概率论与数理统计

主讲：李新秀

Tel: 18652915227

1、作业：每周交1-2次

2、答疑时间：

周二 12:30-13:30

答疑地点：教2-326（1）QQ/学习通

严格管理学习过程的每一个环节

1、课堂出勤

2、作业

3、答疑群 (学习通App中自带班级群)

4、每单元结束后进行单元测试—作业的补充

5、期末测试

作业要求：不要翻看课本做作业

课程性质：学科基础课

三大学科基础课：

高等数学、线性代数、概率论与数理统计

课程在专业学习中的地位作用、研究生入学考试 必考科目

考核性质和方式：考试课 闭卷

期末考试 考教分离

课程的任务

- 概率论与数理统计是描述“随机现象”并研究其数量规律的一门学科。通过本课程的教学，使学生掌握**概率的定义和计算**，能用**随机变量概率分布及数字特征**研究“随机现象”的规律，了解数理统计的基本理论与思想，并掌握常用的**点估计和假设检验**等基本统计推断方法。该课程的系统学习，可以培养学生提高认识问题、研究问题与处理相关实际问题的能力。

教材：

《概率统计与随机过程》孔告化、何铭等编

参考书：

1.《概率论与数理统计》，陈希孺等 编，科学出版社

2.《概率论与数理统计》盛骤等 编高等教育出版社

教学内容及课时安排：

第一章—第五章　　概率论（32学时）

第六章—第八章　数理统计（16学时）

课时安排

- 第一章 随机事件及其概率 8学时
- 第二章 随机变量及其分布 6学时
- 第三章 多维随机变量及其分布 8学时
- 第四章 随机变量的数字特征 6学时
- 第五章 大数定律与中心极限定理 4学时
- 第六章 样本及其抽样分布 4学时
- 第七章 参数估计 6学时
- 第八章 假设检验 6学时

课程特点：概念比较多，许多定义都是以计算公式的形式给出，课时少,课堂练习少。各章知识点之间相对比较独立，后面的章节会用到前面的知识

- 基本要求

1、基本概念熟练掌握

2、基本公式熟练灵活应用

3、基本性质、重要定理熟练掌握并会灵活应用

计算主要是以高等数学中的微积分为工具

概率论序言

- 一、什么是概率统计，明确课程的研究对象和研究任务
- 二、怎样学习《概率论与数理统计》课程
- 三、怎样才算是课程成功的学习

一、什么是概率统计

考察下面的现象:

A. 太阳从东方升起;

B. 同性电荷必相互排斥;

C. 上抛物体一定下落;

D. 新生婴儿的体重.

E. 明天天气状况

F.买了彩票会中奖

确定性现象

不确定性现象

自然界与社会生活中的两类现象 $\begin{cases} \text{确定性现象} \\ \text{不确定性现象} \end{cases}$

现在我们来考察一下不确定性现象的特点

又如:一门火炮在一定条件下向同一目标进行射击,各次的弹着点不尽相同,在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置.

特点 1 当人们在一定的条件下对不确定性现象加以观察或进行试验时，观察或试验的**结果**是**多个**可能结果中的某一个. 而且在每次试验或观察前都**无法确知**其结果.

有些不确定性现象虽然存在不确定性，但如果进行多次重复观察或试验，还是有某些规律的。

- 老年人的余寿一般来说比年轻人短
- 6月1日有很大可能南京比北京气温高
- 抛一枚均匀硬币出现正面的可能性为1/2

特点 2 不确定性现象在大量重复观察或试验下，它的结果却呈现出固有规律性.

统计规律性

在个别试验中其结果呈现出不确定性,在大量重复观察或试验中其结果却具有统计规律性的现象,称为**随机现象**.

概率论与数理统计的研究对象

随机现象

研究任务

研究随机现象的统计规律性

- 《概率论与数理统计》是各类学科中唯一一门专门研究随机现象的规律性的学科。
- 随机现象的广泛性决定了这一学科的重要性。

概率论、数理统计的区别与联系

确切来说，概率论与数理统计是两个学科。

概率论是数学的一个分支，研究如何定量描述随机现象及其规律；

主要介绍描述随机现象的统计规律所用的数学工具，如概率、随机变量、概率分布、数字特征、特征函数等

数理统计则以数据为唯一研究对象，包括数据的收集、整理、分析和建模，从而给出相关数据现象的某些规律并进行预测或决策。该课程主要研究分析数据的方法手段，如参数估计、假设检验、回归分析等

大数据时代的来临，更为统计的发展带来了极大的机遇和挑战。

二、怎样学习《概率论与数理统计》课程

- **学思想**　概率统计特殊的研究对象包含了许多独特的思维方式和思想方法，特别是如何看待和处理随机规律性，是其它学科中没有的。例如，以比较各种事件出现的可能性的大小进行决策的思想。

------极大似然原理、实际推断原理

- **学方法**　定量描述随机现象及其规律的方法，收集、整理、分析数据，从而建立统计模型的方法。

三、怎样才算是课程成功的学习

检验《概率论与数理统计》这门课程学好与否，除了掌握教材内容，会做作业，考试成绩优良外，下面两条可以作为自测的标准。

- 是否对“随机”有足够的认识
- 是否对“数据”有兴趣、有感觉

- 对“随机”有足够认识，即能随时随地用“随机”的观点去观察、看待、处理周围的事物。如探索物理、化学或生物学中随机现象的规律性。

- 对“数据”有兴趣、有感觉，即善于发现、善于利用、善于处理周围的数据。如：从网购数据、超市零售数据、银行客户资料发现有价值的关联。

第一节 随机事件

一、随机试验

从观察试验开始

研究随机现象,首先要对研究对象进行观察试验.

几个具体试验

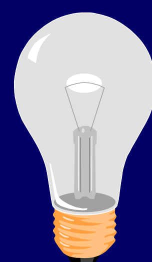
E_1 : 抛一枚硬币, 观察正面 H 和反面 T 出现的情况.

E_2 : 将一枚硬币抛掷三次, 观察正面 H 和反面 T 出现的情况.

E_3：抛一颗骰子，观察出现的点数．

E_4：记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数．

E_5：在一批灯泡中任意抽取一支,测试它的寿命.



E_6：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度．

E_7：将一枚硬币抛掷三次,观察正面 H 出现的次数.

上述试验具有下列共同的特点:

(1)可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 可预知性： 每次试验的可能结果不止一个, 并且事先能明确试验的所有可能的结果;

(3) 随机性：进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，每个结果的出现都有一定的随机性.

在概率论中将具有上述特点的试验称为随机试验.

用 E表示随机试验.

试验--experiment

二、 样本空间 随机事件

1. 样本空间

$\Omega = \{\omega\}$

样本--specimen

样本空间：随机现象的一切可能基本结果组成的集合

记为$S=\{e\}$,其中e表示基本结果,又称样本点.

样本点：试验的每一个结果或样本空间的元素称为一个样本点, 记为 e.

样本空间的分类

离散样本空间: 样本点个数为有限个或可列个的情况

连续样本空间: 样本点个数为不可列无限个的情况

例如,试验是将一枚硬币抛掷两次,观察正面H、反面T出现的情况:

则样本空间 $S=\{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

	第1次	第2次
(H,H):	H	H
(H,T):	H	T
(T,H):	T	H
(T,T):	T	T

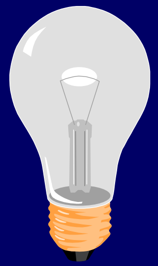
在每次试验中必有一个样本点出现且仅有一个样本点出现 .

若试验是将一枚硬币抛掷两次,观察正面出现的次数: 则样本空间

$$S=\{0,1,2\}$$

由以上两个例子可见,样本空间的元素是由试验的目的所确定的.

如果试验是测试某灯泡的寿命:



则样本点是一非负数，由于不能确知寿命的上界，所以可以认为任一非负实数都是一个可能结果，故样本空间

$$S=\{t:\ t\geq 0\}$$

例1 写出下列随机试验的样本空间.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H 和反面 T 出现的情况.

S_1： $\{H, T\}$

E_7：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H 出现的次数.

S_2： $\{0, 1, 2, 3\}$

E_3：记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数.

S_3： $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

例2 一个袋中装有 8 个大小完全相同的球，其中有 4 个是白色的，4 个是红色的，搅匀后从中任取一球，求此随机试验的样本空间.

S：{白球，红球}

请注意： 实际中,在进行随机试验时,我们往往会关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合.

例如在测试某灯泡的寿命这一试验中,若规定灯泡的寿命 (小时) 小于500为次品, 那么我们关心灯泡的寿命 t 是否满足 $t \geq 500$. 或者说, 我们关心满足这一条件的样本点组成的一个集合 $\{t \mid t \geq 500\}$. 这就是样本空间

$$S = \{t: \ t \geq 0\}$$

子集。

2、随机事件

试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件.

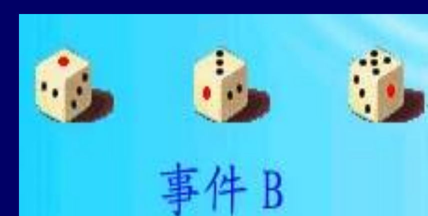
随机事件简称事件，常用 A, B, C 等表示.

如在掷骰子试验中，观察掷出的点数 .

样本空间为: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

事件 A={掷出1点} $=\{1\}$.

事件 B={掷出奇数点} $=\{1,3,5\}$



事件 C ={出现的点数大于4} $=\{5,6\}$.

基本事件: 由一个样本点组成的单点集.

(相对于观察目的不可再分解的事件)

如在掷骰子试验中，观察掷出的点数 .

事件 A_i ={掷出 i 点}, i =1,2,3,4,5,6

基本事件

事件 B={掷出奇数点}

当且仅当集合A中的一个样本点出现时,称事件A发生.

如在掷骰子试验中，观察掷出的点数 .

样本空间为: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

事件 B={掷出奇数点} $=\{1,3,5\}$

B发生当且仅当B中的样本点1,3,5中的某一个出现.

两个特殊的事件:

必然事件

即在试验中必定发生的事件，常用 S 表示;

不可能事件

即在一次试验中不可能发生的事件，常用 ϕ 表示 .

例如，在掷骰子试验中，“掷出点数小于7”是必然事件; 而 “掷出点数8”则是不可能事件.

注：

(1)任一事件A是样本空间的一个子集(Venn图)

(2)当A中某个样本点出现了，就说事件A发生了，或事件A发生当且仅当A中某个样本点出现了.

(3)事件可以用集合表示，也可以用语言描述.

例2. 甲、乙两人进行投骰子  比赛，得点数大者为胜。若甲先投得了5点，分析乙的胜负情况。

解：乙投一骰子所有可能结果构成样本空间，

S={1,2,3,4,5,6}

“乙赢” = {6} =A

“平局” = {5} =B

“乙输” = {1,2,3,4} = C

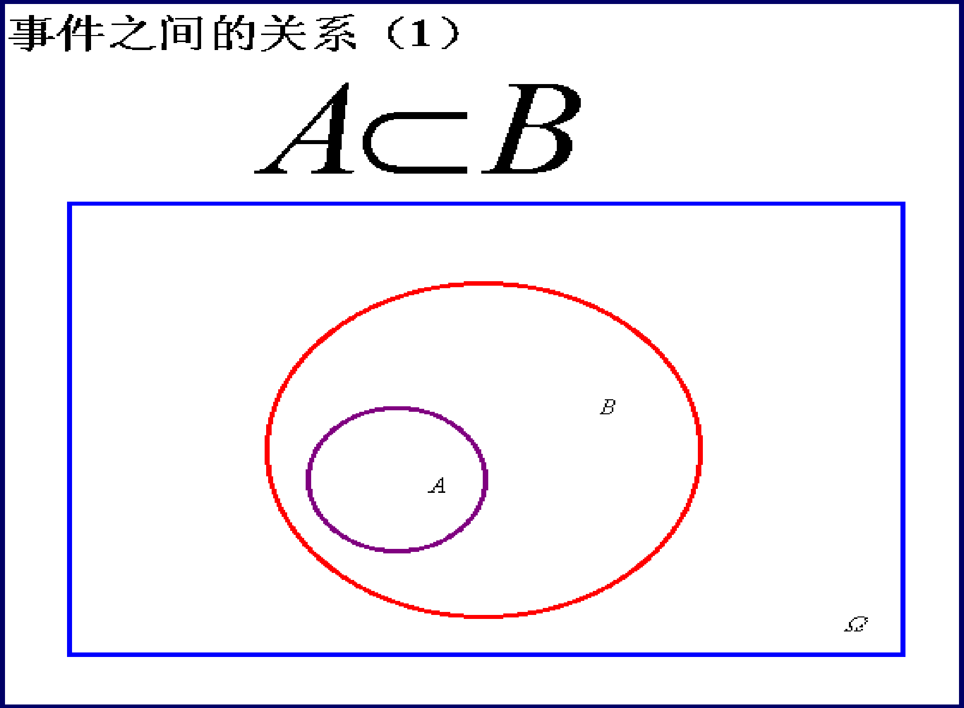
“乙不输” 由 A与B的并集组成 $A\cup B=\{5,6\}$

3、事件的关系（包含、相等）

集合论 ⟷ 概率论

3、事件的关系（包含、相等）

1) 事件的包含 “A发生必导致B 发生”记 $A \subset B$



例如在掷一颗骰子的试验中

A=“出现5点”

={5}

B=“出现奇数点”

={1，3，5}

故 $A \subset B$

2) 相等关系

若$A \subset B$且$B \subset A$,则称事件A与B相等, 记 $A=B$.

例1 掷两颗骰子，A=“两颗骰子的点数之和为奇数”

B=“两颗骰子的点数为一奇一偶”

则 $A=B$

例2 从一付52张的扑克牌中任取4张，

令A表示“取得至少有3张红桃”的事件；

B表示“取得至多有一张不是红桃”的事件。

显然$A=B$

不同的语言描述的事件可能是同一件事件

4. 事件的运算

1) 事件的并（和）：“事件A与B至少有一个发生”，

记作$A\cup B$, $A\cup B=$ $\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$

n个事件$A_1, A_2,\ldots, A_n$至少有一个发生，记作 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

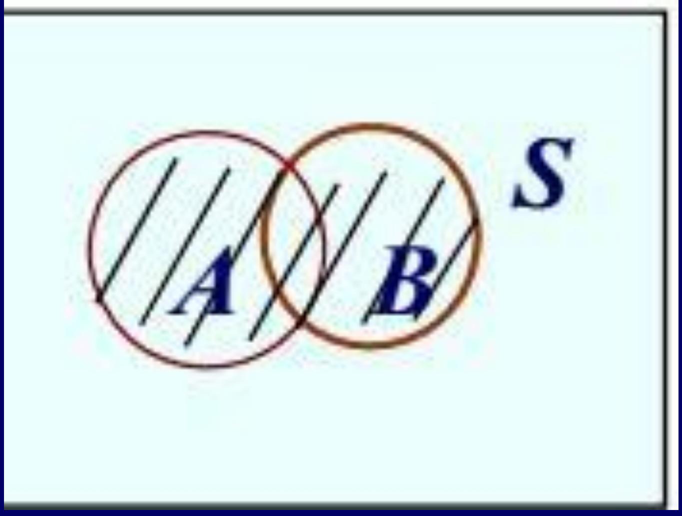
事件$A_1, A_2,\ldots,$ 至少有一个发生，记作 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

如在掷一颗骰子的试验中

A=“出现奇数点” ={1,3,5}

B=“出现点数不超过3”={1, 2, 3}

$A\cup B$={1,2,3,5}



4. 事件的运算

2) 事件的交(积): 事件A与B同时发生，记作 $A\cap B=AB$

$AB=$ $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

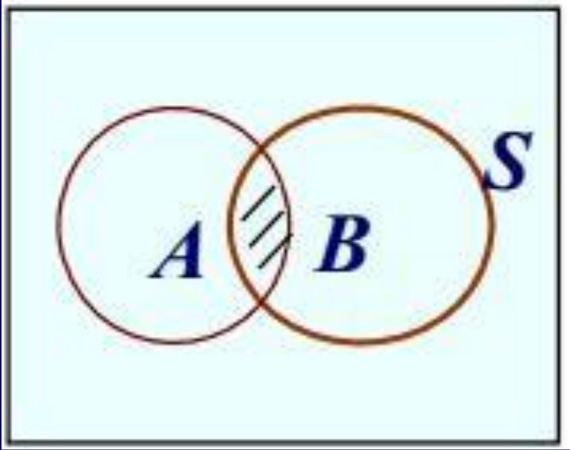
n个事件$A_1, A_2,\ldots, A_n$同时发生，记作 $A_1A_2\ldots A_n$或$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

事件$A_1, A_2,\ldots,$ 同时发生，记作 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

如在掷一颗骰子的试验中

A="出现奇数点" $=\{1,3,5\}$

B="出现点数不超过3"$=\{1, 2, 3\}$

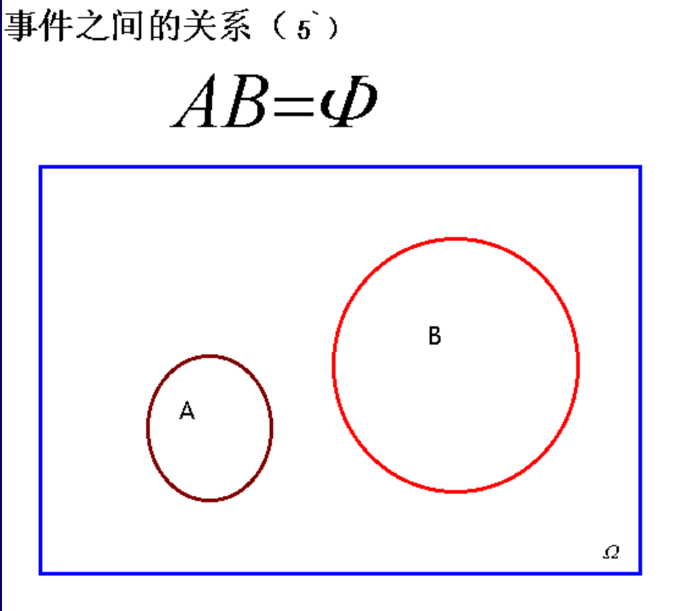


$AB=\{1, 3\}$

互不相容的事件

当 $AB = \varnothing$ 即 事件 A 与 B 不可能同时发生时，

称事件 A与 B 互不相容 或 互斥



例如，观察某定义通路口在某时刻的红绿灯：

若 A = {红灯亮}，

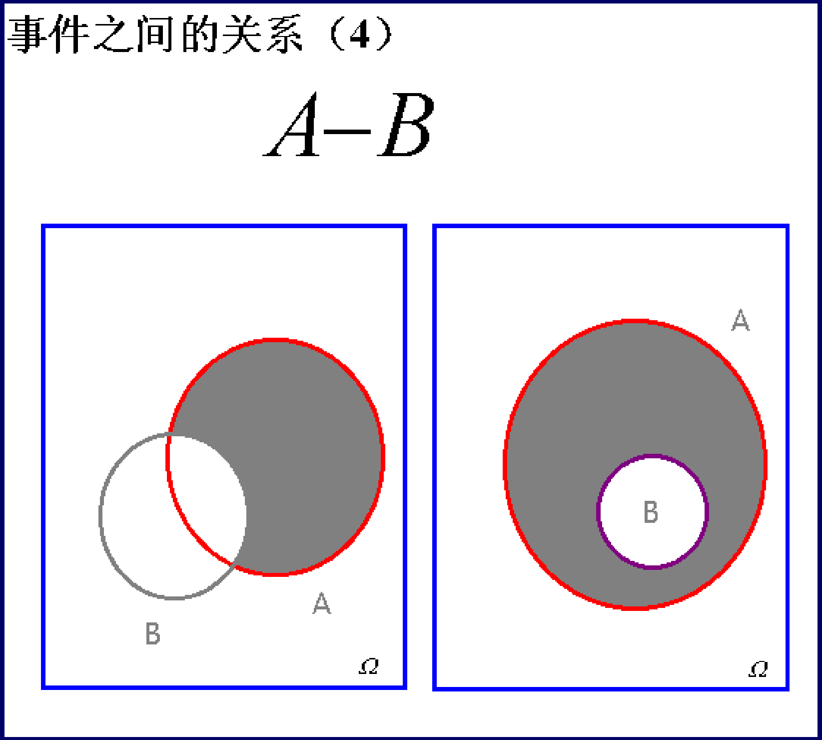
B = {绿灯亮}，

则 A 与 B 便是互不相容的。

3) 事件的差：事件A发生而B不发生，称为A与B 的差事件，记作$A-B$. $A - B =$ $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$

如在掷一颗骰子的试验中，A="出现奇数点" ={1,3,5}

B="出现点数不超过3"={1, 2, 3}



$A - B$={5}

判断命题A-B=A-AB的正确性

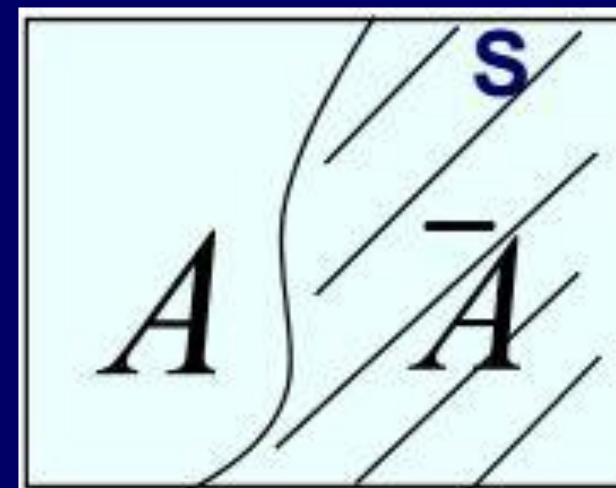
思考：何时A-B=ϕ ？

何时A-B=A ？

4)对立事件： A不发生这一事件称为 A的对立事件

也称为A的逆事件，记作 $\bar{A}$. $\bar{A} = S - A$

$A\bar{A} = \varnothing$ 且 $A \cup \bar{A} = S$ $\bar{\bar{A}} = A$



A与B的差事件可以表示为：

$$A - B = A\bar{B}$$

$$A-B=A-AB$$

例3: 甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹, 以A、B、C分别表示甲、乙、丙命中目标, 试用A、B、C的运算关系表示下列事件:

A_1 :"至少有一人命中目标":

A_2 :"恰有一人命中目标":

A_3 :"恰有两人命中目标":

A_4 :"最多有一人命中目标":

A_5 :"三人均命中目标":

A_6 :"三人均未命中目标":

例3: 甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹，以A、B、C分别表示甲、乙、丙命中目标，试用A、B、C的运算关系表示下列事件：

A_1:“至少有一人命中目标”: $A \cup B \cup C$

A_2:“恰有一人命中目标”: $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

A_3:“恰有两人命中目标”: $AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C$

A_4:“最多有一人命中目标”: $\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}$

A_5:“三人均命中目标”: ABC

A_6:“三人均未命中目标”: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

事件的运算性质

1、交换律：$A \cup B = B \cup A$，$AB = BA$

2、结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

$$(AB)C = A(BC)$$

3、分配律 $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$，

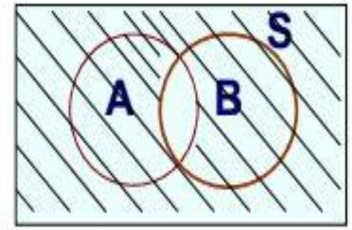
$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$$

4、对偶(De Morgan)律：

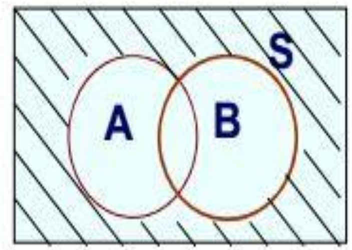
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

可推广 $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A_k}$，$\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A_k}$.

注意 $\overline{AB}$ 与 $\bar{A}\,\bar{B}$ 的区别：



$\overline{AB}$是表示 A、B不同时发生



$\bar{A}\,\bar{B}$是表示 A、B都不发生

实际上两者有关系：

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} \cup A\bar{B} \cup \bar{A}B$$

本节基本要求和重点、难点

（1）了解 随机试验，样本空间，样本点，随机事件的概念，能够快速写出随机试验的样本空间。

（2）熟练掌握事件之间的关系与运算，互不相容事件、对立事件；

（3）熟练掌握事件的运算性质，特别是德摩根律

（4）能够用简单事件间的运算表示复杂的事件

研究随机现象，不仅关心试验中会出现哪些事件，更重要的是想知道事件出现的可能性大小，也就是

事 件 的 概 率

那么要问: 如何求得某事件的概率呢? 下面几节就来回答这个问题.