状态响应。

解法一：系统的零状态响应 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-2(t-\tau)}x(\tau-3)d\tau$，将 $x(t)=[u(t+1)-u(t-1)]$ 代入可得：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-2(t-\tau)}[u(\tau-2)-u(\tau-4)]d\tau=\int_{-\infty}^{t}e^{-2(t-\tau)}u(\tau-2)d\tau-\int_{-\infty}^{t}e^{-2(t-\tau)}u(\tau-4)d\tau$$

$$=\int_{2}^{t}e^{-2(t-\tau)}d\tau\cdot u(t-2)-\int_{4}^{t}e^{-2(t-\tau)}d\tau\cdot u(t-4)$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)-\frac{1}{2}\left[1-e^{-2(t-4)}\right]u(t-4)$$

解法二：输入激励 $x(t)=[u(t+1)-u(t-1)]$，在 $t=-\infty$ 时为零，因此系统的零状态响应可写为：

$y(t)=x(t)*h(t)=x'(t)*h^{(-1)}(t)$，其中 $x'(t)=[\delta(t+1)-\delta(t-1)]$。

根据卷积的重现性质，有：

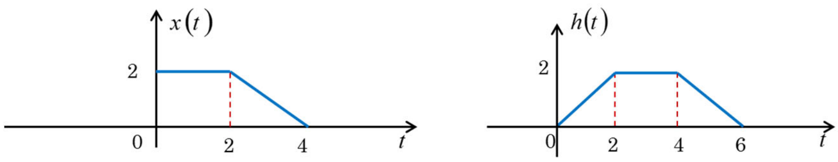
$$y(t)=x'(t)*h^{(-1)}(t)=[\delta(t+1)-\delta(t-1)]*h^{(-1)}(t)=h^{(-1)}(t+1)-h^{(-1)}(t-1)。$$

已求得 $h(t)=e^{-2(t-3)}u(t-3)$，因此有：

$$h^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-2(\tau-3)}u(\tau-3)d\tau=\int_{3}^{t}e^{-2(\tau-3)}d\tau\, u(t-3)=\frac{1}{2}\left[1-e^{-2(t-3)}\right]u(t-3)$$

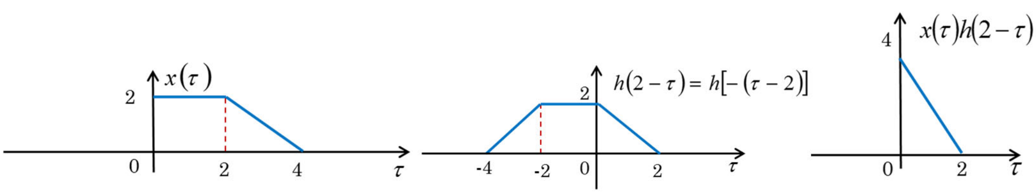
$h^{(-1)}(t+1)=\frac{1}{2}\left[1-e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)$，　$h^{(-1)}(t-1)=\frac{1}{2}\left[1-e^{-2(t-4)}\right]u(t-4)$，因此系统的零状态响应为：$y(t)=h^{(-1)}(t+1)-h^{(-1)}(t-1)=\frac{1}{2}\left[1-e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)-\frac{1}{2}\left[1-e^{-2(t-4)}\right]u(t-4)$

2-15 系统的激励 $x(t)$ 和冲激响应 $h(t)$ 如图所示，试求零状态响应 $y(t)$ 在 $t=2,t=6$ 时的值。



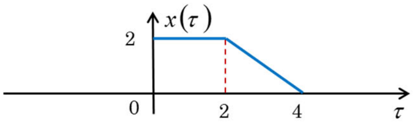
解：根据激励和冲激响应的起始时间可知，$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{0}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\cdot u(t)$。

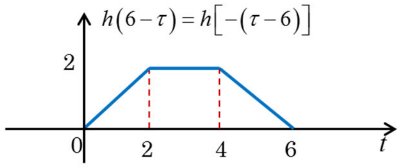
当 $t=2$ 时，$y(t)|_{t=2}=\int_{0}^{2}x(\tau)h(2-\tau)d\tau$。

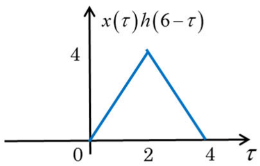


因此有 $y(t)|_{t=2}=\int_{0}^{2}x(\tau)h(2-\tau)d\tau=4$。

当 $t=6$ 时，$y(t)|_{t=6}=\int_{0}^{6}x(\tau)h(6-\tau)d\tau$。

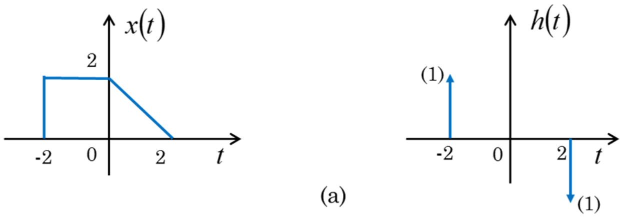




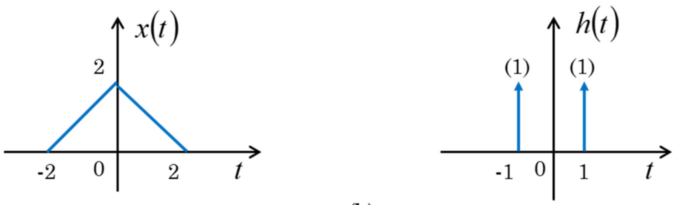


因此有 $y(t)\big|_{t=6}=\int_0^6 x(\tau)h(6-\tau)d\tau=8$。

2-20 系统的激励 $x(t)$ 和冲激响应 $h(t)$ 如图所示，试画出 $x(t)*h(t)$ 的波形。



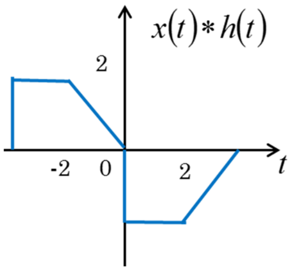
(a)



(b)

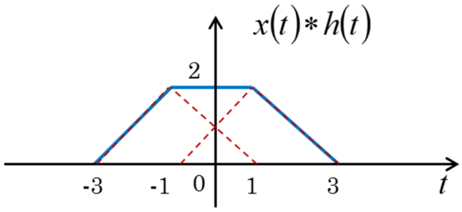
（a）解：由图示可知，$h(t)=[\delta(t+2)-\delta(t-2)]$，根据卷积的重现性质，有：

$x(t)*h(t)=x(t)*[\delta(t+2)-\delta(t-2)]=x(t+2)-x(t-2)$。因此有：



（b）解：由图示可知，$h(t)=[\delta(t+1)+\delta(t-1)]$，根据卷积的重现性质，有：

$x(t)*h(t)=x(t)*[\delta(t+1)+\delta(t-1)]=x(t+1)+x(t-1)$。因此有：



2-21 已知 $x(t)*h(t)$ 的波形如题图所示，试画出下列卷积积分的波形图。

解：已知图形 $y(t)=x(t)*h(t)$ 如图所示，则有

（1）$x'(t)*h(t)=y'(t)$（卷积的微分性质），即 $x'(t)*h(t)$ 的波形图是已知 $x(t)*h(t)$ 波形的导数。

（2）$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau*h(t)=y^{(-1)}(t)$（卷积的积分性质），即 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau*h(t)$ 的波形图是已知 $x(t)*h(t)$ 波形的积分。

（3）$x(t-2)*h(t)=y(t-2)$（卷积的时移性质），即 $x(t-2)*h(t)$ 的波形图是已知 $x(t)*h(t)$ 波形向右时移 2。

（4）$\left[x(t)+x(t-1)\right]*h(t)=x(t)*h(t)+x(t-1)*h(t)$，即该波形图是已知 $x(t)*h(t)$ 波形加上已知 $x(t)*h(t)$ 波形向右时移 1 之后的波形图。

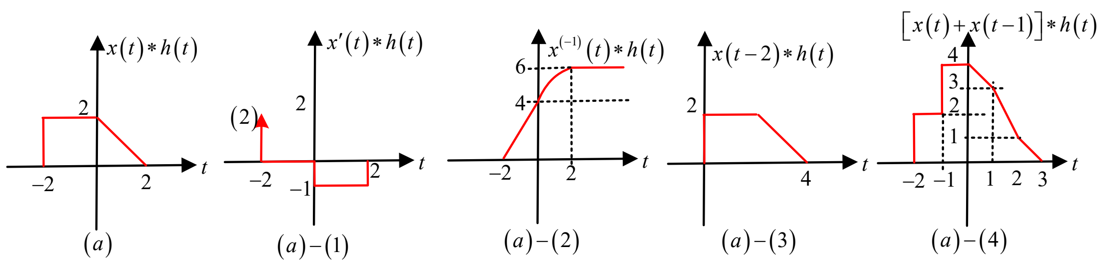
因此，对于图（a）有：

（1）$x'(t)*h(t)=y'(t)=\begin{cases}0 & t<-2,t>2,-2<t<0\\ 2\delta(t+2) & t=-2\\ -1 & 0\le t\le 2\end{cases}$

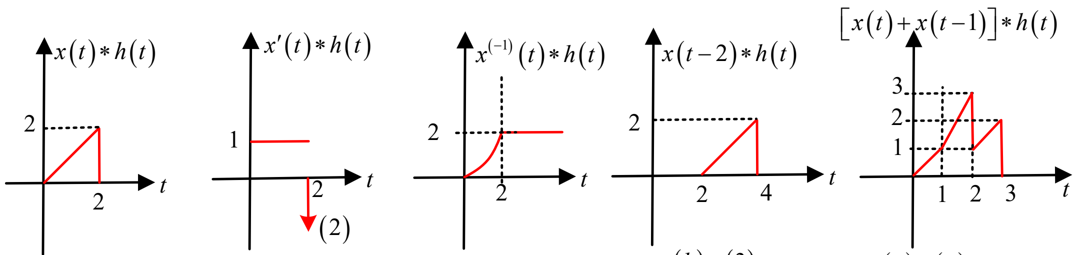
（2）$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau*h(t)=y^{(-1)}(t)=\begin{cases}0 & t\le -2\\ \int_{-2}^{t}2d\tau=2(t+2) & -2<t\le 0\\ \int_{-2}^{0}2d\tau+\int_{0}^{t}(-\tau+2)d\tau=4-\frac{1}{2}t^2+2t & 0<t\le 2\\ 6 & t>2\end{cases}$

（3）$x(t-2)*h(t)=y(t-2)$

（4）$\left[x(t)+x(t-1)\right]*h(t)=x(t)*h(t)+x(t-1)*h(t)=y(t)+y(t-1)$

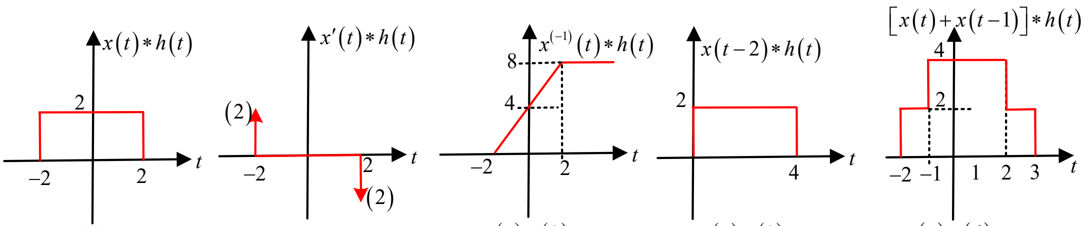


因此，对于图（b）有：



(b) $(b)-(1)$ $(b)-(2)$ $(b)-(3)$ $(b)-(4)$

因此，对于图（c）有：



(c) $(c)-(1)$ $(c)-(2)$ $(c)-(3)$ $(c)-(4)$

2-23 已知系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x'(t)$，试求系统在下列激励作用下的零状态响应。

解：设 $h_0''(t)+3h_0'(t)+2h_0(t)=\delta(t)$，其特征方程为 $\gamma^2+3\gamma+2=0$，解得特征根为：$\gamma_1=-1$，$\gamma_2=-2$。

因此 $h_0(t)$ 的形式应为：$h_0(t)=\left(c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}\right)u(t)$。

代入初始条件：$h_0'(0^+)=1$，$h_0(0^+)=0$，可得：$\begin{cases}-c_1-2c_2=1\\ c_1+c_2=0\end{cases}$，求得 $\begin{cases}c_1=1\\ c_2=-1\end{cases}$

因此有 $h_0(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$，因此可得：系统的冲激响应 $h(t)=h_0'(t)=\left(-e^{-t}+2e^{-2t}\right)u(t)$

（2）激励为 $x(t)=e^{-3t}u(t)$，则系统的零状态响应为：

$$
\begin{aligned}
y(t)&=x(t)*h(t)=e^{-3t}u(t)*\left(-e^{-t}+2e^{-2t}\right)u(t)=\int_0^t e^{-3\tau}\left(-e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau\cdot u(t)\\
&=\int_0^t\left(-e^{-t}e^{-2\tau}+2e^{-2t}e^{-\tau}\right)d\tau\cdot u(t)\\
&=\left[-e^{-t}\int_0^t e^{-2\tau}d\tau+2e^{-2t}\int_0^t e^{-\tau}d\tau\right]\cdot u(t)\\
&=\left[\frac{1}{2}e^{-t}\left(e^{-2t}-1\right)+2e^{-2t}\left(1-e^{-t}\right)\right]\cdot u(t)\\
&=\left[-\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}\right]u(t)
\end{aligned}
$$

2-26 图示系统中各子系统的冲激响应分别为 $h_1(t)=e^{-t}u(t)$，$h_2(t)=\delta(t-1)$，$h_3(t)=u(t)$，$h_4(t)=e^{-2t}u(t)$，试求系统的冲激响应 $h(t)$。

解：根据图示可以写出：$\left[x(t)+x(t)*h_1(t)*h_2(t)+x(t)*h_3(t)\right]*h_4(t)=y(t)$

根据卷积的分配律，有： $x(t)*\left[\delta(t)+h_1(t)*h_2(t)+h_3(t)\right]*h_4(t)=y(t)=x(t)*h(t)=y(t)$

根据卷积的结合律，有：$x(t)*\left[h_4(t)+h_1(t)*h_2(t)*h_4(t)+h_3(t)*h_4(t)\right]=x(t)*h(t)=y(t)$

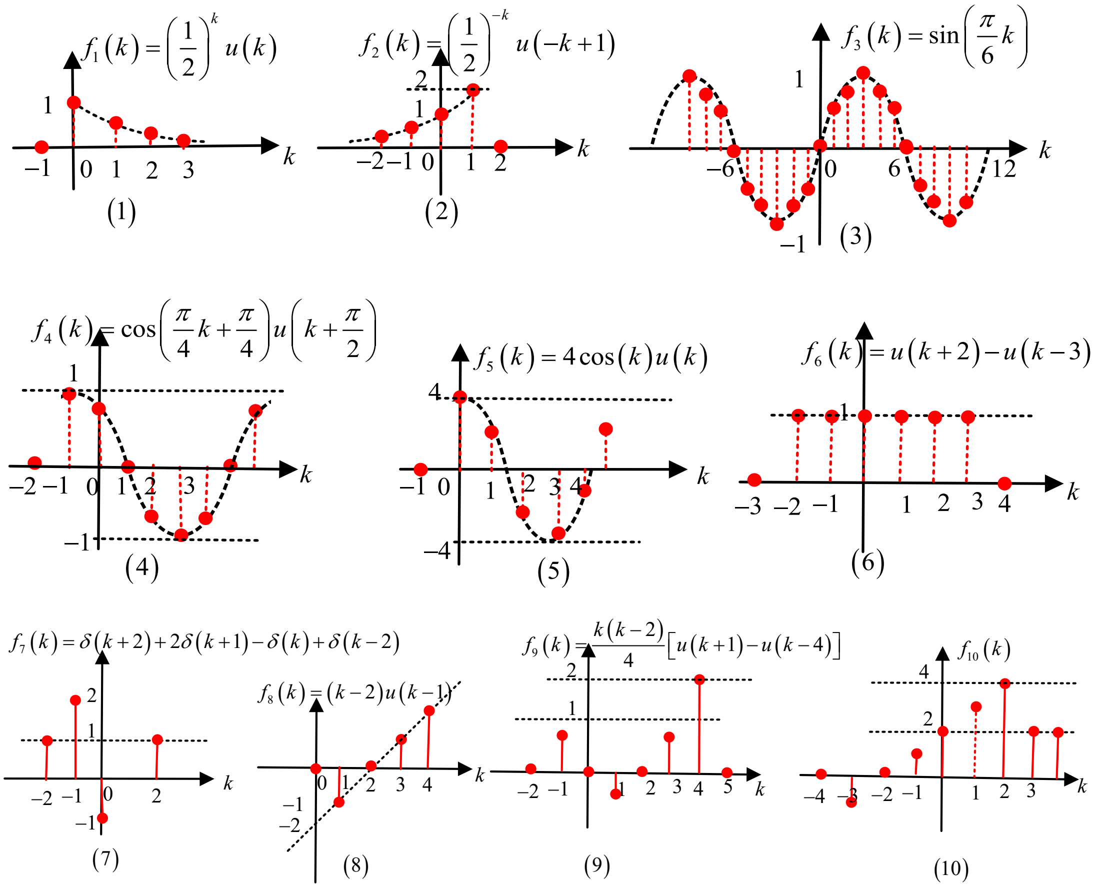
因此系统的冲激响应为：$h(t)=h_4(t)+h_1(t)*h_2(t)*h_4(t)+h_3(t)*h_4(t)$

将各子系统的函数表达式代入上式，可得：

$$
\begin{aligned}
&h(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-t}u(t)*\delta(t-1)*e^{-2t}u(t)+u(t)*e^{-2t}u(t)\\
&=e^{-2t}u(t)+\left[\int_0^t e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau\cdot u(t)\right]*\delta(t-1)+\delta(t)*\int_{-\infty}^t e^{-2\tau}u(\tau)d\tau\\
&=e^{-2t}u(t)+\left[\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)\right]*\delta(t-1)+\int_{-\infty}^t e^{-2\tau}u(\tau)d\tau\\
&=e^{-2t}u(t)+\left(e^{-t+1}-e^{-2t+2}\right)u(t-1)+\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)u(t)\\
&=\frac{1}{2}\left(1+e^{-2t}\right)u(t)+\left(e^{-t+1}-e^{-2t+2}\right)u(t-1)
\end{aligned}
$$

第三章 离散时间信号与系统的时域分析

3-1 绘出下面序列的波形图。



3-2 试写出题图各序列的解析表达式。

（1） $f_1(k)=2\delta(k+1)-\delta(k)+2\delta(k-1)+\delta(k-2)$

（2） $f_2(k)=2u(k+1)-2u(k-3)$ 或 $f_2(k)=2\sum_{n=-1}^{2}\delta(k-n)$

（3）

$$f_3(k)=k\left[u(k)-u(k-3)\right]-(k-6)\left[u(k-3)-u(k-6)\right]=ku(k)-2(k-3)u(k-3)+(k-6)u(k-6)$$

或 $f_3(k)=r(k)+r(k-6)-2r(k-3)$

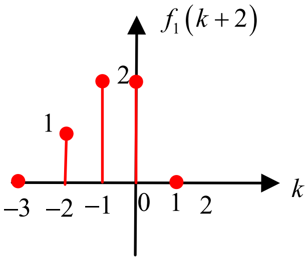
$$f_3(k)=k\left[u(k)-u(k-4)\right]-(k-6)\left[u(k-4)-u(k-6)\right]=ku(k)-2(k-3)u(k-4)+(k-6)u(k-6)$$

或 $f_3(k)=r(k)+r(k-6)-2(k-3)u(k-4)$

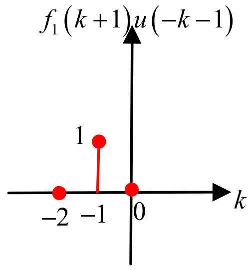
（4） $f_4(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\delta(k-2n)-\delta\left[k-(2n+1)\right]\right]$

（5） $f_5(k)=10\cos\left(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2}\right)u(k)$ 或 $f_5(k)=10\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)u(k)$

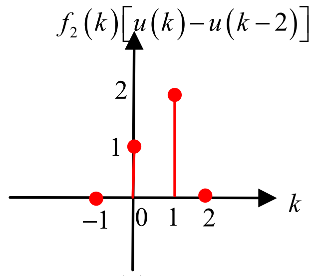
3-3 已知离散时间信号 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 如图所示，试画出下列序列的图形。



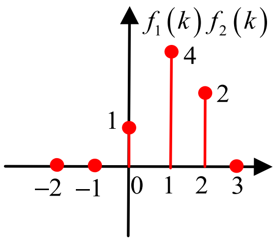
(1)



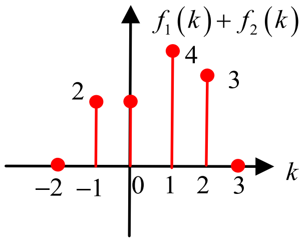
(2)



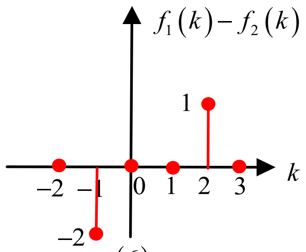
(3)



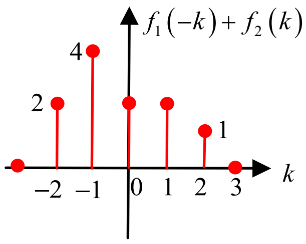
(4)



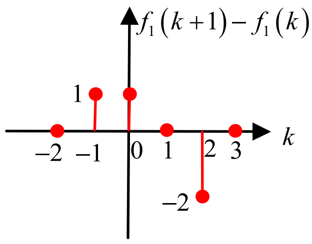
(5)



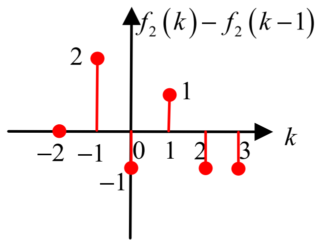
(6)



(7)



(8)



(9)

3-4 已知序列 $f_1(k)=\begin{cases}0 & k<1\\ k-1 & k\geq 1\end{cases}$， $f_2(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ 2^{-k} & k\geq 0\end{cases}$，试求下列各序列的表达式。

解：首先统一区间， $f_1(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ 0 & k=0\\ k-1 & k\geq 1\end{cases}$， $f_2(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ 1 & k=0\\ 2^{-k} & k\geq 1\end{cases}$

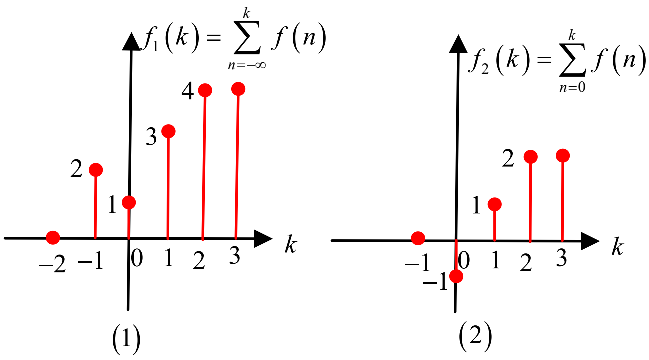
因此有：（1） $f_1(k)+f_2(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ 1 & k=0\\ 2^{-k}+k-1 & k\geq 1\end{cases}$，（2） $f_1(k)\cdot f_2(k)=\begin{cases}0 & k<1\\ 2^{-k}(k-1) & k\geq 1\end{cases}$

3-6　已知 $y(k)=\sum_{i=0}^{k}f(i)$，求 $\Delta y(k)$ 和 $\nabla y(k)$。

解： $\Delta y(k)=y(k+1)-y(k)=\sum_{i=0}^{k+1}f(i)-\sum_{i=0}^{k}f(i)=f(k+1)$

$\nabla y(k)=y(k)-y(k-1)=\sum_{i=0}^{k}f(i)-\sum_{i=0}^{k-1}f(i)=f(k)$

3-8 已知序列如图所示，试画出下面序列的图形。



3-10 设描述某离散系统的差分方程为 $y(k+2)+0.5y(k+1)-0.5y(k)=x(k+2)-2x(k+1)$，求系统的单位脉冲响应 $h(k)$。

解：设 $h_0(k+2)+0.5h_0(k+1)-0.5h_0(k)=\delta(k)$，则特征方程为 $\gamma^2+0.5\gamma-0.5=0$，解得特征根为：$\gamma_1=-1$，$\gamma_2=0.5$。

因此 $h_0(k)$ 的形式应为：$h_0(k)=\left(c_1(-1)^k+c_2(0.5)^k\right)u(k-1)$。

代入初始条件：$\begin{cases}h_0(2)=1\\h_0(1)=0\end{cases}$，可得 $\begin{cases}c_1+0.25c_2=1\\-c_1+0.5c_2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}c_1=\dfrac{2}{3}\\c_2=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

因此有 $h_0(k)=\left(\frac{2}{3}(-1)^k+\frac{4}{3}(0.5)^k\right)u(k-1)$

所以系统的单位脉冲响应：

$$
\begin{aligned}
h(k)&=h_0(k+2)-2h_0(k+1)\\
&=\left(\frac{2}{3}(-1)^{k+2}+\frac{4}{3}(0.5)^{k+2}\right)u(k+1)-2\left(\frac{2}{3}(-1)^{k+1}+\frac{4}{3}(0.5)^{k+1}\right)u(k)\\
&=\left(\frac{2}{3}(-1)^{k+2}+\frac{4}{3}(0.5)^{k+2}\right)\left[\delta(k+1)+u(k)\right]-\left(\frac{4}{3}(-1)^{k+1}+\frac{8}{3}(0.5)^{k+1}\right)u(k)\\
&=\left.\left(\frac{2}{3}(-1)^{k+2}+\frac{4}{3}(0.5)^{k+2}\right)\right|_{k=-1}\delta(k+1)+\left[\frac{2}{3}(-1)^{k+2}+\frac{4}{3}(0.5)^{k+2}-\frac{4}{3}(-1)^{k+1}-\frac{8}{3}(0.5)^{k+1}\right]u(k)\\
&=\left[\frac{2}{3}(-1)^k+\frac{1}{3}(0.5)^k+\frac{4}{3}(-1)^k-\frac{4}{3}(0.5)^k\right]u(k)\\
&=\left[2(-1)^k-(0.5)^k\right]u(k)
\end{aligned}
$$

3-12 试求下列序列的离散卷积。

（2）解法一：

$$u(k-1)*[u(k)-u(k-2)]=u(k-1)*u(k)-u(k-1)*u(k-2)$$
$$=\sum_{n=1}^{k}1\cdot u(k-1)-\sum_{n=1}^{k-2}1\cdot u(k-1-2)$$
$$=ku(k-1)-(k-2)u(k-3)$$
$$=k[\delta(k-1)+\delta(k-2)+u(k-3)]-(k-2)u(k-3)$$
$$=\delta(k-1)+2\delta(k-2)+2u(k-3)$$
$$=\delta(k-1)+2u(k-2)$$

解法二：

$$u(k-1)*[u(k)-u(k-2)]=u(k-1)*[\delta(k)+\delta(k-1)]$$
$$=u(k-1)+u(k-2)$$
$$=\delta(k-1)+2u(k-2)$$

注意：这里利用了 $\delta(k)=u(k)-u(k-1)$ 和 $x(k)*\delta(k)=x(k)$ 的性质。

（5） $a^k u(k)*a^k u(k)=\sum_{n=0}^{k}a^n a^{k-n}\cdot u(k)=a^k\sum_{n=0}^{k}1\cdot u(k)=a^k(k+1)u(k)$

3-13 某离散系统的输入信号 $x(k)$ 和单位脉冲响应 $h(k)$ 如图所示，试求该系统的零状态响应。

解法一： $x(k)=\{4,\underline{-2},3,2\}$， $h(k)=\{\underline{4},-1,2,1\}$，激励和单位脉冲响应都是有限序列，则系统的零状态响应 $y(k)=x(k)*h(k)$ 为：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 4 & \underline{-2} & 3 & 2 \\
 & & \times & \underline{4} & -1 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & 4 & -2 & 3 & 2 \\
 & & 8 & -4 & 6 & 4 & \\
 & -4 & 2 & -3 & -2 & & \\
16 & \underline{-8} & 12 & 8 & & & \\
\hline
16 & \underline{-12} & 22 & 5 & 2 & 7 & 2
\end{array}$$

$y(k)=\{16,\underline{-12},22,5,2,7,2\}$

解法二：已知 $x(k)=\{4,\underline{-2},3,2\}$， $h(k)=\{\underline{4},-1,2,1\}$，可利用图解法分段讨论：

$$y(k)=x(k)*h(k)=\sum_{n=-1}^{k+1}x(n)h(k-n)\cdot u(k+1)$$

$k<-1$ 时， $y(k)=0$

$k=-1$ 时， $y(-1)=\sum_{n=-1}^{0}x(n)h(-1-n)=x(-1)h(0)+x(0)h(-1)=4\times4-2\times0=16$

$k=0$ 时， $y(0)=\sum_{n=-1}^{1}x(n)h(-n)=x(-1)h(1)+x(0)h(0)=4\times(-1)+(-2)\times4=-12$

k=1 时， $y(1)=\sum_{n=-1}^{2}x(n)h(1-n)=x(-1)h(2)+x(0)h(1)+x(1)h(0)=22$

k=2 时， $y(2)=\sum_{n=-1}^{3}x(n)h(2-n)=x(-1)h(3)+x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)=5$

k=3 时， $y(3)=\sum_{n=-1}^{4}x(n)h(3-n)=x(0)h(3)+x(1)h(2)+x(2)h(1)=2$

k=4 时， $y(4)=\sum_{n=-1}^{5}x(n)h(4-n)=x(1)h(3)+x(2)h(2)=7$

k=5 时， $y(5)=\sum_{n=-1}^{6}x(n)h(5-n)=x(2)h(3)=2$

k>5 后， $y(k)=0$

因此， $y(k)=\{16,\underline{-12},22,5,2,7,2\}$

3-16 求下列离散系统的零状态响应。

（1） $y(k+1)-0.5y(k)=x(k+1)$， $x(k)=\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}u(k)$

解：设 $h_0(k+1)-0.5h_0(k)=\delta(k)$，则特征方程为 $\gamma-0.5=0$，特征根为 $\gamma=0.5$。

$\therefore h_0(k)=c(0.5)^{k}u(k-1)$，代入初始条件 $h_0(1)=1$，可求得 $c=2$。

$\therefore h_0(k)=2(0.5)^{k}u(k-1)$

因此，系统的单位脉冲响应为： $h(k)=h_0(k+1)=2(0.5)^{k+1}u(k)=0.5^{k}u(k)$

因此，系统的零状态响应为：

$$\begin{aligned}y(k)&=x(k)*h(k)=\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}u(k)*0.5^{k}u(k)\\&=\sum_{n=0}^{k}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}0.5^{k-n}u(k)=0.5^{k}\sum_{n=0}^{k}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}u(k)\\&=0.5^{k}\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{k+1}}{1+\frac{2}{3}}u(k)=\left[0.6\left(\frac{1}{2}\right)^{k}+0.4\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right]u(k)\end{aligned}$$

3-17 已知下列离散系统的输入为 $x(k)$，单位脉冲响应为 $h(k)$，试计算零状态响应。

（4） $x(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u(k)$， $h(k)=u(k)$

解：零状态响应为：

$$y(k)=x(k)*h(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)*u(k)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)*\delta(k)=\sum_{n=-\infty}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$ （卷积的差分性质）

$$=\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot u(k)=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}}\cdot u(k)$$ （或跳过上步，直接利用卷积求和限的公式）

$$=\left(2-2^{-k}\right)\cdot u(k)$$

3-18 图示系统中各子系统的单位脉冲响应分别为 $h_1(k)=u(k)$， $h_2(k)=\delta(k-1)$，$h_3(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)$，试求系统的单位脉冲响应 $h(k)$。

解：根据图示可以写出：$\left[x(k)+x(k)*h_1(k)+x(k)*h_2(k)\right]*h_3(k)=y(k)$

根据卷积的分配律，有 $\left[x(k)*h_3(k)+x(k)*h_1(k)*h_3(k)+x(k)*h_2(k)*h_3(k)\right]=y(k)$

进一步可写为 $x(k)*\left[h_3(k)+h_1(k)*h_3(k)+h_2(k)*h_3(k)\right]=y(k)$

已知 $y(k)=x(k)*h(k)$，因此系统的单位脉冲响应 $h(k)$ 为：

$$h(k)=\left[h_3(k)+h_1(k)*h_3(k)+h_2(k)*h_3(k)\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)+u(k)*\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)+\delta(k-1)*\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)+\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(k)+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}u(k-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}}u(k)+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}u(k-1)$$

$$=2u(k)+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}u(k-1)$$

$$=2\delta(k)+\left(2+2^{-k+1}\right)u(k-1)$$

3-19 已知某线性时不变系统的差分方程为 $y(k+1)-0.2y(k)=x(k)$，激励 $x(k)=\left(2-0.5^k\right)u(k)$，（1）初始条件 $y_{zi}(0)=1$，求系统的全响应 $y(k)$；（2）初始条件 $y(0)=3$，求系统的全响应 $y(k)$ 和零输入响应 $y_{zi}(k)$。

解：（1）系统差分方程的特征方程为 $\gamma-0.2=0$，特征根为 $\gamma=0.2$，因此齐次差分方程的通解为： $y_{zi}(k)=c0.2^k \quad k\geq 0$。

将初始条件 $y_{zi}(0)=1$ 代入，可求得 $c=1$。因此零输入响应的通解为 $y_{zi}(k)=0.2^k \quad k\geq 0$，

将单位脉冲响应的初始条件 $h(1)=1$ 代入，可求得 $c=5$，即单位脉冲响应为：

$$h(k)=5\times 0.2^k u(k-1)=5\times 0.2^k u(k)-5\times 0.2^k\delta(k)=5\times 0.2^k u(k)-5\delta(k)。$$

或者 $h(k)=5\times0.2^{k}u(k-1)=0.2^{k-1}u(k-1)$。

因此，系统的零状态响应：

$$
\begin{aligned}
y_{zs}(k)&=x(k)*h(k)=\left(2-0.5^{k}\right)u(k)*\left[5\times0.2^{k}u(k)-5\delta(k)\right]\\
&=\left[\left(2-0.5^{k}\right)u(k)\right]*\left[5\times0.2^{k}u(k)\right]-5\left(2-0.5^{k}\right)u(k)\\
&=5\left[\sum_{n=0}^{k}\left(2-0.5^{n}\right)\times0.2^{k-n}\right]\cdot u(k)-5\left(2-0.5^{k}\right)u(k)\\
&=5\times0.2^{k}\left[\sum_{n=0}^{k}\left(2\times0.2^{-n}-2.5^{n}\right)\right]\cdot u(k)-5\left(2-0.5^{k}\right)u(k)\\
&=5\times0.2^{k}\left[\frac{2\left(1-5^{k+1}\right)}{-4}-\frac{1-2.5^{k+1}}{-1.5}\right]\cdot u(k)-5\left(2-0.5^{k}\right)u(k)\\
&=\left[\frac{5\left(0.2^{k}-5\right)}{-2}-\frac{0.2^{k}-2.5\times0.5^{k}}{-0.3}\right]\cdot u(k)-5\left(2-0.5^{k}\right)u(k)\\
&=\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{6}0.2^{k}-\frac{10}{3}0.5^{k}\right)u(k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{zs}(k)&=x(k)*h(k)=\left(2-0.5^{k}\right)u(k)*0.2^{k-1}u(k-1)\\
&=\left[\sum_{n=0}^{k-1}\left(2-0.5^{n}\right)\times0.2^{k-n-1}\right]\cdot u(k-1)\\
&=0.2^{k-1}\left[\sum_{n=0}^{k-1}\left(2\times0.2^{-n}-2.5^{n}\right)\right]\cdot u(k-1)
\end{aligned}
$$

或者 $=0.2^{k-1}\left[\sum_{n=0}^{k-1}\left(2\times5^{n}-2.5^{n}\right)\right]\cdot u(k-1)$

$$
\begin{aligned}
&=0.2^{k-1}\left[\frac{2\left(1-5^{k}\right)}{1-5}-\frac{1-2.5^{k}}{1-2.5}\right]\cdot u(k-1)\\
&=0.2^{k-1}\left[0.5\left(5^{k}-1\right)-\frac{2}{3}\left(2.5^{k}-1\right)\right]\cdot u(k-1)\\
&=\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{6}0.2^{k}-\frac{10}{3}0.5^{k}\right)u(k-1)
\end{aligned}
$$

注意：$k=0$ 时，第一种思路的解 $y_{zs}(k)=\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{6}0.2^{k}-\frac{10}{3}0.5^{k}\right)u(k)=0$，因此也可写为 $y_{zs}(k)=\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{6}0.2^{k}-\frac{10}{3}0.5^{k}\right)u(k-1)$，两种解法结论一致。

系统的全响应为：$y(k)=y_{zs}(k)+y_{zi}(k)=\frac{5}{2}+\frac{5}{6}0.2^{k}-\frac{10}{3}0.5^{k}+0.2^{k}=\frac{5}{2}+\frac{11}{6}0.2^{k}-\frac{10}{3}0.5^{k}\quad k\geq0$

（2）由上例可知，先根据特征方程求出系统的单位脉冲响应 $h(k)=5\times0.2^{k}u(k)-5\delta(k)$，再根据离散卷积和，求出系统的零状态响应 $y_{zs}(k)=x(k)*h(k)=\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{6}0.2^{k}-\frac{10}{3}0.5^{k}\right)u(k)$。

根据特征方程的根可知，系统的零输入响应为 $y_{zi}(k)=c0.2^{k}\quad k\geq0$。

因此，系统的全响应 $y(k)=y_{zs}(k)+y_{zi}(k)=\frac{5}{2}+\frac{5}{6}0.2^k-\frac{10}{3}0.5^k+c0.2^k \quad k\ge 0$。已知初始条件 $y(0)=3$，代入后可求得 $c=3$。

因此，系统的零输入响应为 $y_{zi}(k)=3\times 0.2^k \quad k\ge 0$；

系统的全响应为 $y(k)=\frac{5}{2}+\frac{23}{6}0.2^k-\frac{10}{3}0.5^k \quad k\ge 0$。

第四章 连续时间信号与系统的频域分析

4-2 周期锯齿波如图所示，试将其展开成三角形式和指数形式的傅里叶级数。

解：三角形式的傅里叶级数展开式为 $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$。

图示周期信号 $f(t)$ 的周期是 T，在一个周期 $(0,T)$ 内 $f(t)=\frac{A}{T}t$。因此可计算得：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{A}{T}tdt=\frac{A}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 tdt=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{A}{T}t\cos n\omega_0 tdt=\frac{2A}{T^2}\int_0^T t\cos n\omega_0 tdt=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 tdt=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{A}{T}t\sin n\omega_0 tdt=\frac{2A}{T^2}\int_0^T t\sin n\omega_0 tdt=-\frac{2A}{T^2}\frac{T^2}{2n\pi}=-\frac{A}{n\pi}$$

$$\therefore f(t)=\frac{A}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A}{n\pi}\sin n\omega_0 t\right)$$

指数形式的傅里叶级数展开式 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$，其中系数 $F_0=a_0$，$F_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$。将三角形式傅里叶级数系数代入，可得 $F_0=\frac{A}{2}$，$F_n=j\frac{A}{2n\pi}$。

$$\therefore f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}=\frac{A}{2}+j\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A}{2n\pi}e^{jn\omega_0 t}$$

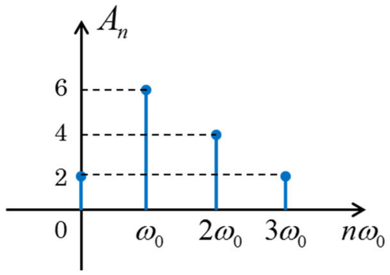
4-3 周期信号 $f(t)=2+6\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin\left(2\omega_0 t+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(3\omega_0 t+\frac{\pi}{6}\right)$，试画出该信号的单边、双边幅度谱和相位谱图。

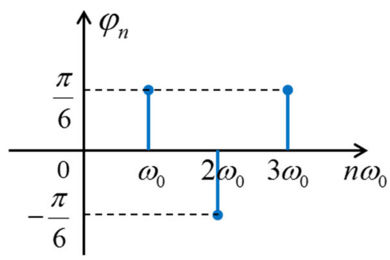
解：先将周期信号写为规范形式。

$$f(t)=2+6\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin\left(2\omega_0 t+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(3\omega_0 t+\frac{\pi}{6}\right)$$

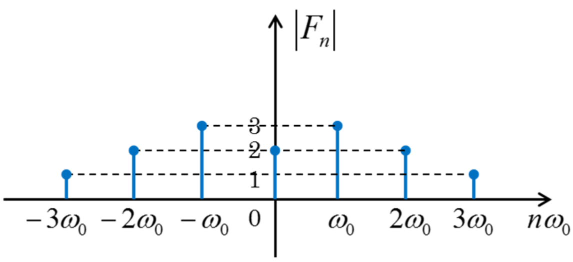
$$=2+6\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{6}\right)+4\cos\left(2\omega_0 t-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(3\omega_0 t+\frac{\pi}{6}\right)$$

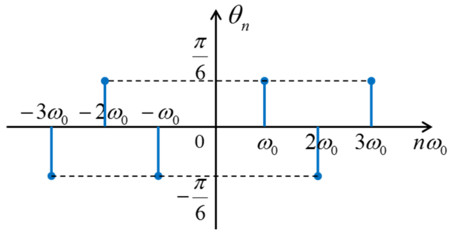
因此，单边频谱为：



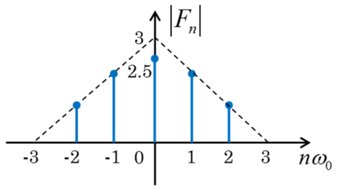


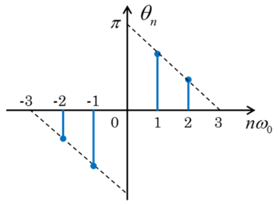
双边频谱为：





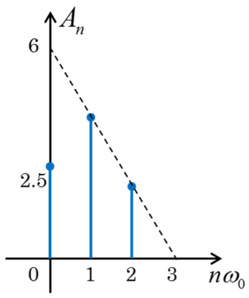
4-5 已知周期信号 $f(t)$ 的双边频谱如图所示，试画出其单边频谱，并写出三角形式的傅里叶级数。

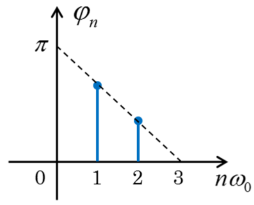




解：已知双边频谱如上，根据指数形式傅里叶级数复系数和三角形式傅里叶系数的关系：

$F_0{=}A_0$，$F_n{=}|F_n|e^{j\theta_n}=\dfrac{1}{2}A_ne^{j\varphi_n}\quad n>0$，可画出单边频谱如下：





对照图示可写出三角形式傅里叶级数为：

$$f(t)=2.5+4\cos\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$$

4-6 求下列信号的傅里叶级数表达式。

（3） $f(t)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$

解：该信号的第一项的周期为 $T_1=2\pi/\dfrac{\pi}{4}=8$，第二项的周期为 $T_2=2\pi/\dfrac{\pi}{3}=6$。

因此信号 $f(t)$ 是周期信号，其周期为 $T=3T_1=4T_2=24$，其角频率为 $\omega_0=2\pi/T=\dfrac{\pi}{12}$。

该信号的三角型傅里叶级数为：$f(t)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$ 或者 $f(t)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}t-\dfrac{\pi}{2}\right)$。

即有 $f(t)=\cos(3\omega_0t)+\sin(4\omega_0t)$ 或者 $f(t)=\cos(3\omega_0t)+\cos\left(4\omega_0t-\dfrac{\pi}{2}\right)$

该信号的三角型傅里叶级数的系数为：$a_3=1,b_3=0,a_4=0,b_4=1$ 或 $A_3=1,\varphi_3=0,A_4=1,\varphi_4=-\dfrac{\pi}{2}$

根据指数型傅里叶级数系数与三角型傅里叶级数系数的关系：$F_n=\dfrac{1}{2}(a_n-jb_n)=\dfrac{1}{2}A_ne^{j\varphi_n}$

可得信号的指数型傅里叶级数的系数为：$F_{-3}=\dfrac{1}{2},F_{-4}=\dfrac{j}{2},F_3=\dfrac{1}{2},F_4=\dfrac{1}{2j}$

因此该信号的指数型傅里叶级数为：

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{-j3\omega_0t}+\frac{j}{2}e^{-j4\omega_0t}+\frac{1}{2}e^{j3\omega_0t}+\frac{1}{2j}e^{j4\omega_0t}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}t}+\frac{j}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}t}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}t}+\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{3}t}$$

（备注：也可以通过对三角型傅里叶级数进行欧拉公式展开得到）

4-7 求下列信号的傅里叶变换。

（1） $f_1(t)=e^{-5t}u(t)$

解：根据单边实指数衰减信号的傅里叶变换公式 $e^{-\alpha t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha+j\omega}$，可得：$e^{-5t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{5+j\omega}$

（2） $f_2(t)=e^{-5(t+1)}u(t)$

解：$f_2(t)=e^{-5(t+1)}u(t)=e^{-5}e^{-5t}u(t)$，$\because e^{-5t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{5+j\omega}$，$\therefore e^{-5}e^{-5t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{e^{-5}}{5+j\omega}$

或者按照定义式求解：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-5(t+1)}e^{-j\omega t}dt=e^{-5}\int_{0}^{\infty}e^{-(j\omega+5)t}dt=\dfrac{e^{-5}}{5+j\omega}$

（3） $f_3(t)=e^{-5(t+1)}u(t+1)$

解：$\because e^{-5t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{5+j\omega}$，根据傅里叶变换的时移性质，可得：$e^{-5(t+1)}u(t+1)\leftrightarrow\dfrac{1}{5+j\omega}e^{j\omega}$

（4） $f_4(t)=e^{5t}u(-t)$

解：$f_4(-t)=e^{-5t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{5+j\omega}$，根据傅里叶变换的比例性，可得 $f_4(t)=e^{5t}u(-t)\leftrightarrow\dfrac{1}{5-j\omega}$

（5） $f_5(t)=e^{j5t}u(t)$

解法一：根据虚指数信号的傅里叶变换公式 $e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow2\pi\delta(\omega-\omega_0)$，可得 $e^{j5t}\leftrightarrow2\pi\delta(\omega-5)$。阶跃信号的傅里叶变换为 $u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$。根据傅里叶变换的频域卷积定理，有：

$$f_5(t)=e^{j5t}\cdot u(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}2\pi\delta(\omega-5)*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]=\pi\delta(\omega-5)+\frac{1}{j(\omega-5)}$$

解法二：阶跃信号的傅里叶变换为 $u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$。根据傅里叶变换的频移性，有

$$f_5(t)=e^{j5t}u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega-5)+\frac{1}{j(\omega-5)}$$

（6） $f_6(t)=e^{-5t}\left[u(t+2)-u(t-1)\right]$

解：$f_6(t)=e^{-5t}\left[u(t+2)-u(t-1)\right]=e^{10}e^{-5(t+2)}u(t+2)-e^{-5}e^{-5(t-1)}u(t-1)$

$\because e^{-5t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{5+j\omega}$，根据傅里叶变换的时移性质，可得：

$e^{-5(t+2)}u(t+2)\leftrightarrow\dfrac{1}{5+j\omega}e^{j2\omega}$，$e^{-5(t-1)}u(t-1)\leftrightarrow\dfrac{1}{5+j\omega}e^{-j\omega}$

$$\therefore f_6(t)=e^{10}e^{-5(t+2)}u(t+2)-e^{-5}e^{-5(t-1)}u(t-1)\leftrightarrow\frac{e^{10}}{5+j\omega}e^{j2\omega}-\frac{e^{-5}}{5+j\omega}e^{-j\omega}=\frac{1}{5+j\omega}\left[e^{2(5+j\omega)}-e^{-(5+j\omega)}\right]$$

（7） $f_7(t)=Sa(5t)$

解法一：根据取样信号的傅里叶变换公式 $f(t)=A\tau Sa\left(\frac{\tau t}{2}\right)\leftrightarrow F(\omega)=2\pi A g_{\tau}(\omega)$，$f_7(t)=Sa(5t)$ 为 $\tau=10, A=\frac{1}{10}$ 时的 $f(t)$，因此令 $F(\omega)$ 中的 $\tau=10, A=\frac{1}{10}$，即可得到 $f_7(t)$ 的傅里叶变换，即 $f_7(t)=Sa(5t)\leftrightarrow 2\pi\cdot\frac{1}{10}g_{10}(\omega)=\frac{\pi}{5}g_{10}(\omega)=\frac{\pi}{5}\left[u(\omega+5)-u(\omega-5)\right]$。

解法二：根据门函数的傅里叶变换公式 $f(t)=Ag_{\tau}(t)\leftrightarrow F(\omega)=A\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，可知令 $\tau=10, A=\frac{1}{10}$，有 $\frac{1}{10}g_{10}(t)\leftrightarrow Sa(5\omega)$。根据傅里叶变换的对称性，可得：

$Sa(5t)\leftrightarrow 2\pi\frac{1}{10}g_{10}(-\omega)=\frac{\pi}{5}g_{10}(\omega)=\frac{\pi}{5}\left[u(\omega+5)-u(\omega-5)\right]$。

（8）$f_8(t)=e^{-2|t|}$

解：根据双边实指数信号的傅里叶变换公式，$e^{-\alpha|t|}\leftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$ 可知：$f_8(t)=e^{-2|t|}\leftrightarrow\frac{4}{4+\omega^2}$

（9）$f_9(t)=\frac{2}{1+t^2}$

解:根据双边实指数信号的傅里叶变换公式,有 $e^{-\alpha|t|}\leftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$。根据傅里叶变换的对称性，可得：$\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}\leftrightarrow 2\pi e^{-\alpha|-\omega|}=2\pi e^{-\alpha|\omega|}$。令 $\alpha=1$，即有 $\frac{2}{1+t^2}\leftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|}$

（10）$f_{10}(t)=te^{-5t}u(t)$

解:根据单边实指数衰减信号的傅里叶变换公式 $e^{-\alpha t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{\alpha+j\omega}$,可得: $e^{-5t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{5+j\omega}$。

根据傅里叶变换的频域微分性质，有 $tf(t)\leftrightarrow j\frac{dF(\omega)}{d\omega}$，因此有：

$$te^{-5t}u(t)\leftrightarrow j\left(\frac{1}{5+j\omega}\right)'=\frac{1}{(5+j\omega)^2}$$

或者用定义去求解：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty}te^{-5t}e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty}te^{-(j\omega+5)t}dt=\frac{-1}{5+j\omega}\left[te^{-(j\omega+5)t}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-(j\omega+5)t}dt\right]=\frac{1}{(5+j\omega)^2}$$

4-8 已知 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，求下列函数的傅里叶变换。

（1）$tf(2t)$

解：已知 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，根据尺度变换性质，有 $f(2t)\leftrightarrow\frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)$。根据频域微分性质 $tf(t)\leftrightarrow j\frac{dF(\omega)}{d\omega}$，有：$tf(2t)\leftrightarrow j\frac{1}{2}\frac{dF\left(\frac{\omega}{2}\right)}{d\omega}$

（2）$(t-3)f(t-3)$

解：已知 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，根据频域微分性质，有 $tf(t)\leftrightarrow j\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$。根据时移性质，有：

$(t-3)f(t-3)\leftrightarrow j\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}e^{-j3\omega}$

（3）$t\dfrac{df(t)}{dt}$

解：已知 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，根据时域微分性质，有 $\dfrac{df(t)}{dt}\leftrightarrow j\omega F(\omega)$。根据频域微分性质

$tf(t)\leftrightarrow j\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$，有 $t\dfrac{df(t)}{dt}\leftrightarrow j\dfrac{d\left[j\omega F(\omega)\right]}{d\omega}=-\left[F(\omega)+\omega\dfrac{d\left[F(\omega)\right]}{d\omega}\right]$

（4）$(t-3)f(2-t)$

解：$(t-3)f(2-t)=tf(2-t)-3f(2-t)=tf\left[-(t-2)\right]-3f\left[-(t-2)\right]$

根据尺度变换性质，$f(-t)\leftrightarrow F(-\omega)$，根据时移性质，$f\left[-(t-2)\right]\leftrightarrow F(-\omega)e^{-j2\omega}$。

根据频域微分性质，$tf\left[-(t-2)\right]\leftrightarrow j\dfrac{d\left[F(-\omega)e^{-j2\omega}\right]}{d\omega}$。

根据线性性质，$3f\left[-(t-2)\right]\leftrightarrow 3F(-\omega)e^{-j2\omega}$

$\therefore (t-3)f(2-t)\leftrightarrow j\dfrac{d\left[F(-\omega)e^{-j2\omega}\right]}{d\omega}-3F(-\omega)e^{-j2\omega}=j\dfrac{dF(-\omega)}{d\omega}e^{-j2\omega}-F(-\omega)e^{-j2\omega}$

（5）$f(-t-3)$

解：$f(-t-3)=f\left[-(t+3)\right]$，可由 $f(t)\xrightarrow{\text{翻转}}f(-t)\xrightarrow{\text{左移3}}f\left[-(t+3)\right]$ 得到。因此其傅里叶变换可通过逐步变换得到：$F(\omega)\to F(-\omega)\to e^{j3\omega}F(-\omega)$。即 $f\left[-(t+3)\right]\leftrightarrow e^{j3\omega}F(-\omega)$。

（6）$(t-2)f\left(\dfrac{t}{2}\right)$

解：$(t-2)f\left(\dfrac{t}{2}\right)=tf\left(\dfrac{t}{2}\right)-2f\left(\dfrac{t}{2}\right)$

根据傅里叶变换的比例性，可得：$f\left(\dfrac{t}{2}\right)\leftrightarrow 2F(2\omega)$

根据傅里叶变换的频域微分，可得：$tf\left(\dfrac{t}{2}\right)\leftrightarrow j\dfrac{d\left[2F(2\omega)\right]}{d\omega}=j2\dfrac{d\left[F(2\omega)\right]}{d\omega}$

根据傅里叶变换的线性性质，可得：$tf\left(\dfrac{t}{2}\right)-2f\left(\dfrac{t}{2}\right)\leftrightarrow j2\dfrac{d\left[F(2\omega)\right]}{d\omega}-4F(2\omega)$

即$(t-2)f\left(\frac{t}{2}\right)\leftrightarrow j2\frac{dF(2\omega)}{d\omega}-4F(2\omega)$

4-9 求下列信号的傅里叶反变换。

（1）$F_1(\omega)=u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$

解：$F_1(\omega)=u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)=g_{2\omega_0}(\omega)$

$\because \tau Sa\left(\frac{\tau t}{2}\right)\leftrightarrow 2\pi g_\tau(\omega)$，$\therefore \frac{\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)\leftrightarrow g_{2\omega_0}(\omega)$，即 $f_1(t)=\frac{\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)$。

（2）$F_2(\omega)=\frac{1}{(8+j\omega)^2}$

解：$\because e^{-8t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{8+j\omega}$，$\therefore te^{-8t}u(t)\leftrightarrow j\frac{d\left(\frac{1}{8+j\omega}\right)}{d\omega}=\frac{1}{(8+j\omega)^2}$，即 $f_2(t)=te^{-8t}u(t)$。

（3）$F_3(\omega)=\frac{e^{-8}}{8+j\omega}$

解：$\because e^{-8t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{8+j\omega}$，$\therefore e^{-8}e^{-8t}u(t)\leftrightarrow\frac{e^{-8}}{8+j\omega}$，即 $f_3(t)=e^{-8(t+1)}u(t)$。

（4）$F_4(\omega)=\frac{-2}{\omega^2}$

解：$\because \operatorname{sgn}(t)\leftrightarrow\frac{2}{j\omega}$，$\therefore t\operatorname{sgn}(t)\leftrightarrow j\frac{d\frac{2}{j\omega}}{d\omega}=-\frac{2}{\omega^2}$，即 $f_4(t)=t\operatorname{sgn}(t)$。

（5）$F_5(\omega)=\frac{j}{\omega}$

解：$\because \operatorname{sgn}(t)\leftrightarrow\frac{2}{j\omega}=\frac{-2j}{\omega}$，$\therefore -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\leftrightarrow\frac{j}{\omega}$，即 $f_5(t)=-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$

（6）$F_6(\omega)=\frac{e^{j\omega}}{8+j\omega}$

解：$\because e^{-8t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{8+j\omega}$，$\therefore e^{-8(t+1)}u(t+1)\leftrightarrow\frac{e^{j\omega}}{8+j\omega}$，即 $f_6(t)=e^{-8(t+1)}u(t+1)$

（7）$F_7(\omega)=\delta(\omega-1)$

解：$\because \frac{1}{2\pi}\leftrightarrow\delta(\omega)$，$\therefore \frac{1}{2\pi}e^{jt}\leftrightarrow\delta(\omega-1)$，即 $f_7(t)=\frac{1}{2\pi}e^{jt}$

（8）$F_8(\omega)=\frac{1}{j\omega-8}$

解：$\because e^{-8t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{8+j\omega}$，$\therefore e^{8t}u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{8-j\omega}$，$\therefore -e^{8t}u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega-8}$，即 $f_8(t)=-e^{8t}u(-t)$。

4-11 利用频移性质，求题图所示信号的频谱。

（a）解：由图示可以看出，信号在$\left(-\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$区间上为余弦函数，余弦函数的周期为$T=\frac{1}{5}$，

因此该信号为$f_1(t)=\cos(10\pi t)g_{\frac{4}{5}}(t)$。设$f(t)=g_{\frac{4}{5}}(t)$，则$f_1(t)=f(t)\cos(10\pi t)$。

根据调制定理，有：$f(t)\cos(\omega_0 t)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)\right]$

根据门函数的傅里叶变换，有$f(t)=g_{\frac{4}{5}}(t)\leftrightarrow F(\omega)=\frac{4}{5}Sa\left(\frac{2\omega}{5}\right)$

$\therefore f_1(t)=f(t)\cos(10\pi t)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[F(\omega+10\pi)+F(\omega-10\pi)\right]=\frac{2}{5}\left[Sa\left(\frac{2}{5}(\omega+10\pi)\right)+Sa\left(\frac{2}{5}(\omega-10\pi)\right)\right]$

（b）解：由图示可以看出，该信号为$f_2(t)=\cos(10\pi t)\Delta_2(t)$。设$f(t)=\Delta_2(t)$，则

$f_1(t)=f(t)\cos(10\pi t)$。

根据调制定理，有：$f(t)\cos(\omega_0 t)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)\right]$

根据三角形脉冲函数的傅里叶变换，有$f(t)=\Delta_2(t)\leftrightarrow F(\omega)=Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$\therefore f_2(t)=f(t)\cos(10\pi t)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[F(\omega+10\pi)+F(\omega-10\pi)\right]=\frac{1}{2}\left[Sa^2\left(\frac{1}{2}(\omega+10\pi)\right)+Sa^2\left(\frac{1}{2}(\omega-10\pi)\right)\right]$

4-12 用时域微积分性质求下列信号的频谱。

（a）解：由图示可以看出，$f_1'(t)=g(t)=u(t)-u(t-1)-\delta(t-1)$。因此其傅里叶变换为：

$G(\omega)=\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]-\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]e^{-j\omega}-e^{-j\omega}$。且$f_1(\infty)=f_1(-\infty)=0$，根据微分冲激法，有：

$$F_1(\omega)=\frac{G(\omega)}{j\omega}+\pi\left[f_1(\infty)+f_1(-\infty)\right]\delta(\omega)=\frac{G(\omega)}{j\omega}$$
$$=\left[\frac{1}{j\omega}\pi\delta(\omega)-\frac{1}{\omega^2}\right]-\left[\frac{1}{j\omega}\pi\delta(\omega)-\frac{1}{\omega^2}\right]e^{-j\omega}-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega}$$
$$=\frac{1}{\omega^2}\left\{\left[-j\omega\pi\delta(\omega)-1\right]-\left[-j\omega\pi\delta(\omega)-1\right]e^{-j\omega}+j\omega e^{-j\omega}\right\}$$
$$=\frac{1}{\omega^2}\left(-1+e^{-j\omega}+j\omega e^{-j\omega}\right)$$

（b）解：由图示可以看出，$f_2'(t)=g(t)=g_2(t)$。因此其傅里叶变换为：$G(\omega)=2Sa(\omega)$。且

$f_2(\infty)=1$，$f_2(-\infty)=-1$，根据微分冲激法，有：

$$F_2(\omega)=\frac{G(\omega)}{j\omega}+\pi\left[f_2(\infty)+f_2(-\infty)\right]\delta(\omega)=\frac{G(\omega)}{j\omega}=\frac{2}{j\omega}Sa(\omega)$$

（c）解：由图示可以看出，$f_3'(t)=g(t)=\delta(t-1)$。因此其傅里叶变换为：$G(\omega)=e^{-j\omega}$。且

$f_3(\infty)=1$，$f_3(-\infty)=0$，根据微分冲激法，有：

$$F_3(\omega)=\frac{G(\omega)}{j\omega}+\pi\left[f_3(\infty)+f_3(-\infty)\right]\delta(\omega)=\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

4-13 用下列方法求题图所示正弦脉冲的频谱。

（1）傅里叶变换的定义

解：根据傅里叶变换的定义式，有：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)e^{-j\omega t}dt$

进行积分变换，可得：

$$F(\omega)=\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)e^{-j\omega t}dt=A\left[-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)e^{-j\omega t}\Big|_0^{\frac{T}{2}}+\frac{-j\omega T}{2\pi}\int_0^{\frac{T}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)e^{-j\omega t}dt\right]$$

$$=A\left[\frac{T}{2\pi}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}}+1\right)+\frac{-j\omega T}{2\pi}\int_0^{\frac{T}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)e^{-j\omega t}dt\right]$$

$$=A\left[\frac{T}{2\pi}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}}+1\right)+\frac{-j\omega T}{2\pi}\left[\frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)e^{-j\omega t}\Big|_0^{\frac{T}{2}}-\frac{-j\omega T}{2\pi}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)e^{-j\omega t}dt\right]\right]$$

$$=A\left[\frac{T}{2\pi}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}}+1\right)+\frac{-j\omega T}{2\pi}\left[\frac{j\omega T}{2\pi}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)e^{-j\omega t}dt\right]\right]$$

$$=A\frac{T}{2\pi}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}}+1\right)+\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)^2F(\omega)$$

因此可得：$F(\omega)=\dfrac{A\frac{T}{2\pi}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}}+1\right)}{1-\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)^2}$

（2）利用微积分性质

解：由图示可知，信号 $f(t)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\left[u(t)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$

因此有：

$$f'(t)=A\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\left[u(t)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]+A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\left[\delta(t)-\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$
$$=A\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\left[u(t)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$f''(t)=-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\left[u(t)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]+A\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\left[\delta(t)-\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$=-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\left[u(t)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]+A\frac{2\pi}{T}\left[\delta(t)+\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

对比 $f(t)$ 和 $f''(t)$ 的时域表达式，有：$f''(t)=-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2f(t)+A\frac{2\pi}{T}\left[\delta(t)+\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$

设 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，则根据傅里叶变换的时域微分性质，有：$f''(t)\leftrightarrow(j\omega)^2F(\omega)$

因此有：$(j\omega)^2F(\omega)=-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2F(\omega)+A\frac{2\pi}{T}\left[1+e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right]$

整理后可得：$F(\omega)=\dfrac{A\dfrac{2\pi}{T}\left[1+e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right]}{-\omega^2+\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2}=\dfrac{A\dfrac{T}{2\pi}\left[1+e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right]}{1-\left(\dfrac{\omega T}{2\pi}\right)^2}$

（3）看作门函数与周期正弦函数的乘积

解：由图示可知，信号 $f(t)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)g_{\frac{T}{2}}\left(t-\frac{T}{4}\right)$，令 $f_1(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$，$f_2(t)=g_{\frac{T}{2}}\left(t-\frac{T}{4}\right)$，

则 $f(t)=Af_1(t)f_2(t)$。设 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，$f_1(t)\leftrightarrow F_1(\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\omega)$，则根据傅里叶变换的卷积性质，有：$F(\omega)=\frac{A}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$。

已知 $\sin(\omega_0 t)\leftrightarrow j\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$，因此有：$F_1(\omega)=j\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{T}\right)-\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}\right)\right]$

已知 $g_\tau(t)\leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，因此有：$F_2(\omega)=\frac{T}{2}Sa\left(\frac{\omega T}{4}\right)e^{-j\omega\frac{T}{4}}$

$$F(\omega)=\frac{A}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)=\frac{A}{2\pi}\cdot j\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{T}\right)-\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}\right)\right]*\left[\frac{T}{2}Sa\left(\frac{\omega T}{4}\right)e^{-j\omega\frac{T}{4}}\right]$$

$$=\frac{jAT}{4}\left\{Sa\left(\frac{\left(\omega+\frac{2\pi}{T}\right)T}{4}\right)e^{-j\left(\omega+\frac{2\pi}{T}\right)\frac{T}{4}}-Sa\left(\frac{\left(\omega-\frac{2\pi}{T}\right)T}{4}\right)e^{-j\left(\omega-\frac{2\pi}{T}\right)\frac{T}{4}}\right\}$$

因此：$$=\frac{jAT}{4}\left\{Sa\left(\frac{(\omega T+2\pi)}{4}\right)e^{-j\left(\frac{T}{4}\omega+\frac{\pi}{2}\right)}-Sa\left(\frac{(\omega T-2\pi)}{4}\right)e^{-j\left(\frac{T}{4}\omega-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}$$

$$=\frac{AT}{4}e^{-j\frac{T}{4}\omega}\left\{Sa\left(\frac{\omega T}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+Sa\left(\frac{\omega T}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{AT}{\pi}e^{-j\frac{T}{4}\omega}\frac{\cos\left(\frac{\omega T}{4}\right)}{1-\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)^2}=\frac{AT}{2\pi}e^{-j\frac{T}{4}\omega}\frac{e^{j\frac{T}{4}\omega}+e^{-j\frac{T}{4}\omega}}{1-\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)^2}=\frac{AT}{2\pi}\frac{1+e^{-j\frac{T}{2}\omega}}{1-\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)^2}$$

4-14 如题图所示信号 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$**，在不求出** $F(\omega)$ **的前提下，求**

（1）$F(0)=F(\omega)\big|_{\omega=0}$

解：$F(0)=F(\omega)\big|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=\frac{3}{2}$

（2）$\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega$

解：$\because f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$，$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\Big|_{t=0}=2\pi f(0)=2\pi$

（3）$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$

解：根据非周期信号的能量公式，信号 $f(t)$ 的能量为： $E=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$ 。

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega=2\pi E=2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt=2\pi\int_{-1}^{0}(t+1)^2 dt+2\pi=\frac{8\pi}{3}$

4-16 某带限信号 $f(t)$ 的最高频率为 150Hz，求：

（1） $f(3t)$ 和 $f\left(\frac{t}{3}\right)$ 的带宽

解：设 $f(t)$ 的频谱密度函数为 $F(\omega)$，则 $f_1(t)=f(3t)\leftrightarrow\frac{1}{3}F\left(\frac{\omega}{3}\right)$， $f_2(t)=f\left(\frac{t}{3}\right)\leftrightarrow 3F(3\omega)$ 。

已知信号 $f(t)$ 的最高频率（带宽）为 $f_m=150Hz$ ，则 $f_{m1}=3f_m=450Hz$ ， $f_{m2}=\frac{1}{3}f_m=50Hz$ 。

（2）对 $f(t)$ 、 $f(3t)$ 和 $f\left(\frac{t}{3}\right)$ 进行时域取样，求奈奎斯特取样率

解：令 $f_0(t)=f(t)$，则 $f_{s0}=2f_m=300Hz$；

令 $f_1(t)=f(3t)$，则 $f_{s1}=2f_{m1}=900Hz$；

令 $f_2(t)=f\left(\frac{t}{3}\right)$，则 $f_{s2}=2f_{m2}=100Hz$ 。

4-17 确定下列信号的奈奎斯特取样率。

（1） $Sa(100t)$

解：$\because \tau Sa\left(\frac{\tau t}{2}\right)\leftrightarrow 2\pi g_\tau(\omega)$，$\therefore Sa(100t)\leftrightarrow\frac{\pi}{100}g_{200}(\omega)$，$\therefore Sa(100t)$ 的带宽为 $\omega_m=100\ rad/s$ 。

其奈奎斯特取样率 $\omega_s=2\omega_m=200\ rad/s$ 或 $f_s=\frac{\omega_s}{2\pi}=\frac{100}{\pi}Hz$ 。

（2） $Sa^2(100t)$

解：先求出 $Sa(100t)$ 的带宽 $\omega_{m1}=100\ rad/s$ 。时域中两个信号相乘，所得信号的带宽为原来两个信号的带宽之和，因此 $Sa^2(100t)$ 的带宽为 $\omega_m=2\omega_{m1}=200\ rad/s$ 。其奈奎斯特取样率 $\omega_s=2\omega_m=400\ rad/s$ 或 $f_s=\frac{\omega_s}{2\pi}=\frac{200}{\pi}\ Hz$ 。

（3） $Sa(100t)*Sa(200t)$

解：$\because \tau Sa\left(\frac{\tau t}{2}\right)\leftrightarrow 2\pi g_\tau(\omega)$，$\therefore Sa(100t)\leftrightarrow\frac{\pi}{100}g_{200}(\omega)$，$Sa(200t)\leftrightarrow\frac{\pi}{200}g_{400}(\omega)$。因此 $Sa(100t)$ 的带宽 $\omega_{m1}=100\ rad/s$ ， $Sa(200t)$ 的带宽 $\omega_{m2}=200\ rad/s$ 。

时域中两个信号卷积，所得信号的带宽为原来两个信号中小的那个带宽，因此 $Sa(100t)*Sa(200t)$ 的带宽为 $\omega_m=\min(\omega_{m1},\omega_{m2})=100\ rad/s$ 。其奈奎斯特取样率

$\omega_s = 2\omega_m = 200\ rad/s$ 或 $f_s = \dfrac{\omega_s}{2\pi} = \dfrac{100}{\pi}\ Hz$ 。

（4） $Sa^5(100t)$

解：先求出 $Sa(100t)$ 的带宽 $\omega_{m1} = 100\ rad/s$ 。时域中两个信号相乘，所得信号的带宽为原来两个信号的带宽之和，因此 $Sa^5(100t)$ 的带宽为 $\omega_m = 5\omega_{m1} = 500\ rad/s$ 。其奈奎斯特取样率 $\omega_s = 2\omega_m = 1000\ rad/s$ 或 $f_s = \dfrac{\omega_s}{2\pi} = \dfrac{500}{\pi}\ Hz$ 。

（5） $Sa(100t) + Sa^2(60t)$

解：$\because \tau Sa\left(\dfrac{\tau t}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi g_\tau(\omega)$，$\therefore Sa(100t) \leftrightarrow \dfrac{\pi}{100} g_{200}(\omega)$，$Sa(60t) \leftrightarrow \dfrac{\pi}{60} g_{120}(\omega)$。因此 $Sa(100t)$ 的带宽 $\omega_{m1} = 100\ rad/s$ ， $Sa^2(60t)$ 的带宽 $\omega_{m2} = 2\times 60\ rad/s = 120\ rad/s$ 。

时域中两个信号相加，所得信号的带宽应为原来两个信号中大的那个带宽。因此 $Sa(100t) + Sa^2(60t)$ 的带宽为 $\omega_m = \max(\omega_{m1}, \omega_{m2}) = 120\ rad/s$ 。其奈奎斯特取样率 $\omega_s = 2\omega_m = 240\ rad/s$ 或 $f_s = \dfrac{\omega_s}{2\pi} = \dfrac{120}{\pi}\ Hz$ 。

4-20 某系统方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 3x(t)$，求

（1）频域系统函数

解：对方程两边求傅里叶变换，可得频域系统函数 $H(\omega) = \dfrac{j\omega + 3}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$

（2）单位冲激响应

解：频域系统函数 $H(\omega) = \dfrac{j\omega + 3}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} = \dfrac{j\omega + 3}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} = \dfrac{2}{j\omega + 1} - \dfrac{1}{j\omega + 2}$

对其求傅里叶反变换，可得单位冲激响应 $h(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$

（3）输入 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 时的零状态响应

解：方法一： $y(t) = x(t) * h(t) = e^{-t}u(t) * \left[2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)\right] = 2te^{-t}u(t) - e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$

方法二： $x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega}$ ，因此 $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega} \times \dfrac{j\omega + 3}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)}$

$$\therefore Y(\omega) = \frac{j\omega + 3}{(j\omega + 1)^2 (j\omega + 2)} = \frac{2}{(j\omega + 1)^2} + \frac{-1}{j\omega + 1} + \frac{1}{j\omega + 2}$$

求其反变换可得： $y(t) = 2te^{-t}u(t) - e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$

4-24 如题图所示系统中，带通滤波器的频率特性如图，$f(t)=Sa(\pi t)$，$s(t)=\cos(20t)$，求 $y(t)$。

解：根据 $\tau Sa\left(\frac{\tau}{2}t\right)\leftrightarrow 2\pi g_{\tau}(\omega)$，$Sa(\pi t)\leftrightarrow g_{2\pi}(\omega)$。设图中乘法器后的输出为 $f_A(t)$，则有 $f_A(t)=f(t)s(t)=Sa(\pi t)\cos 20t$。由调制定理可知：$F_A(\omega)=\frac{1}{2}\left[g_{2\pi}(\omega+20)+g_{2\pi}(\omega-20)\right]$。

因此 $Y(\omega)=F_A(\omega)H(\omega)=\frac{1}{2}\left[g_{2\pi}(\omega+20)+g_{2\pi}(\omega-20)\right]\cdot H(\omega)=\frac{1}{2}\left[g_4(\omega+20)+g_4(\omega-20)\right]$

设 $F_B(\omega)=g_4(\omega)$，根据 $\tau Sa\left(\frac{\tau}{2}t\right)\leftrightarrow 2\pi g_{\tau}(\omega)$，则 $f_B(t)=\frac{2}{\pi}Sa(2t)$。

已知 $Y(\omega)=\frac{1}{2}\left[g_4(\omega+20)+g_4(\omega-20)\right]$，有 $y(t)=f_B(t)\cos 20t=\frac{2}{\pi}Sa(2t)\cos 20t$。

4-25 某系统频域系统函数 $H(\omega)=\frac{1-j\omega}{1+j\omega}$。**（1）求输入为** $f_1(t)=\cos 2t$ **时系统的输出** $y(t)$。

解法一：

$$Y(\omega)=F_1(\omega)H(\omega)=\pi\left[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)\right]\cdot\frac{1-j\omega}{1+j\omega}=\pi\left[\frac{1+j2}{1-j2}\delta(\omega+2)+\frac{1-j2}{1+j2}\delta(\omega-2)\right]$$

$$=\pi\left[\left(-\frac{3}{5}+j\frac{4}{5}\right)\delta(\omega+2)+\left(-\frac{3}{5}-j\frac{4}{5}\right)\delta(\omega-2)\right]$$

$$=-\frac{3}{5}\pi\left[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)\right]+j\frac{4}{5}\pi\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$$

$$\therefore y_1(t)=-\frac{3}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\sin 2t$$

解法二：由正弦信号激励线性时不变系统的响应知，当激励为 $x(t)=A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$，响应 $y(t)=A_n\left|H(n\omega_0)\right|\cos(n\omega_0 t+\varphi_n+\theta_n)$。因此响应可写为：$y_1(t)=\left|H(2)\right|\cos(2t+\theta_2)$。

已知 $H(\omega)=\frac{1-j\omega}{1+j\omega}$，$\therefore H(2)=\frac{1-j2}{1+j2}=\frac{-3-j4}{5}$，$\therefore\left|H(2)\right|=1$，$\tan\theta_2=-\frac{4}{5}/\left(-\frac{3}{5}\right)$（注意$\theta_2$的象限）

$$\therefore y_1(t)=\cos(2t+\theta_2)=-\frac{3}{5}\cos 2t-\sin 2t\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\sin 2t$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

5-1 求下列信号的拉式变换。

（1）$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s+2}$

（2）$f(t)=e^{-2t}u(t-1)=e^{-2}e^{-2(t-1)}u(t-1) \leftrightarrow e^{-2}\cdot\dfrac{1}{s+2}\cdot e^{-s}=\dfrac{e^{-s-2}}{s+2}$，时移性质

（3）$f(t)=e^{-2(t-1)}u(t)=e^{2}e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{e^{2}}{s+2}$

（4）$f(t)=e^{-2(t-1)}u(t-1) \leftrightarrow \dfrac{e^{-s}}{s+2}$，时移性质

5-3 已知 $f(t) \leftrightarrow F(s)$，求下列信号的拉式变换。

（1）$e^{-\frac{t}{a}}f\left(\dfrac{t}{a}\right)$

解：第一种思路：$f(t) \to e^{-t}f(t) \to e^{-\frac{t}{a}}f\left(\dfrac{t}{a}\right)$，拉式变换 $F(s) \to F(s+1) \to aF(as+1)$

第二种：$f(t) \to f\left(\dfrac{t}{a}\right) \to e^{-\frac{t}{a}}f\left(\dfrac{t}{a}\right)$，$F(s) \to aF(as) \to aF\left(a\left(s+\dfrac{1}{a}\right)\right)=aF(as+1)$

（2）$e^{-at}f\left(\dfrac{t}{a}\right)$

解：$f(t) \to f\left(\dfrac{t}{a}\right) \to e^{-at}f\left(\dfrac{t}{a}\right)$，$F(s) \to aF(as) \to aF(a(s+a))=aF(as+a^{2})$

（3）$e^{-\frac{t}{a}}f(at)$

解：$f(t) \to f(at) \to e^{-\frac{t}{a}}f(at)$，$F(s) \to \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right) \to \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s+\frac{1}{a}}{a}\right)=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}+\dfrac{1}{a^{2}}\right)$

（4）$e^{-at}f(at)$

解：$f(t) \to f(at) \to e^{-at}f(at)$，$F(s) \to \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right) \to \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s+a}{a}\right)=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}+1\right)$

或 $f(t) \to e^{-t}f(t) \to e^{-at}f(at)$，$F(s) \to F(s+1) \to \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}+1\right)$

5-4 已知 $f(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s^{2}+5s+6}$，求下列信号的拉式变换。

（1）$f(2t-4)$

解：$f(t-4)u(t-4) \leftrightarrow e^{-4s}F(s)=\dfrac{e^{-4s}}{s^{2}+5s+6}$，时移性

$$f(2t-4)u(2t-4) \leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{e^{-4\left(\frac{s}{2}\right)}}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+5\left(\frac{s}{2}\right)+6}=\frac{2e^{-2s}}{s^2+10s+24}$$，比例性

（2）$f(t)\sin t$

解：根据调制定理，$f(t)\sin t \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[F(s-j)-F(s+j)\right]$，因此有：

$$\frac{1}{2j}\left[F(s-j)-F(s+j)\right]=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(s-j)^2+5(s-j)+6}-\frac{1}{(s+j)^2+5(s+j)+6}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(s-j+2)(s-j+3)}-\frac{1}{(s+j+2)(s+j+3)}\right]$$

$$=\frac{(s+j+2)(s+j+3)-(s-j+2)(s-j+3)}{2j\left[(s+2)^2+1\right]\left[(s+3)^2+1\right]}$$

$$=\frac{2s+5}{\left[(s+2)^2+1\right]\left[(s+3)^2+1\right]}$$

（3）$\int_0^t f(\tau)d\tau$

解：由时域积分性质得到：$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}=\frac{1}{s(s^2+5s+6)}$

5-5 求下列拉式变换式对应的原函数的初值和终值。

（1）$\frac{s^2+8s+10}{s^2+5s+4}$

解：$F(s)=\frac{s^2+8s+10}{s^2+5s+4}$为假分式，用长除法将其分解为：$F(s)=1+\frac{3s+6}{s^2+5s+4}$

因此其原函数的初值为：$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{3s+6}{s^2+5s+4}=3$

$F(s)=\frac{s^2+8s+10}{s^2+5s+4}=\frac{s^2+8s+10}{(s+4)(s+1)}$，其极点为-1、-4，均位于 s 平面的左半平面，故 $f(\infty)$ 存在，$f(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot F(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{s^2+8s+10}{s^2+5s+4}=0$。

（2）$\frac{2s+3}{s^3+2s^2+5s}$

解：$F(s)=\frac{2s+3}{s^3+2s^2+5s}$为真分式，其原函数的初值为：$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{2s+3}{s^3+2s^2+5s}=0$

$F(s)=\frac{2s+3}{s^3+2s^2+5s}=\frac{2s+3}{s\left[(s+1)^2+4\right]}=\frac{2s+3}{s(s+1+2j)(s+1-2j)}$，其极点位于坐标原点和左半平面，

故 $f(\infty)$ 存在，$f(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot F(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{2s+3}{s^3+2s^2+5s}=\frac{3}{5}$。

（3）$\dfrac{5s^2+1}{(s+1)(s^2-6s+10)}$

解：$F(s)=\dfrac{5s^2+1}{(s+1)(s^2-6s+10)}$为真分式，其原函数的初值为：

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{5s^2+1}{(s+1)(s^2-6s+10)}=0$$

$F(s)=\dfrac{5s^2+1}{(s+1)(s^2-6s+10)}=\dfrac{5s^2+1}{(s+1)(s-3-j)(s-3+j)}$，其极点为-1、$3-j$、$3+j$，后两个极点位于右半平面，故$f(\infty)$不存在。

（4）$\dfrac{3s}{s^2+5s+6}$

解：$F(s)=\dfrac{3s}{s^2+5s+6}$为真分式，其原函数的初值为：$f(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}s\cdot\dfrac{3s}{s^2+5s+6}=3$

$F(s)=\dfrac{3s}{s^2+5s+6}=\dfrac{3s}{(s+2)(s+3)}$，其极点为-2、-3，极点均位于左半平面，故$f(\infty)$存在，

$f(\infty)=\lim\limits_{s\to0}s\cdot F(s)=\lim\limits_{s\to0}s\cdot\dfrac{3s}{s^2+5s+6}=0$。

5-6 利用拉式变换的性质，求下列拉式变换的原函数。

（1）$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$

解：根据简单信号的拉式变换，可知$\dfrac{a}{s^2+a^2}\leftrightarrow\sin(at)u(t)$。

由复频域微分性：$\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{a}{s^2+a^2}\right)=\dfrac{-2as}{(s^2+a^2)^2}\leftrightarrow -t\sin(at)u(t)$

由线性特性：$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\leftrightarrow\dfrac{1}{2a}t\sin(at)u(t)$

（2）$\dfrac{e^{-sT}}{(s+1)^2}$

解：根据简单信号的拉式变换，可知$\dfrac{1}{s^2}\leftrightarrow tu(t)$。

根据频移性：$\dfrac{1}{(s+1)^2}\leftrightarrow e^{-t}tu(t)$

根据时移性：$\dfrac{e^{-sT}}{(s+1)^2}\leftrightarrow(t-T)e^{-t+T}u(t-T)$

（3）$\dfrac{s}{\left(s^2-a^2\right)^2}$

解：根据简单信号的拉式变换，可知$\dfrac{a}{s^2-a^2}\leftrightarrow sh(at)u(t)$。

由频域微分性：$\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{a}{s^2-a^2}\right)=\dfrac{-2as}{\left(s^2-a^2\right)^2}\leftrightarrow -tsh(at)u(t)$

由线性特性：$\dfrac{s}{\left(s^2-a^2\right)^2}\leftrightarrow \dfrac{1}{2a}tsh(at)u(t)$

（4）$\dfrac{2}{(s+a)^3}$

解：根据简单信号的拉式变换，可知$\dfrac{1}{s}\leftrightarrow u(t)$。

根据频域微分特性：$-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s}\right)=\dfrac{1}{s^2}\leftrightarrow tu(t)$，$-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2}\right)=\dfrac{2}{s^3}\leftrightarrow t^2u(t)$

根据频移特性：$\dfrac{2}{(s+a)^3}\leftrightarrow e^{-at}t^2u(t)$

（5）$\dfrac{4}{\left(s^2+1\right)^2}$

解：根据简单信号的拉式变换，可知$\cos tu(t)\leftrightarrow \dfrac{s}{s^2+1}$，$t\cos tu(t)\leftrightarrow -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+1}\right)=\dfrac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}$，

$\sin tu(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{s^2+1}$。

而$F(s)=\dfrac{4}{\left(s^2+1\right)^2}=-2\cdot\dfrac{s^2-1-s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}=-2\cdot\dfrac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}+2\cdot\dfrac{s^2+1}{\left(s^2+1\right)^2}=-2\cdot\dfrac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}+2\cdot\dfrac{1}{s^2+1}$

因此$\dfrac{4}{\left(s^2+1\right)^2}\leftrightarrow -2t\cos tu(t)+2\sin tu(t)$

（6）$\dfrac{1}{s+1}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-2s}}$

解：根据周期信号的拉式变换可知，其拉式变换等于第一个周期的信号拉式变换乘以周期因子$\dfrac{1}{1-e^{-Ts}}$，$\dfrac{1}{1-e^{-2s}}$表示周期为 2。而根据简单信号的拉式变换，$e^{-t}u(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{s+1}$。因此，

$\dfrac{1}{s+1}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-2s}}\leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}e^{-(t-2n)}u(t-2n)$

5-7 用部分分式展开法求下列函数的拉式变换。

（1）$\dfrac{4s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

解：原式为真分式，可表示为：$F(s)=\dfrac{4s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s+2}+\dfrac{C}{s+3}$

用遮挡法求出各系数：$A=F(s)(s+1)\big|_{s=-1}=\dfrac{4s+6}{(s+2)(s+3)}\bigg|_{s=-1}=1$，

$B=F(s)(s+2)\big|_{s=-2}=\dfrac{4s+6}{(s+1)(s+3)}\bigg|_{s=-2}=2$，$C=F(s)(s+3)\big|_{s=-3}=\dfrac{4s+6}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-3}=-3$，

因此，原式 $F(s)=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}-\dfrac{3}{s+3}\leftrightarrow\left(e^{-t}+2e^{-2t}-3e^{-3t}\right)u(t)$

（2）$\dfrac{2s+3}{s^2+2s+10}$

解：原式为真分式，可表示为：$F(s)=\dfrac{2s+3}{(s+1)^2+9}=\dfrac{2(s+1)}{(s+1)^2+3^2}+\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{(s+1)^2+3^2}$

根据正余弦信号的拉式变换：$\sin(\omega_0 t)u(t)\leftrightarrow\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2},\cos(\omega_0 t)u(t)\leftrightarrow\dfrac{s}{s^2+\omega_0{}^2}$，以及拉式变换的频移性质 $f(t)e^{s_0 t}\leftrightarrow F(s-s_0)$，可求得：

$$\frac{2s+3}{s^2+2s+10}=\frac{2s+3}{(s+1)^2+3^2}\leftrightarrow 2e^{-t}\cos(3t)u(t)+\frac{1}{3}e^{-t}\sin(3t)u(t)=\left[2\cos(3t)+\frac{1}{3}\sin(3t)\right]e^{-t}u(t)$$

（3）$\dfrac{s^3+6s^2+6s}{s^2+6s+8}$

解：原式为假分式，要先进行长除法，分解为多项式和真分式的和，可表示为：

$F(s)=\dfrac{s^3+6s^2+6s}{s^2+6s+8}=s+\dfrac{-2s}{s^2+6s+8}=s+F_1(s)$，则有：$F_1(s)=\dfrac{-2s}{(s+2)(s+4)}=\dfrac{A}{s+2}+\dfrac{B}{s+4}$

用遮挡法可求出：$A=F_1(s)(s+2)\big|_{s=-2}=\dfrac{-2s}{s+4}\bigg|_{s=-2}=2$，$B=F_1(s)(s+4)\big|_{s=-4}=\dfrac{-2s}{s+2}\bigg|_{s=-4}=-4$

因此，原式 $F(s)=s+F_1(s)=s+\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{-4}{s+4}\leftrightarrow\delta'(t)+2e^{-2t}u(t)-4e^{-4t}u(t)$

（4）$\dfrac{2s+4}{s\left(s^2+4\right)}$

解：原式为真分式，有一对共轭单复根，可表示为：$F(s)=\dfrac{2s+4}{s\left(s^2+4\right)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{Bs+C}{s^2+4}$。

用遮挡法可求出：$A=F(s)s\big|_{s=0}=\dfrac{2s+4}{s^2+4}\bigg|_{s=0}=1$，则原式为 $F(s)=\dfrac{2s+4}{s\left(s^2+4\right)}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{Bs+C}{s^2+4}$。

令 $s=1$，代入上式，可知 $F(s)=\frac{6}{5}=1+\frac{B+C}{5}$，即 $B+C=1$。

令 $s=2$，代入上式，可知 $F(s)=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{2B+C}{8}$，即 $2B+C=0$。

两式联立，可求得：$B=-1$，$C=2$。即原式为 $F(s)=\frac{2s+4}{s(s^2+4)}=\frac{1}{s}+\frac{-s+2}{s^2+4}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}+\frac{2}{s^2+4}$

因此有：$\frac{2s+4}{s(s^2+4)}\leftrightarrow(1-\cos 2t+\sin 2t)u(t)$

（5）$\frac{2}{(s^2+1)(s+1)}$

解：原式为真分式，有一对共轭单复根，可表示为：$F(s)=\frac{2}{(s^2+1)(s+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$。

用遮挡法可求出：$A=F(s)(s+1)\big|_{s=-1}=\frac{2}{s^2+1}\Big|_{s=-1}=1$，则原式为 $F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$。

令 $s=1$，代入上式，可知 $F(s)=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{B+C}{2}$，即 $B+C=0$。

令 $s=0$，代入上式，可知 $F(s)=2=1+C$，即 $C=1$。

两式联立，可求得：$B=-1$，$C=1$。

即原式为 $F(s)=\frac{2}{(s^2+1)(s+1)}=\frac{1}{s+1}+\frac{-s+1}{s^2+1}=\frac{1}{s+1}+\frac{-s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}$

因此有：$\frac{2}{(s^2+1)(s+1)}\leftrightarrow\left(e^{-t}-\cos t+\sin t\right)u(t)$

（6）$\frac{1}{s^2(s+1)^3}$

解：原式为真分式，有一个二重根 $s_1=0$ 和一个三重根 $s_2=-1$，因此原式可以展开为：

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)^3}=\frac{k_{11}}{s^2}+\frac{k_{12}}{s}+\frac{k_{21}}{(s+1)^3}+\frac{k_{22}}{(s+1)^2}+\frac{k_{23}}{s+1}$$

利用遮挡法求 k_{11},k_{21}：$k_{11}=F(s)s^2\big|_{s=0}=\frac{1}{(s+1)^3}\Big|_{s=0}=1$，$k_{21}=F(s)(s+1)^3\big|_{s=-1}=\frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1}=1$

因此有：$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)^3}=\frac{1}{s^2}+\frac{k_{12}}{s}+\frac{1}{(s+1)^3}+\frac{k_{22}}{(s+1)^2}+\frac{k_{23}}{s+1}$

令 $s=1$，代入上式，可知 $F(s)=\frac{1}{8}=1+k_{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}k_{22}+\frac{1}{2}k_{23}$，即 $4k_{12}+k_{22}+2k_{23}=-4$。

令 $s=-2$，代入上式，可知 $F(s)=-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}k_{12}-1+k_{22}-k_{23}$，即 $k_{12}-2k_{22}+2k_{23}=-1$。

令 $s=-3$，代入上式，可知 $F(s)=-\frac{1}{72}=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}k_{12}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}k_{22}-\frac{1}{2}k_{23}$，即 $4k_{12}-3k_{22}+6k_{23}=0$。

联立上述三式，可求得：$k_{12}=-3,k_{22}=2,k_{23}=3$

因此有：$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)^3}=\frac{1}{s^2}+\frac{-3}{s}+\frac{1}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{3}{s+1}\leftrightarrow\left(t-3+\frac{1}{2}t^2e^{-t}+2te^{-t}+3e^{-t}\right)u(t)$

注意：$\frac{1}{(s+1)^3}\leftrightarrow\frac{1}{2}t^2e^{-t}u(t)$ 的变换中，拉式变换复频域微分时的求导产生的系数变化。

5-9 求下列函数的拉式反变换。

（1）$\frac{2+e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+4}$

解：原式 $=\frac{2}{(s-1)^2+4}+\frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+4}$，根据简单信号的拉式变换，可知 $\sin 2tu(t)\leftrightarrow\frac{2}{s^2+4}$。

对第一项，根据频移性，有 $e^t\sin 2tu(t)\leftrightarrow\frac{2}{(s-1)^2+4}$。

对第二项，根据时移性，有 $\sin 2(t-1)u(t-1)\leftrightarrow\frac{2e^{-s}}{s^2+4}$

根据频移性，有 $e^t\sin 2(t-1)u(t-1)\leftrightarrow\frac{2e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+4}$

因此 $\frac{2+e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+4}==\frac{2}{(s-1)^2+4}+\frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+4}\leftrightarrow e^t\sin 2tu(t)+\frac{1}{2}e^t\sin 2(t-1)u(t-1)$

（2）$\frac{1+e^{-s}+e^{-2s}}{s+1}$

解：原式 $=\frac{1}{s+1}+\frac{e^{-s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s+1}$，根据简单信号的拉式变换，可知 $\frac{1}{s+1}\leftrightarrow e^{-t}u(t)$，根据时移性，

有：$\frac{1}{s+1}+\frac{e^{-s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s+1}\leftrightarrow e^{-t}u(t)+e^{-(t-1)}u(t-1)+e^{-(t-2)}u(t-2)$

5-10 用拉式变换法求解下列微分方程。

（2）$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=x'(t)+x(t),y(0^-)=2,y'(0^-)=1,x(t)=e^{-t}u(t)$

解：对上述微分方程取拉式变换，得：

$\left[s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)\right]+4\left[sY(s)-y(0^-)\right]+4Y(s)=sX(s)+X(s)$

整理后有，$Y(s)=\frac{s+1}{s^2+4s+4}X(s)+\frac{y(0^-)s+y'(0^-)+4y(0^-)}{s^2+4s+4}$

将 $X(s)=\frac{1}{s+1}$，$y(0^-)=2$，$y'(0^-)=1$代入上式，有：

$$Y(s)=\frac{s+1}{s^2+4s+4}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{2s+1+4\times2}{s^2+4s+4}=\frac{2(s+5)}{(s+2)^2}=\frac{A}{(s+2)^2}+\frac{B}{(s+2)}$$

用遮挡法求系数 A，$A=(s+2)^2Y(s)\Big|_{s=-2}=2(s+5)\Big|_{s=-2}=6$

用对应项系数相等法求 B，令 $s=0$，则 $\frac{2\times5}{2^2}=\frac{6}{2^2}+\frac{B}{2}$，即 $B=2$

因此有：$Y(s)=\frac{6}{(s+2)^2}+\frac{2}{(s+2)}$，$y(t)=6te^{-2t}+2e^{-2t}=(2+6t)e^{-2t}$，$t\geq0$。

5-14 已知系统的输入 $x(t)=(1-e^{-t})u(t)$，零状态响应为 $y_{zs}(t)=\left(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{t}{2}e^{-2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}\right)u(t)$，求系统函数 $H(s)$。

解：根据系统函数的定义，$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$。

已知 $x(t)=(1-e^{-t})u(t)$，因此 $X(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s(s+1)}$。

已知 $y_{zs}(t)=\left(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{t}{2}e^{-2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}\right)u(t)$，因此 $Y(s)=\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+2}\right)'+\frac{3}{4}\frac{1}{s+2}=\frac{4s^2+15s+12}{4(s+1)(s+2)^2}$

因此，$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{4s^2+15s+12}{4(s+1)(s+2)^2}\cdot s(s+1)=\frac{4s^3+15s^2+12s}{4(s+2)^2}$

5-15 已知系统的系统函数 $H(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}$，输入 $x(t)=e^{-3t}u(t)$，初始状态 $y(0^-)=1$，$y'(0^-)=1$，求零输入响应和零状态响应。

解：由系统函数可知系统的微分方程为：$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x''(t)+4x'(t)+5x(t)$

对上述方程进行拉式变换，可得：
$$\begin{aligned}&\left[s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)\right]+3\left[sY(s)-y(0^-)\right]+2Y(s)\\&=s^2X(s)+4sX(s)+5X(s)\end{aligned}$$

整理后有：$Y(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}X(s)+\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+3y(0^-)}{s^2+3s+2}$，将 $X(s)=\frac{1}{s+3}$，$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=1$代入，可得：

$$Y(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{s+1+3}{s^2+3s+2}=\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)+\left(\frac{3}{s+1}-\frac{2}{s+2}\right)$$

因此，有 $y_{zs}(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}+e^{-3t}\right)u(t)$　　$y_{zi}(t)=3e^{-t}-2e^{-2t},t\geq0$

5-16 系统的系统函数$H(s)=H_0\frac{s+3}{s^2+3s+2}$，$H_0$为未知常数，已知该系统的阶跃响应的终值为 1，求该系统对何种激励的零状态响应为$\left(1-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-2t}\right)u(t)$。

解：

（1）已知系统的阶跃响应的终值为 1。

设激励为阶跃信号，即 $x(t)=u(t)$，则有 $X(s)=\frac{1}{s}$。则阶跃响应为 $Y(s)=X(s)\cdot H(s)=\frac{1}{s}\cdot H_0\frac{s+3}{s^2+3s+2}$。

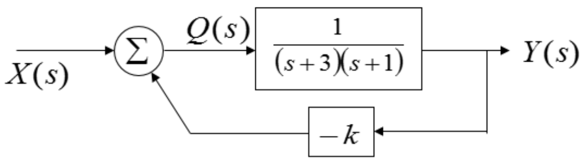
阶跃响应的极点为$s_1=0,s_2=-1,s_3=-2$，均位于 s 平面的左半平面，因此由终值定理可知，$\lim_{s\to 0}sY(s)=\lim_{s\to 0}s\left[\frac{1}{s}\cdot H_0\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right]=\frac{3}{2}H_0=1$，因此$H_0=\frac{2}{3}$，$H(s)=\frac{2}{3}\frac{s+3}{s^2+3s+2}$。

（2）设激励为$x(t)$，则其零状态响应的拉式变换为$Y_{zs}(s)=X(s)\cdot H(s)$。

已知$y_{zs}(t)=\left(1-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-2t}\right)u(t)$，因此$Y_{zs}(s)=\frac{1}{s}-\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+2}=\frac{\frac{2}{3}s+2}{s(s+1)(s+2)}$

因此，有：$X(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{H(s)}=\frac{1}{s}\leftrightarrow x(t)=u(t)$。

5-18 如题图所示系统，求系统稳定时 k 的取值范围。



解：如图设辅助函数$Q(s)$，则由加法器可知：$Q(s)=X(s)-kY(s)$。

由图示还可以得到：$Q(s)\cdot\frac{1}{(s+1)(s+3)}=Y(s)$。联合上述两式，消去辅助函数$Q(s)$后可得：

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2+4s+3+k}$$

$H(s)$的分母是二次多项式，当系统稳定时，其每一项的系数均应为正实数，因此$3+k>0$。

即$k>-3$时，系统稳定。

5-20 试画出下列系统函数表示的系统模拟图，分别要求直接模拟、并联模拟、串联模拟。

（1）$\frac{5s+10}{s^2+7s+12}$

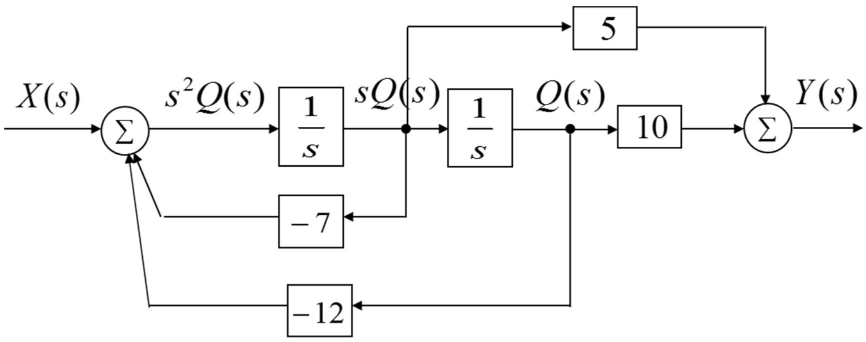
解：1）$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{5s+10}{s^2+7s+12}$，所以有$s^2Y(s)+7sY(s)+12Y(s)=5sX(s)+10X(s)$。

设辅助函数$Q(s)$，则上式可写为两个方程：

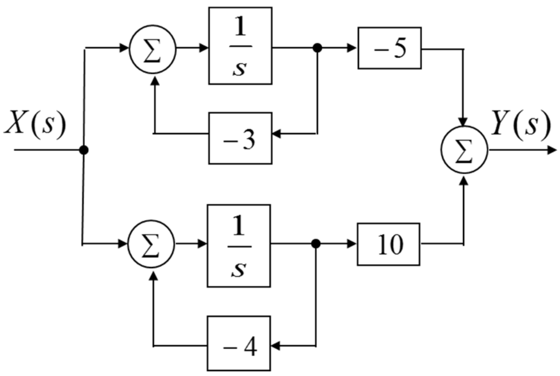
$s^2Q(s)+7sQ(s)+12Q(s)=X(s) \Rightarrow s^2Q(s)=X(s)-7sQ(s)-12Q(s)$

$Y(s)=5sQ(s)+10Q(s)$

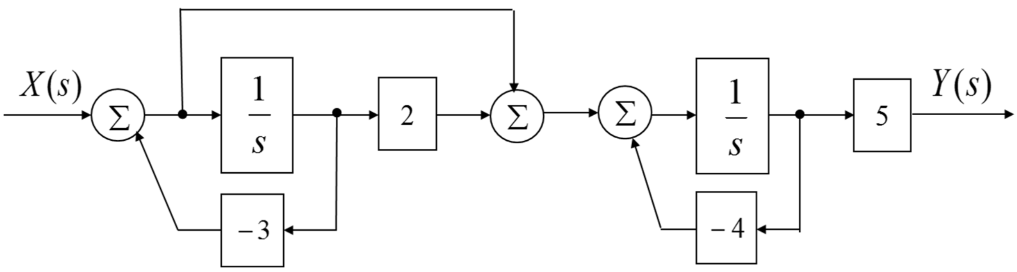
由上述两个方程可以画出直接模拟图为：



2） $H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{5s+10}{s^2+7s+12}=\frac{-5}{s+3}+\frac{10}{s+4}$，可画出并联模拟图为：



3） $H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{5s+10}{s^2+7s+12}=\frac{s+2}{s+3}\cdot\frac{5}{s+4}$，可画出串联模拟图为：

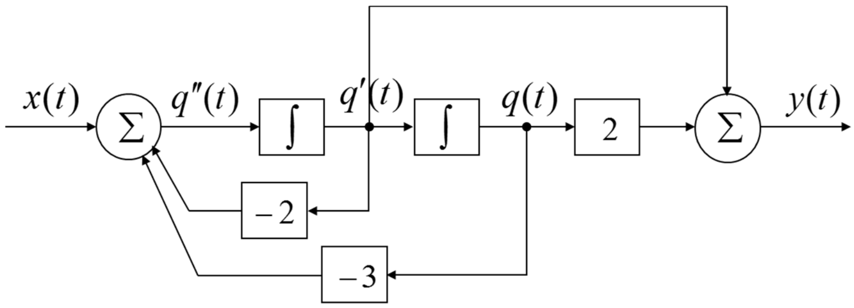


5-21 已知微分方程如下，画出其直接模拟图。

（1） $y''(t)+2y'(t)+3y(t)=x'(t)+2x(t)$

解：设辅助函数 $q(t)$，则有 $q''(t)+2q'(t)+3q(t)=x(t) \Rightarrow q''(t)=x(t)-2q'(t)-3q(t)$，

$y(t)=q'(t)+2q(t)$。由上述两个方程可画出直接模拟图为：



x(t)
q''(t)
q'(t)
q(t)
y(t)
2
−2
−3

第六章 离散时间信号与系统的变换域分析

6-1 用定义求下列序列的 Z 变换。

（5）$\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[u(k)-u(k-3)\right]$

解：

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[u(k)-u(k-3)\right]\right\}z^{-k}=\sum_{k=0}^{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-k}\right]=\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{1}{2z}\right)^k=\left(\frac{1}{2z}\right)^0+\left(\frac{1}{2z}\right)^1+\left(\frac{1}{2z}\right)^2=1+\frac{1}{2z}+\left(\frac{1}{2z}\right)^2$$

（8）$\{2\quad \underset{\_}{1}\quad 3\}$

解： $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}=f(0)z^0+f(1)z^{-1}=1+3z^{-1}$

6-3 用 Z 变换性质求下列序列的 Z 变换。

（2）$(k-1)u(k-1)$

解：$\because\ ku(k)\leftrightarrow\frac{z}{(z-1)^2}$，$\therefore\ (k-1)u(k-1)\leftrightarrow z^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)=\frac{1}{(z-1)^2}$ 移序性

（4）$\sum_{n=0}^{k}n^2$

解：$\because\ k^2u(k)\leftrightarrow\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$，$\therefore\ \sum_{k=0}^{k}n^2\leftrightarrow\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}=\frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4}$ 序列求和

（5）$(k-1)^2u(k-1)$

解：$\because\ k^2u(k)\leftrightarrow\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$，$\therefore\ (k-1)^2u(k-1)\leftrightarrow\frac{1}{z}\cdot\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}=\frac{z+1}{(z-1)^3}$ 因果序列右移

6-4 求下列各 $F(z)$ 的反变换 $f(k)$。

（2）$F(z)=\frac{z}{(z-1)(z^2-1)}$

解：$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z^2-1)}=\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}=\frac{k_1}{(z-1)^2}+\frac{k_2}{z-1}+\frac{k_3}{z+1}$

利用遮挡法求解第一项和第三项的系数，有：

$$k_1=\frac{F(z)}{z}(z-1)^2\bigg|_{z=1}=\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}(z-1)^2\bigg|_{z=1}=\frac{1}{z+1}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}$$

$$k_2=\frac{F(z)}{z}(z+1)\bigg|_{z=-1}=\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}(z+1)\bigg|_{z=-1}=\frac{1}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1}=\frac{1}{4}$$

即 $\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}+\frac{k_2}{z-1}+\frac{\frac{1}{4}}{z+1}$

根据对应项系数相等法，取 $z=0$ 代入上式，则有 $1=\frac{1}{2}-k_2+\frac{1}{4}$，即 $k_2=-\frac{1}{4}$

因此：$F(z)=\frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{4}\frac{z}{z+1}$

根据 $ku(k)\leftrightarrow\frac{z}{(z-1)^2},u(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1},(-1)^k u(k)\leftrightarrow\frac{z}{z+1}$，因此 $F(z)$ 的反变换 $f(k)$ 为：

$$f(k)=\frac{1}{2}ku(k)-\frac{1}{4}u(k)+\frac{1}{4}(-1)^k u(k)=\frac{1}{4}\left[(-1)^k+2k-1\right]u(k)$$

6-5 序列 Z 变换如下，试求 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$。

（1）$F(z)=\frac{z^2-2z}{(z^2-1)(z+0.5)}$

解：由初值定理得：$f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$，$f(1)=\lim\limits_{z\to\infty}z\left[F(z)-f(0)\right]=1$，

$$f(2)=\lim_{z\to\infty}z^2\left[F(z)-f(0)-f(1)z^{-1}\right]=\lim_{z\to\infty}z^2\left[\frac{z(z^2-2z)-(z^2-1)(z+0.5)}{z(z^2-1)(z+0.5)}\right]=\lim_{z\to\infty}z^2\left[\frac{-2.5z^2+z+0.5}{z(z^2-1)(z+0.5)}\right]=-2.5$$

也可以通过长除法求得：$F(z)=z^{-1}-2.5z^{-2}+\cdots$

（2）$F(z)=\frac{2z^2-3z+1}{z^2-4z-5}$

解：由初值定理得：

$f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=2$，$f(1)=\lim\limits_{z\to\infty}z\left[F(z)-f(0)\right]=\lim\limits_{z\to\infty}z\left[\frac{2z^2-3z+1}{z^2-4z-5}-2\right]=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{5z^2+11z}{z^2-4z-5}=5$，

$$f(2)=\lim_{z\to\infty}z^2\left[F(z)-f(0)-f(1)z^{-1}\right]=\lim_{z\to\infty}z^2\left[\frac{2z^2-3z+1}{z^2-4z-5}-2-5z^{-1}\right]=\lim_{z\to\infty}\left[\frac{31z^2+25z}{z^2-4z-5}\right]=31$$

（3）$F(z)=\frac{z^2-z}{(z-1)^3}$

解：$F(z)=\frac{z^2-z}{(z-1)^3}=\frac{z}{(z-1)^2}$

由初值定理得：$f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$，$f(1)=\lim\limits_{z\to\infty}z\left[F(z)-f(0)\right]=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z^2}{(z-1)^2}=1$，

$$f(2)=\lim_{z\to\infty}z^2\left[F(z)-f(0)-f(1)z^{-1}\right]=\lim_{z\to\infty}z^2\left[\frac{z}{(z-1)^2}-z^{-1}\right]=\lim_{z\to\infty}\left[\frac{2z^2-2}{(z-1)^2}\right]=2$$

6-6 序列 Z 变换如下，能否用终值定理，如果能，求出 $f(\infty)$。

（1） $F(z)=\dfrac{z^2+z+1}{(z-1)(z+3)}$

解： $F(z)$ 的极点为 $z_1=1$，$z_2=-3$，由于第二个极点位于单位圆外，因此不能用终值定理。

6-7 计算下列卷积。

（1） $a^k u(k)*\delta(k-2)$

解：$\because$ $a^k u(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}$， $\delta(k-2)\leftrightarrow z^{-2}$，由时域卷积定理，有：$a^k u(k)*\delta(k-2)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}\cdot z^{-2}$

根据因果序列右移性质， $a^{k-2}u(k-2)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}\cdot z^{-2}$，因此 $a^k u(k)*\delta(k-2)=a^{k-2}u(k-2)$。

也可以根据信号的时域分析中，含 $\delta(t)$ 信号的卷积运算性质直接得到该结果。

（2） $a^k u(k)*u(k-1)$

解：$\because a^k u(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}$， $u(k-1)\leftrightarrow z^{-1}\cdot\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{1}{z-1}$，由时域卷积定理，有：

$a^k u(k)*u(k-1)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}\cdot\dfrac{1}{z-1}=F(z)$，对 $F(z)$ 求反变换即可求得该时域卷积结果。

$\because$ $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{1}{z-a}\cdot\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{A}{z-a}+\dfrac{B}{z-1}=\dfrac{1}{a-1}\cdot\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{1}{1-a}\cdot\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-a}\right)$ （遮挡法）

$\therefore$ $f(k)=\dfrac{1}{1-a}\left[u(k)-a^k u(k)\right]=\dfrac{1-a^k}{1-a}u(k)$

$\therefore$ $a^k u(k)*u(k-1)=\dfrac{1-a^k}{1-a}u(k)=\dfrac{1-a^k}{1-a}u(k-1)$ （k=0 时， $\dfrac{1-a^k}{1-a}=0$ ）

6-8 用 Z 变换解下列差分方程。

（1） $y(k+2)-y(k+1)-2y(k)=u(k)$，$y(0)=y(1)=1$

解：对差分方程做 Z 变换后，可得：$\left[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)\right]-\left[zY(z)-zy(0)\right]-2Y(z)=\dfrac{z}{z-1}$

将 $y(0)=y(1)=1$ 代入，整理后可得： $Y(z)=\dfrac{\dfrac{z}{z-1}+z^2}{z^2-z-2}=\dfrac{z^3-z^2+z}{(z-1)(z+1)(z-2)}$

因此有 $\dfrac{Y(z)}{z}=\dfrac{z^2-z+1}{(z-1)(z+1)(z-2)}=\dfrac{A}{z-1}+\dfrac{B}{z+1}+\dfrac{C}{z-2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{z-2}$ （遮挡法）

因此可得： $y(k)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(-1)^k+(2)^k\quad k\ge 0$

（2） $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=3^k u(k)$，$y(0)=y(1)=0$

解：由于 $y(0)=y(1)=0$，对差分方程做 Z 变换后，可得：$z^2Y(z)+3zY(z)+2Y(z)=\frac{z}{z-3}$，即

$Y(z)=\frac{1}{z^2+3z+2}\cdot\frac{z}{z-3}$。

因此有：$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{z^2+3z+2}\cdot\frac{1}{z-3}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+2}+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{z-3}$（遮挡法）

因为通过递推可知 $k<0$ 时 $y(k)=0$，即 $y(k)$ 是因果序列，因此可得：

$y(k)=\left[-\frac{1}{4}(-1)^k+\frac{1}{5}(-2)^k+\frac{1}{20}(3)^k\right]u(k)$（一般情况下，全响应后边注 $k\geq 0$，此处为特殊情况）

（3） $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=u(k)$，$y(-1)=0, y(-2)=0.5$

解：对后向差分方程做 Z 变换后，可得：

$$Y(z)+3\left[z^{-1}Y(z)+y(-1)\right]+2\left[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)\right]=\frac{z}{z-1}$$

将 $y(-1)=0, y(-2)=0.5$ 代入，整理后可得：$Y(z)=\frac{\frac{z}{z-1}-1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z+2)}$

因此有 $\frac{Y(z)}{z}=\frac{z}{(z-1)(z+1)(z+2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z+2}=\frac{1}{6}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}-\frac{2}{3}\frac{1}{z+2}$（遮挡法）

因此可得：$y(k)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{2}{3}(-2)^k \quad k\geq 0$

（4） $y(k)-0.9y(k-1)=0.1u(k)$，$y(-1)=2$

解：对后向差分方程做 Z 变换后，可得：

$Y(z)-0.9\left[z^{-1}Y(z)+y(-1)\right]=0.1\frac{z}{z-1}$，将 $y(-1)=2$ 代入，整理后可得：

$$Y(z)=\frac{0.1\frac{z}{z-1}+1.8}{1-0.9z^{-1}}=\frac{z(1.9z-1.8)}{(z-0.9)(z-1)}$$

因此有 $\frac{Y(z)}{z}=\frac{1.9z-1.8}{(z-0.9)(z-1)}=\frac{A}{z-0.9}+\frac{B}{z-1}=\frac{0.9}{z-0.9}+\frac{1}{z-1}$（遮挡法）

因此可得：$y(k)=0.9(0.9)^k+1 \quad k\geq 0$

6-9 某线性时不变离散系统，其差分方程为 $y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=x(k)$，已知 $y(-1)=-1$，$y(-2)=\frac{1}{4}$，输入 $x(k)=u(k)$，求该系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$，零状态响应 $y_{zs}(k)$，以及全响应 $y(k)$。

解：对差分方程进行 Z 变换，得：$Y(z)-\left[z^{-1}Y(z)+y(-1)\right]-2\left[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)\right]=X(z)$

整理后可得：$Y(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}-2z^{-2}}\cdot X(z)+\dfrac{\left(1+2z^{-1}\right)y(-1)+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}$

将 $X(z)=\dfrac{z}{z-1}$， $y(-1)=-1$， $y(-2)=\dfrac{1}{4}$ 代入，可得：

$$Y(z)=\frac{z^3}{(z-1)(z+1)(z-2)}+\frac{-\frac{1}{2}z^2-2z}{(z+1)(z-2)}=Y_{zs}(z)+Y_{zi}(z)$$

$$\because\ \frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z-2}$$ （遮挡法）

$$\therefore\ y_{zs}(k)=\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k\right]u(k)$$

$$\because\ \frac{Y_{zi}(z)}{z}=\frac{-\frac{1}{2}z-2}{(z+1)(z-2)}=\frac{D}{z+1}+\frac{E}{z-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-2}$$ （遮挡法）

$$\therefore\ y_{zi}(k)=\frac{1}{2}(-1)^k-(2)^k$$

$$\therefore\ y(k)=y_{zs}(k)+y_{zi}(k)=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}(-1)^k+\frac{1}{3}(2)^k,\quad k\geq 0$$

6-11 某离散系统的模拟图如图所示，求：

（1） $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$；（2）单位函数响应 $h(k)$；（3）写出系统的差分方程；（4）求系统的单位阶跃响应 $g(k)$。

解：（1）对加法器列方程，可得：$Y(z)=X(z)+\dfrac{3}{4}z^{-1}Y(z)-\dfrac{1}{8}z^{-2}Y(z)$

整理后可得：$H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\dfrac{z^2}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}$

（2） $\because\ \dfrac{H(z)}{z}=\dfrac{z}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}=\dfrac{A}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{B}{z-\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{z-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{z-\frac{1}{4}}$ $\quad\therefore h(k)=\left[2\left(\dfrac{1}{2}\right)^k-\left(\dfrac{1}{4}\right)^k\right]u(k)$

（3）由系统函数的表达式，可以写出 $y(k+2)-\dfrac{3}{4}y(k+1)+\dfrac{1}{8}y(k)=x(k+2)$ 或者

$$y(k)-\frac{3}{4}y(k-1)+\frac{1}{8}y(k-2)=x(k)$$

（4）当激励为阶跃信号 $u(k)$ 时，系统的响应为阶跃响应，因此阶跃响应的 Z 变换为：

$$G(z)=H(z)X(z)=\frac{z^2}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^3}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$\because \quad \dfrac{G(z)}{z}=\dfrac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{\frac{8}{3}}{z-1}+\dfrac{-2}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{4}} \quad \therefore \quad g(k)=\left[\dfrac{8}{3}-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^k+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k\right]u(k)$

6-12 某离散时间系统的系统函数 $H(z)=\dfrac{z+3}{z^2+3z+2}$，求该系统单位函数响应 $h(k)$ 和描述系统的差分方程。

解：

（1）系统单位函数响应 $h(k)$ 是系统函数 $H(z)$ 的 Z 反变换。

$\dfrac{H(z)}{z}=\dfrac{z+3}{z\left(z^2+3z+2\right)}=\dfrac{z+3}{z(z+1)(z+2)}=\dfrac{k_1}{z}+\dfrac{k_2}{z+1}+\dfrac{k_3}{z+2}$，利用遮挡法可求得三个系数：

$$k_1=\frac{H(z)}{z}z\bigg|_{z=0}=\frac{z+3}{(z+1)(z+2)}\bigg|_{z=0}=\frac{3}{2}$$

$$k_2=\frac{H(z)}{z}(z+1)\bigg|_{z=-1}=\frac{z+3}{z(z+2)}\bigg|_{z=-1}=-2$$

$$k_3=\frac{H(z)}{z}(z+2)\bigg|_{z=-2}=\frac{z+3}{z(z+1)}\bigg|_{z=-2}=\frac{1}{2}$$

因此：$H(z)=\dfrac{3}{2}-2\dfrac{z}{z+1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{z}{z+2}$，根据简单离散序列的 Z 变换，可求得：

$$h(k)=\frac{3}{2}\delta(k)-2(-1)^k u(k)+\frac{1}{2}(-2)^k u(k)$$

（2）对于 n 阶前向差分方程，根据 Z 域系统函数的定义式，$H(z)=\dfrac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$。

因此已知 $H(z)=\dfrac{z+3}{z^2+3z+2}$，可直接写出描述系统的差分方程为：

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=x(k+1)+3x(k)$$

6-14 已知离散系统函数的零极点分布如图所示，且 $\lim\limits_{k\to\infty}h(k)=\dfrac{1}{3}$，系统的初始条件 $y_{zi}(0)=2,\ y_{zi}(1)=1$，求：

（1）$H(z)$；（2）零输入响应 $y_{zi}(k)$；（3）若 $x(k)=(-3)^k u(k)$，求零状态响应 $y_{zs}(k)$。

解：（1）由零极点图可得：$H(z)=H_0\dfrac{z}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$。由终值定理可知：

$h(\infty)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)H(z)=\lim\limits_{k\to\infty}h(k)=\dfrac{1}{3}$，即 $\lim\limits_{z\to1}(z-1)H_0\dfrac{z}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{3}$，因此有 $H_0=\dfrac{1}{2}$。

（2）由 $H(z)=\frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$ 可写出系统的差分方程为：

$$y(k+2)-\frac{1}{2}y(k+1)-\frac{1}{2}y(k)=\frac{1}{2}x(k+1)$$

对齐次方程 $y(k+2)-\frac{1}{2}y(k+1)-\frac{1}{2}y(k)=0$ 进行 Z 变换，可得：

$$z^2Y_{zi}(z)-z^2y_{zi}(0)-zy_{zi}(1)-\frac{1}{2}\left[zY_{zi}(z)-zy_{zi}(0)\right]-\frac{1}{2}Y_{zi}(z)=0$$

将 $y_{zi}(0)=2$，$y_{zi}(1)=1$ 代入上式，可得：$Y_{zi}(z)=\frac{2z^2}{z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}}$

$$\because \frac{Y_{zi}(z)}{z}=\frac{2z}{z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2}{3}}{z+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{4}{3}}{z-1} \qquad \therefore y_{zi}(k)=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k+\frac{4}{3} \qquad k\geq 0$$

（3）系统零状态响应的 Z 变换为：$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)$。已知 $x(k)=(-3)^k u(k)$，因此 $X(z)=\frac{z}{z+3}$，已知 $H(z)=\frac{1}{2}\frac{z}{z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}}$，因此有：

$$Y_{zs}(z)=\frac{1}{2}\frac{z}{z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}}\cdot\frac{z}{z+3}=\frac{1}{2}\frac{z^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+3)}$$

$$\because \quad \frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{1}{2}\frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+3)}=\frac{\frac{1}{15}}{z+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{12}}{z-1}-\frac{\frac{3}{20}}{z+3}$$

$$\therefore \quad y_{zs}(k)=\left[\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^k+\frac{1}{12}-\frac{3}{20}(-3)^k\right]u(k)$$

6-16 某系统函数 $H(z)$ 如下，试确定系统是否稳定。

（1）$H(z)=\frac{z^3+1}{z\left(z^2+2z+\frac{3}{4}\right)}$

解：$H(z)$ 的极点为 $z_1=0$，$z_2=-\frac{1}{2},z_3=-\frac{3}{2}$，有一个极点在单位圆外，此系统为不稳定系统。

（2）$H(z)=\frac{(z+1)^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\left(z^2+z+\frac{1}{2}\right)}$

解：$H(z)$ 的极点为 $z_1=\frac{1}{2}$，$z_{2,3}=\frac{-1\pm j}{2}$，三个极点都在单位圆内，此系统为稳定系统。

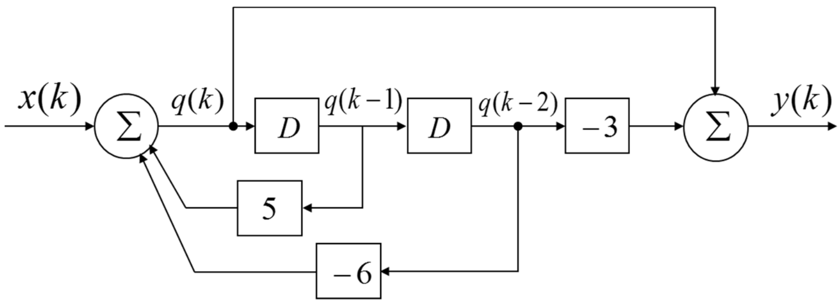
（3） $H(z)=\dfrac{3z+1}{2z^2+z-1}$

解： $H(z)=\dfrac{3z+1}{(2z-1)(z+1)}$，因此 $H(z)$ 的极点为 $z_1=-1$，$z_2=\dfrac{1}{2}$，即在单位圆上有单极点，且其他极点在单位圆内，此系统为临界稳定系统。

6-17 对下列差分方程描述的系统画出模拟图。

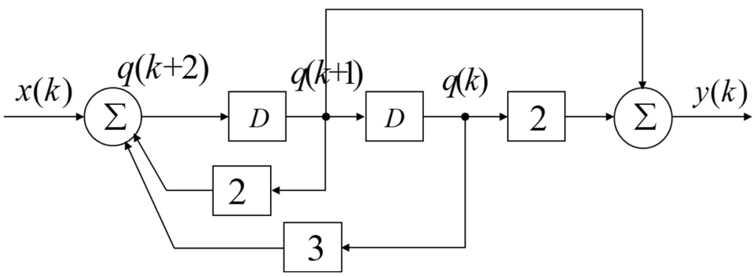
（1） $y(k)-5y(k-1)+6y(k-2)=x(k)-3x(k-2)$

解：设辅助函数 $q(k)$，则有： $q(k)-5q(k-1)+6q(k-2)=x(k)$， $y(k)=q(k)-3q(k-2)$。由此两个方程可画出系统模拟图为：



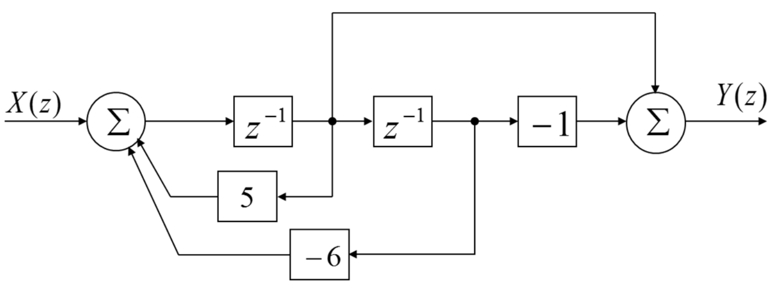
（2） $y(k+2)-2y(k+1)-3y(k)=x(k+1)+2x(k)$

解：设辅助函数 $q(k)$，则有： $q(k+2)-2q(k+1)-3q(k)=x(k)$， $y(k)=q(k+1)+2q(k)$。由此两个方程可画出系统模拟图为：

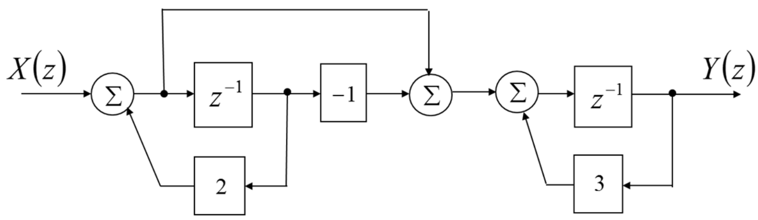


6-18 已知某离散系统函数为 $H(z)=\dfrac{z-1}{z^2-5z+6}$，试分别画出串联形式与并联形式的模拟图。

解： $H(z)=\dfrac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\dfrac{z-1}{z^2-5z+6}$，其直接模拟图为：



串联模拟： $H(z)=\dfrac{z-1}{z^2-5z+6}=\dfrac{z-1}{z-2}\cdot\dfrac{1}{z-3}$



并联模拟：$H(z)=\dfrac{z-1}{z^2-5z+6}=\dfrac{-1}{z-2}+\dfrac{2}{z-3}$