知识回顾

事件的关系（包含、相等）

1) 事件的包含 “A发生必导致B 发生”记为$A \subset B$

2) 相等关系

若$A \subset B$且$B \subset A$,则称事件A与B相等, 记为$A = B$.

3) 事件的并（和）：“事件A与B至少有一个发生”，

记作$A \cup B$, $A \cup B=$ $\{x|x \in A$ 或 $x \in B\}$

4) 事件的交(积): 事件A与B同时发生，记作 $A \cap B = AB$

$AB=$ $\{x|x \in A$ 且 $x \in B\}$

5）互不相容的事件：$AB=\phi$

当 $AB = \varnothing$ 即 事件 A 与 B 不可能同时发生时，

称事件 A与 B 互不相容 或 互斥

6) 事件的差：事件A发生而B不发生， 称为A与B 的差事件，记作$A-B$. $A - B =$ $\{x|x \in A$ 且 $x \notin B\}$

$$A\text{-}B = A - AB = A\overline{B}$$

4) 对立事件： A不发生这一事件称为 A的对立事件也称为A的逆事件，记作 $\overline{A}$. $\overline{A} = S - A$

$A\overline{A} = \varnothing$ 且 $A \cup \overline{A} = S$ $\overline{\overline{A}} = A$

事件的运算性质

1、交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

2、结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$$(AB)C=A(BC)$$

3、分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，

$$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$$

4、对偶(De Morgan)律：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

可推广$\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k \overline{A_k}$，$\overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k \overline{A}_k$.

§ 1.2 概率的定义及其确定方法

概率是随机事件发生可能性大小的度量

事件发生的可能性越大，概率就越大！

了解事件发生的可能性即概率的大小，对人们的生活有什么意义呢？

例如，了解发生意外人身事故的可能性大小,确定保险金额.

了解来商场购物的顾客人数的各种可能性大小，合理配置服务人员.

§ 1.2 概率的定义及其确定方法

从直观上来看，事件*A*的概率是指事件*A*发生的可能性大小的数值 记作 P(A).

1、概率的古典定义

probability

2、概率的几何定义

3、概率的统计定义-频率近似

4、概率的主观定义

5、概率的公理化定义 1900 1933

1. 确定概率的频率方法-概率的统计定义

频率的定义： 设在n次独立重复试验中，事件A出现了n_A次，则称n_A为事件A在n次试验中出现的频数，比值 n_A/n 为事件A在n次试验中出现的频率，记作 $f_n(A)$

即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

频率的性质

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$

(2) $f_n(S) = 1$

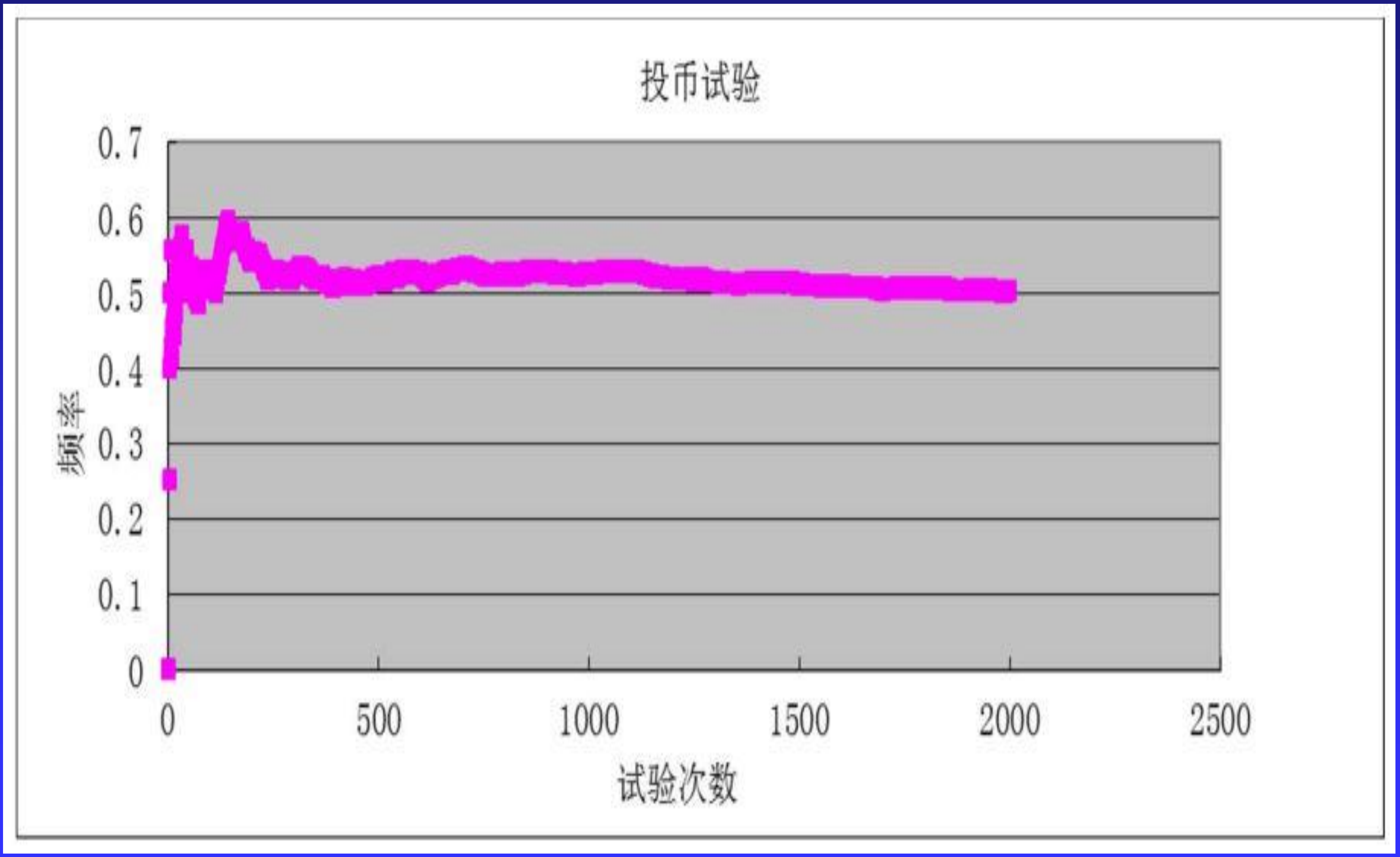
（3）设$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k$是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

抛掷钱币试验记录

试验者	抛币次数n	“正面向上”次数n_A	频率 $f_n(A)$
De Morgan	*2084*	*1061*	*0.518*
Bufen	*4040*	*2048*	*0.5069*
Pearson	*12000*	*6019*	*0.5016*
Pearson	*24000*	*12012*	*0.5005*

抛掷钱币正面向上模拟试验结果



可见, 在大量重复的试验中,随机事件出现的频率具 有稳定性, 即通常所说的统计规律性.

定义：在大量的重复试验中，随着试验次数的增加，事件A出现的频率会稳定在某个固定的数值p附近摆动，我们称这个稳定的数值p为事件A发生的概率，记为

$$P(A) = p.$$

这个定义称为概率的统计定义

2.概率的公理化定义(Kolmogorov)

概率的公理化定义　设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，称之为事件 A 的概率，如果它满足下列三个条件：

(1) $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \geq 0$；　（非负性）

(2) $\mathrm{P}(\mathrm{S}) = 1$；　（规范性）

(3) 对于两两互斥事件 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

（可列可加性）

概率的性质

性质1 $P(\varnothing)=0$

性质2 (有限可加性)： 设A_1，A_2，…A_n, 是n个两两互不相容的事件，即$A_iA_j=\phi$，$(i\neq j)$, i , $j=1, 2, \ldots, n$,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots P(A_n);$$

概率的性质

性质3 对任意事件A，有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

性质4　若 $A \supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

推论　若 $A \supset B$，则 $P(A) \geq P(B)$

性质5　对任意两个事件A，B，有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

性质6(加法公式) 对任意两个事件A，B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

推论(半可加性) 对任意两个事件A，B，有

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

推广：对任意n个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ ，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k)$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

对任意n个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ ，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

例1 设 A、B 为两个随机事件,且已知 $P(A)=\frac{1}{4}$,

$P(B)=\frac{1}{2}$,就下列三种情况求概率 $P(B\overline{A})$.

(1) A 与 B 互斥; (2) $A\subset B$; (3) $P(AB)=\frac{1}{9}$.

解 (1)由于 A、B 互斥,所以 $AB=\Phi$

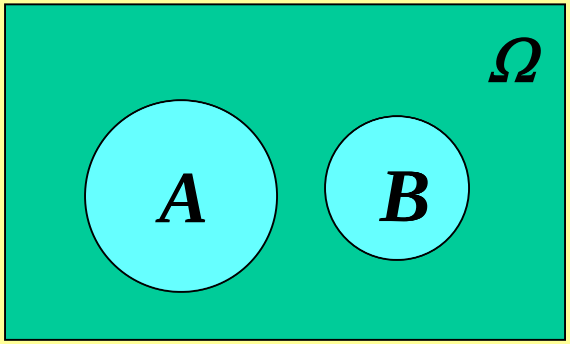
$$\therefore P(AB)=0$$

$$P(B\overline{A})=P(B-A)$$

$$=P(B-AB)$$

$$=P(B)-P(AB)$$

$$=P(B)=\frac{1}{2}.$$

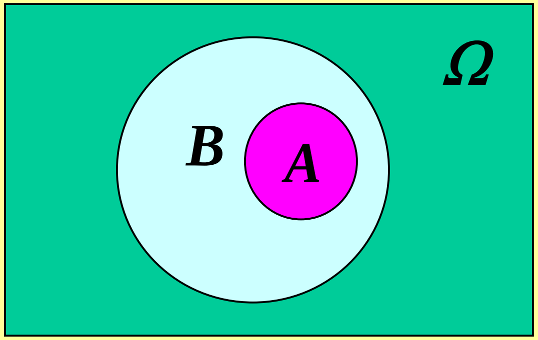


A、B 互斥

(2) 因为 $A \subset B$,所以

$$P(B\overline{A}) = P(B - A) = P(B) - P(A)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

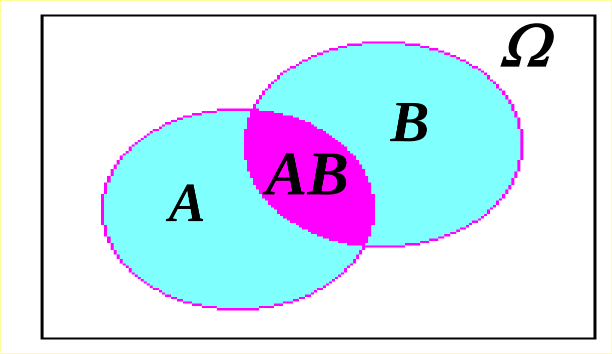


$A \subset B$

(3) $P(B\overline{A}) = P(B - AB)$

$$= P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18}.$$



$A \cap B$

例2 设 A、B、C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$.求 A、B、C 至少有一个发生的概率.

解 $P(A\cup B\cup C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)$$

$$-P(BC)+P(ABC)$$

$$=3\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}.$$

3. 确定概率的古典方法-古典概型

定义 1 若随机试验满足下述两个条件:

(1) 它的样本空间只有有限多个样本点;

(2) 每个样本点出现的可能性相同.

称这种试验为等可能随机试验或古典概型.

古典概型中事件概率的计算

若事件 A 包含 k 个基本事件，即

则有 $$A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_k}\}$$

$$P(A)=P(\{e_{i_1}\})+P(\{e_{i_2}\})+\cdots+P(\{e_{i_k}\})$$

$$=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中的基本事件总数}}$$

排列与组合公式

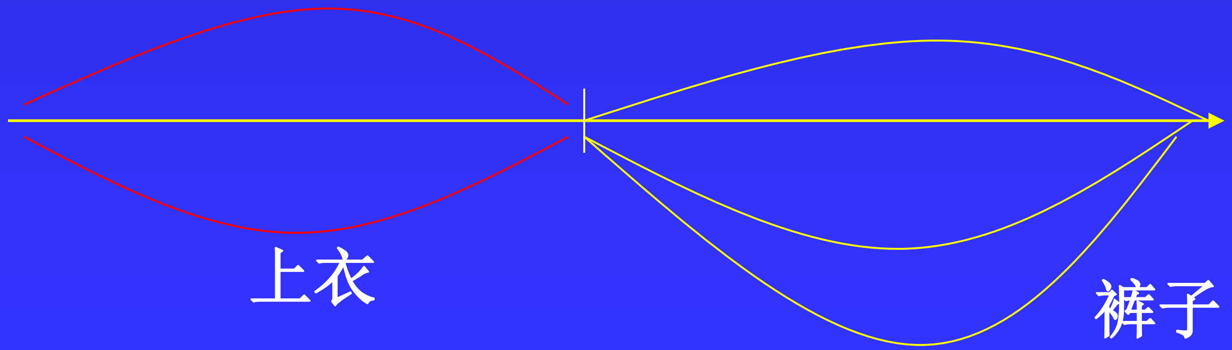
复习：排列与组合的基本概念

研究问题："从n个元素中任取r个元素"的取法总数

（一）乘法原理：设完成一件事需分两步，

第一步有n_1种方法，第二步有n_2种方法，

则完成这件事共有n_1n_2种方法



小明同学有3件上衣和4条裤子，请问他一共有多少种不同的搭配方法?

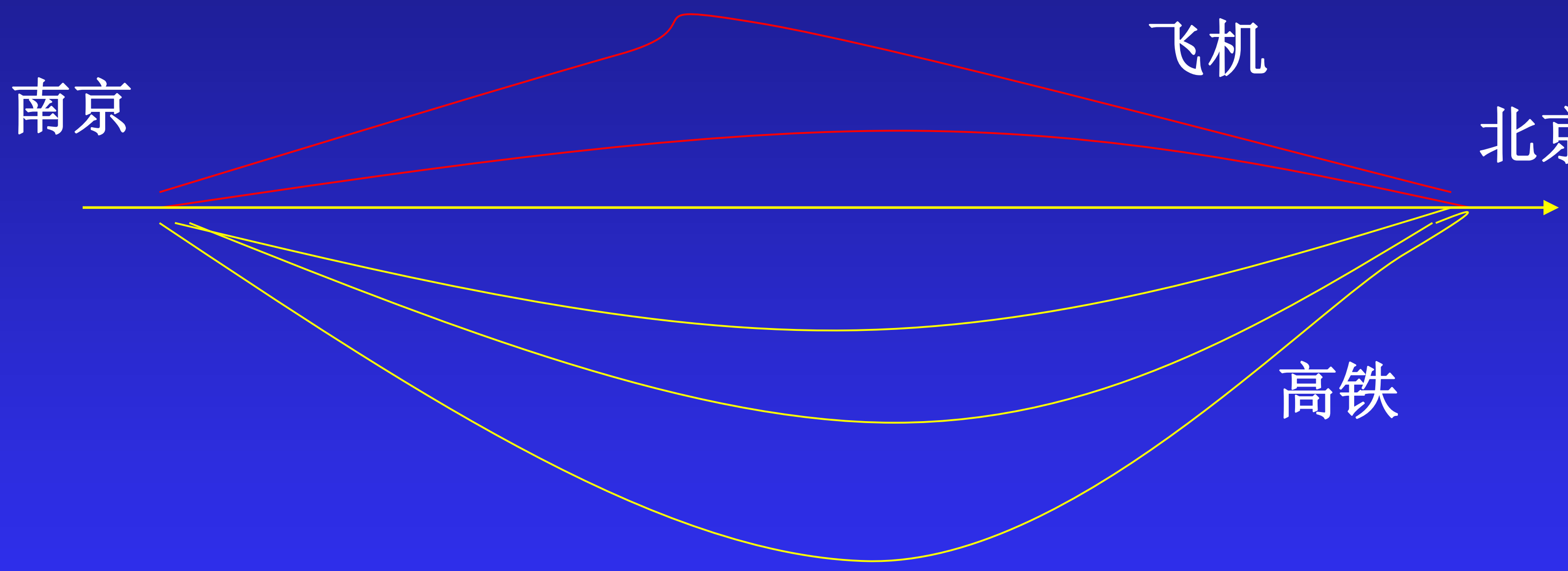
乘法原理：

1. 分步骤完成

2. 步步相关（不能独立完成）

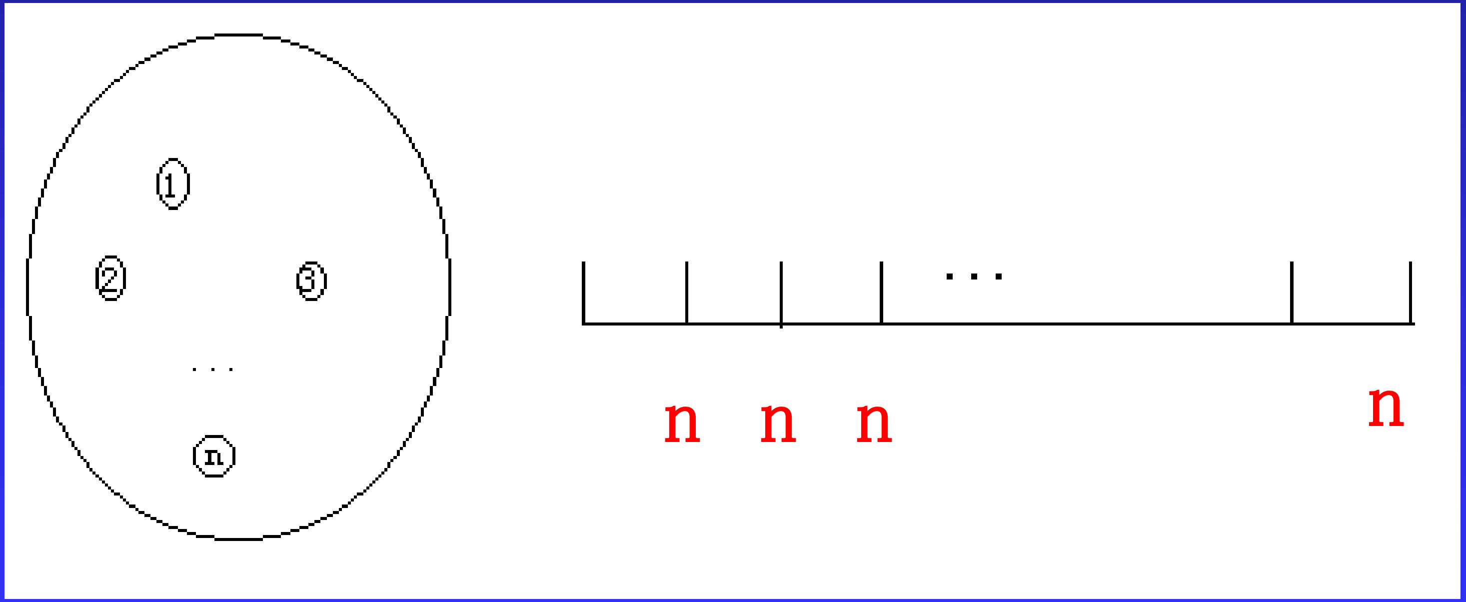
3. 步步相乘

（二）加法原理：设完成一件事可有两种途径，第一种途径有n_1种方法，第二种途径有n_2种方法，则完成这件事共有n_1+n_2种方法。



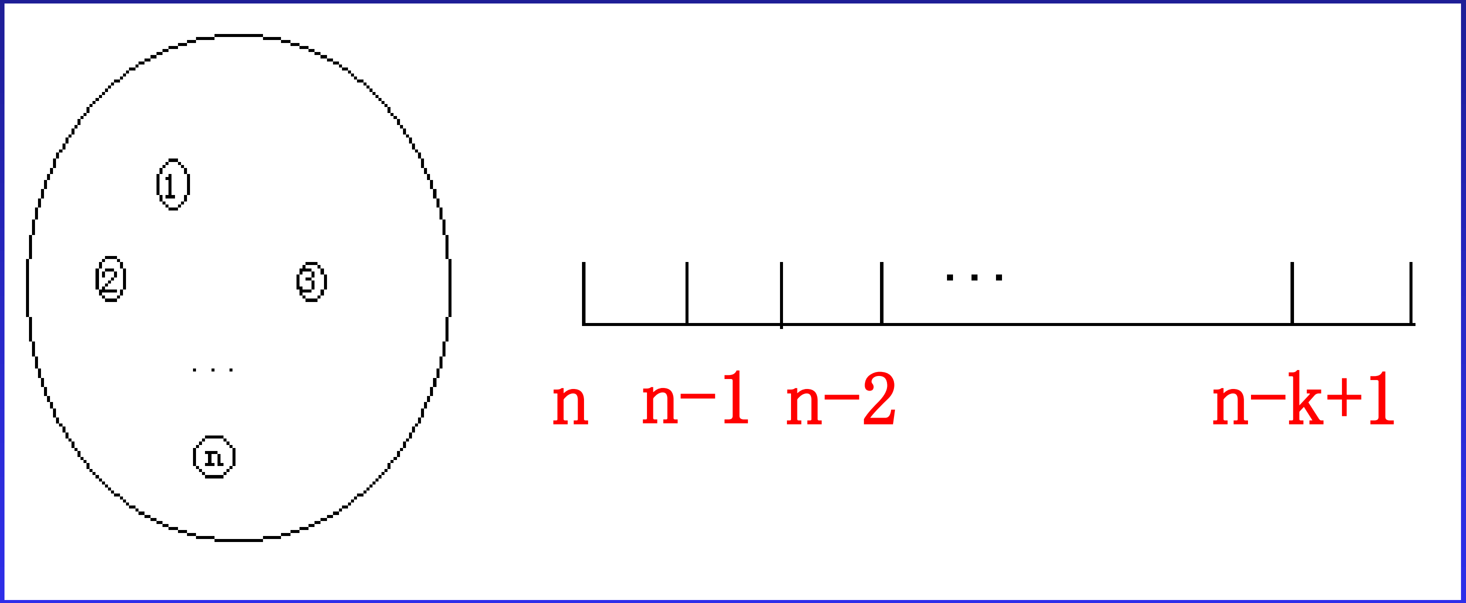
小明同学吃午饭，有3家中餐馆，4家西餐馆，小明共有几种选择？

（1）重复排列：从含有n个不同的元素的集合中随机抽取k 次，每次取一个，记录其结果后放回，将记录结果排成一列，



共有n^k种排列方式.

（2）无重复排列：从含有n个不同元素的集合中随机抽取k 次，每次取一个取后不放回，将所取元素排成一列，



共有$P_n^k=n(n-1)\ldots(n-k+1)$种排列方式.

（3）组合：从含有n个不同元素的集合中随机抽取

k 个(不考虑元素间的先后次序)，共有

$$C_n^k \equiv \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ 种取法.

排列和组合间的关系

$$P_n^k = C_n^k \, k!$$

例2 从有 9 件正品、3 件次品的箱子中任取两次，

每次取一件，试分别以：

(1)有放回抽样法：即每次抽取的产品观察后放回；

(2)不放回抽样法：即每次抽取产品观察后不放回；

两种抽样方式求事件

$A = \{$取得两件正品$\}$,

$B = \{$第一次取得正品，第二次取得次品$\}$,

$C = \{$取得一件正品一件次品$\}$,

的概率.

例2 从有 9 件正品、3 件次品的箱子中任取两次，每次取一件

$A=\{$取得两件正品$\}$,

$B=\{$第一次取得正品,第二次取得次品$\}$,

$C=\{$取得一件正品一件次品$\}$,

解 1 采取有放回抽样． $n_S=12^2$． $n_A=C_9^1C_9^1=9^2$．

$$P(A)=\frac{9^2}{12^2}=\frac{9}{16}.\qquad n_B=C_9^1C_3^1=9\cdot 3.$$

$$P(B)=\frac{9\cdot 3}{12^2}=\frac{3}{16}.$$

$$n_C=C_9^1C_3^1+C_3^1C_9^1=9\cdot 3+3\cdot 9=54.$$

$$P(C)=\frac{9\cdot 3+3\cdot 9}{12\cdot 11}=\frac{9}{22}.$$

例2 从有 9 件正品、3 件次品的箱子中任取两次，每次取一件 $A=\{$取得两件正品$\}$,

$B=\{$第一次取得正品,第二次取得次品$\}$,

$C=\{$取得一件正品一件次品$\}$,

2 采取不放回抽样． $n_S=12\cdot 11$． $n_A=C_9^1C_8^1=9\cdot 8$．

$$P(A)=\frac{9\cdot 8}{12\cdot 11}=\frac{6}{11}.$$

$n_B=C_9^1C_3^1=9\cdot 3$．

$$P(B)=\frac{9\cdot 3}{12\cdot 11}=\frac{9}{44}.$$

$n_C=C_9^1C_3^1+C_3^1C_9^1=9\cdot 3+3\cdot 9$．

$$P(C)=\frac{9\cdot 3+3\cdot 9}{12\cdot 11}=\frac{9}{22}.$$

例3 从有 9 件正品、3件次品的箱子中任取两件产品(即一次抽取两件产品),求事件

$$A=\{\text{取得两件正品}\},$$

$$C=\{\text{取得一件正品一件次品}\},$$

的概率.

解

$$P(A)=\frac{C_9^2}{C_{12}^2}=\frac{\dfrac{9\cdot 8}{2\cdot 1}}{\dfrac{12\cdot 11}{2\cdot 1}}=\frac{6}{11}.$$

事件 C 中所含有的基本事件数为 $C_9^1\,C_3^1.$

所以

$$P(A)=\frac{C_9^1C_3^1}{C_{12}^2}=\frac{9\cdot 3}{\dfrac{12\cdot 11}{2\cdot 1}}=\frac{9}{22}.$$

例4 将 n 只球随机地放入 N $(N>n)$ 个盒子中去，每球放入各盒等可能，试求下列事件的概率：

（1）$A=\{$指定的n个盒子各含一个球$\}$

（2）$B=\{$每个盒子至多一个球$\}$

例4 将 n 只球随机地放入 N $(N>n)$ 个盒子中去，每球放入各盒等可能，试求下列事件的概率：

（3）C={某指定盒子恰含 m 个球}

例如：假设每人的生日在一年365天中的任一天是等可能的，即都为：1/365，则随机选取**n** 个人，它们的生日各不相同的概率问题，可以将365天看作盒子，**n** 个人看作 **n** 个球。

设A="n个人生日各不相同"

故所求概率为：$$P(A)=\frac{P_{365}^{n}}{365^{n}}$$

所以 **n**个人中至少有两人生日相同的概率为：

$$P(\overline{A})=1-\frac{P_{365}^{n}}{365^{n}}$$

经计算可得下述结果：

n	20	30	40	50	64	100
P	0.41	0.71	0.89	0.97	0.997	0.9999997

从表中可看出，在仅有64人的班级里“至少有两人生日相同”这事件的概率与1相差无几。

例5 公平抽签问题：

袋中有 a个白球，b 个彩球，从中逐一摸出，试求第 k 次摸得彩球的概率。

解： 设 A_k =“第 k 次摸得彩球” $(1 \le k \le a+b)$

则样本空间中包含的样本点数为 $\mathrm{n} = (\mathrm{a}+\mathrm{b})!$

事件A_k包含的样本点数为 $r = C_b^1 \cdot (a+b-1)!$

所以

$$P(A_k) = \frac{C_b^1 \cdot (a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{b}{a+b}$$

$$k = 1,2,\cdots a+b$$

例6 口袋中有编号为1，2，…，n的n个球，从中有放回地任取m次，求取出的m个球的最大号码为k的概率。

解：事件 A_k =“取出m个球的最大号码为k”

发生⟺{取到一次k} $\bigcup$ {取到2次k}$\bigcup\cdots\bigcup$ {取到m次k}

事件 B_i =“取出m个球的最大号码小于等于i”

$$P(B_i)=\frac{i^m}{n^m},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

因为$A_k=B_k-B_{k-1}$，且$B_{k-1}\subset B_k$，则

$$P(A_k)=P(B_k-B_{k-1})=P(B_k)-P(B_{k-1})$$

$$=\frac{k^m-(k-1)^m}{n^m},\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

本节基本要求和重点、难点

（1）了解概率的统计定义、公理化定义、古典概型

（2）熟练掌握**概率的性质**，能够利用概率的性质，通过简单事件的概率，计算复杂事件的概率

（3）熟练计算**古典概型**相关问题