§1.4　条件概率、全概率公式

- 条件概率
- 乘法公式
- 全概率公式

知识回顾

性质1 $P(\varnothing)=0$

性质2 (有限可加性)：设A_1，A_2，…A_n 是n个两两互不相容的事件,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots P(A_n);$$

性质3 $P(\overline{A})=1-P(A)$

性质4 若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

$$P(A)\geq P(B)$$

性质5 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

性质6 (加法公式)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

对任意两个事件A、B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$ ------加法公式

$$P(A - B) = P(A) - P(AB)$$ -------减法公式

问题1: 如何计算 P(AB)? -------乘法公式

设A_1，A_2，…A_n 是n个两两互不相容的事件,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n);$$

若 $A \supset B$，则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$

问题2: A、B满足一定的条件时， 能不能有

P(AB)=P(A)P(B)?

假设某种彩票，号码是一个7位数，每位数都是从0-9十个数中任选一个，我们合伙买了一张彩票，随便填写了一个7位数1234567，

设A={我们能中奖}　　$P(A)=\dfrac{1}{10^7}$

设B={摇号时出现了1,2,3,4,5,6}

在B发生的前提条件下，A发生的概率为

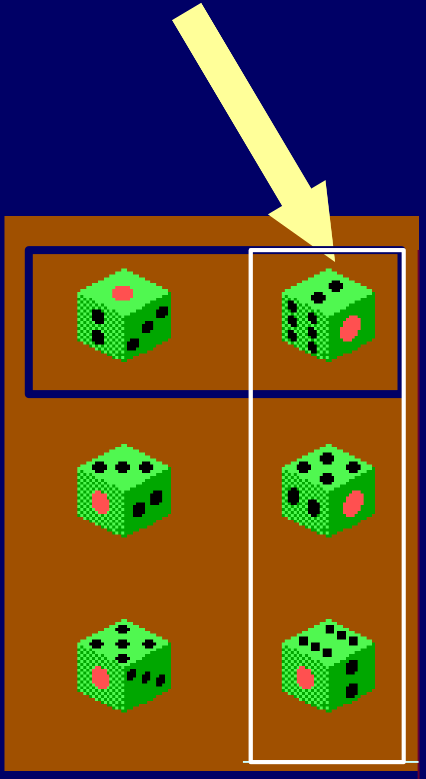
$P=\dfrac{1}{10}$　　　　$P(A|B)$

例1. 掷一颗均匀骰子，A={掷出点数不超过2}={1,2}，

B={掷出偶数点}，则 $P(A)=2/6$, $P(AB)=1/6$，

$P(A|B)=?$

B中共有3个元素,它们的出现是等可能的,其中只有1个在集A中.



于是

$P(A|B)= 1/3.$

容易看到

$$P(A|B) = \frac{1}{3} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

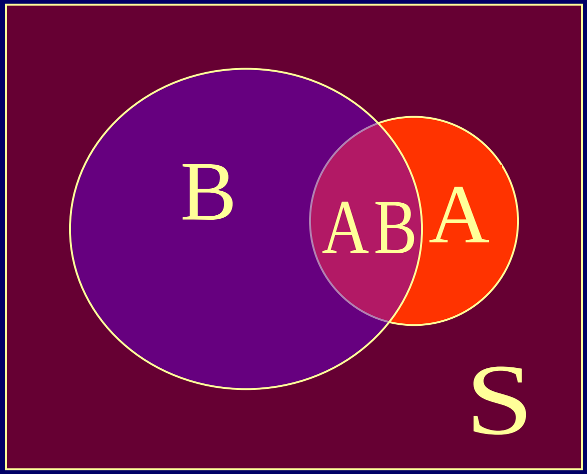
一、条件概率的定义及计算

1. 条件概率的定义

设A、B是两个事件，且$P(B)>0$,则称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (1)$$

为在事件B发生的条件下,事件A发生的条件概率.



性质1　条件概率是概率，即若设$P(B)>0$，则

（1）$P(A|B)\geq 0$，

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

（2）$P(S|B)=1$.

（3）若A_1，A_2，…，A_n，…互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n|B\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n|B).$$

由性质1可见，条件概率具有普通概率的一切性质，如：

(1) $P(\phi \mid A) = 0$ (2)有限可加性 (3)加法公式：

$$P(B_1 \cup B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) - P(B_1 B_2 \mid A)$$

$$P(B_1 - B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_1 B_2 \mid A)$$

$$P(\overline{\mathrm{B}} \mid A) = 1 - P(\mathrm{B} \mid A)$$

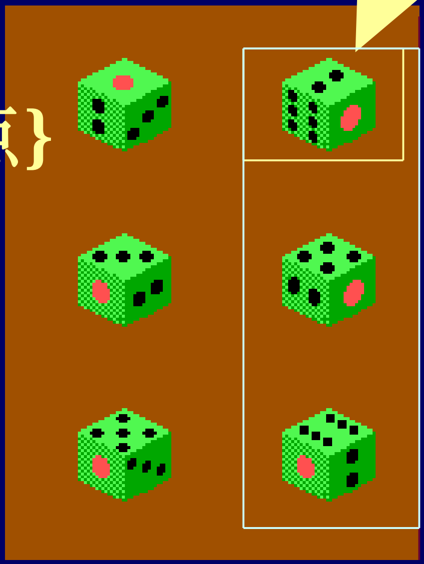
2. 条件概率的计算

1) 用定义计算:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\qquad P(B)>0$$

2)从加入条件后改变了的情况去算

掷骰子



例：A={掷出点数不超过2},B={掷出偶数点}

$$P(A|B)=\frac{1}{3}$$

B发生后的缩减样本空间所含样本点总数

在缩减样本空间中A所含样本点个数

例2 掷两颗均匀骰子,已知第一颗掷出6点,问 “掷出点数之和不小于10”的概率是多少?

解 设A={掷出点数之和不小于10}

B={第一颗掷出6点}

应用 定义

解法1 $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3/36}{6/36}=\frac{1}{2}$$

解法2 $$P(A|B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

在B发生后的缩减样本空间中计算

二、 乘法公式

由条件概率的定义： $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

若已知$P(B)$, $P(A|B)$时, 可以反求$P(AB)$.

即　　若$P(B)>0$,则$P(AB)=P(B)P(A|B)$　　(2)

将A、B的位置对调，有

(2)和(3)式都称为乘法公式，利用它们可计算两个事件同时发生的概率

而　　$P(AB)=P(BA)$

故　　$P(A)>0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$　　(3)

注意$P(AB)$与$P(A\mid B)$的区别！

B发生，
在$P(AB)$中作为结果；
在$P(A|B)$中作为条件.

请看下面的例子

例3　甲、乙两厂共同生产1000个零件，其中 300 件是乙厂生产的．而在这300个零件中，有189个是标准件，现从这1000个零件中任取一个，问这个零件是乙厂生产的标准件的概率是多少？

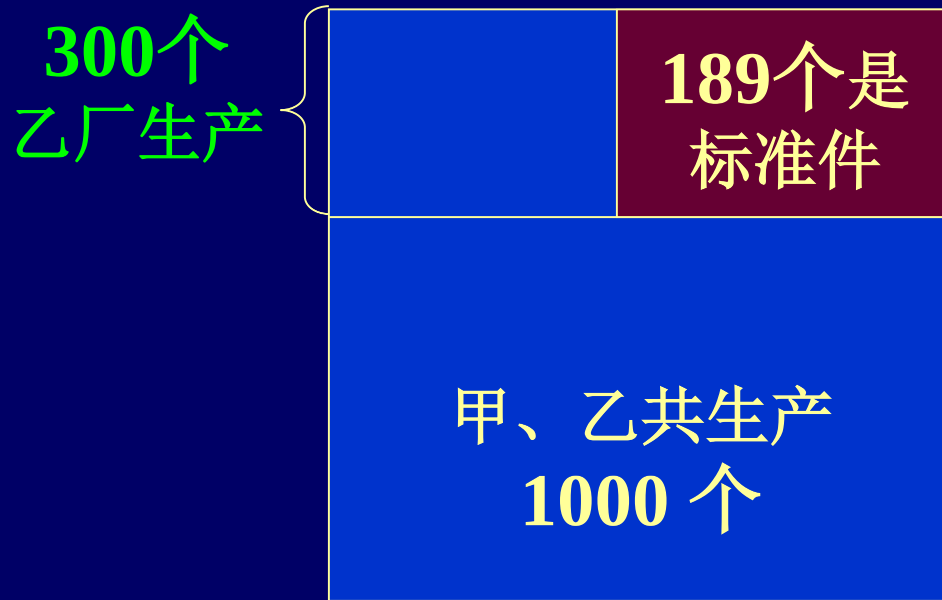
设B={零件是乙厂生产}，A={是标准件}

所求为$P(AB)$.

设B={零件是乙厂生产}

A={是标准件}

所求为$P(AB)$.



若改为“发现它是乙厂生产的,问它是标准件的概率是多少?”

求的是 $P(A|B)$.

B发生,
在$P(AB)$中作为结果;
在$P(A|B)$中作为条件.

乘法定理可以推广到多个事件的积事件的情况.

设 A、B、C 为三个事件,且 $P(AB)>0$,则

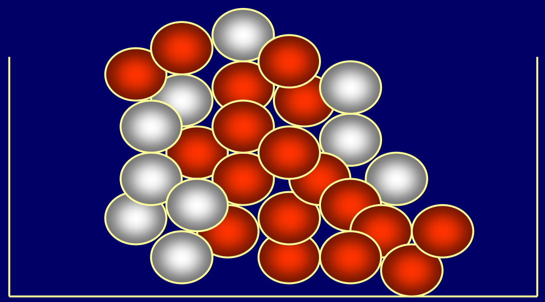
$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB).$$

一般地,设有 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$,$n\geq 2$,并且 $P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$,则由条件概率的定义,可得

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\ldots$$
$$P(A_{n-1}|A_1A_2\ldots A_{n-2}).P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n\text{-}1})$$

乘法公式应用举例

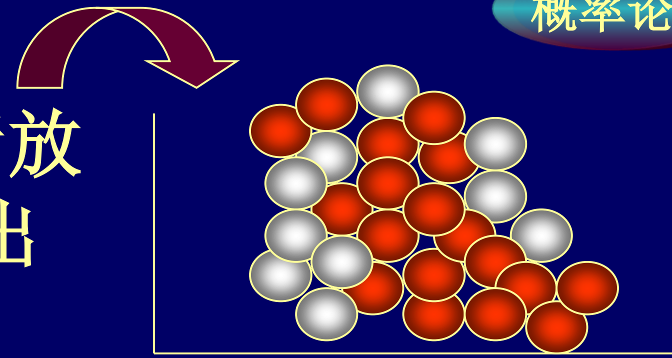
例4.（波里亚罐子模型）



b个白球, r个红球

一个罐子中包含b个白球和r个红球. 随机地抽取一个球，观看颜色后放回罐中，并且再加进 c 个与所抽出的球具有相同颜色的球. 这种手续进行四次 ，试求第一、二次取到白球且第三、四次取到红球的概率.

随机取一个球，观看颜色后放回罐中，并且再加进c个与所抽出的球具有相同颜色的球.

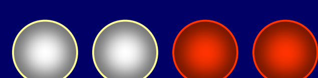


b个白球, r个红球

解　设 W_i={第i次取出是白球}, i=1,2,3,4

R_j={第j次取出是红球}，j=1,2,3,4

于是$W_1W_2R_3R_4$表示事件“连续取四个球，第一、第二个是白球，第三、四个是红球.”

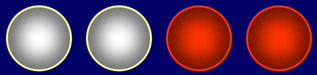


用乘法公式容易求出

$$P(W_1W_2R_3R_4)$$

$$=P(W_1)\mathrm{P}(W_2|W_1)\mathrm{P}(R_3|W_1W_2)\mathrm{P}(R_4|W_1W_2R_3)$$

$$=\frac{b}{b+r}\frac{b+c}{b+r+c}\frac{r}{b+r+2c}\frac{r+c}{b+r+3c}$$



当 c > 0 时，由于每次取出球后会增加下一次也取到同色球的概率．这是一个传染病模型．每次发现一个传染病患者，都会增加再传染的概率．

例5:据以往资料表明某三口之家患某种传染病的概率有以下规律:P{孩子得病}=0.6, P{母亲得病|孩子得病}=0.5, P{父亲得病|母亲及孩子得病}=0.4,求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示孩子、母亲及父亲得病

由题设 $P(A_1)=0.6,\ P(A_2 \mid A_1)=0.5,\ P(A_3 \mid A_1A_2)=0.4$

由乘法公式得

$$P(A_1A_2\overline{A_3}) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(\overline{A_3} \mid A_1A_2)$$

$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)[1 - P(A_3 \mid A_1A_2)]$$

$$= 0.6 \times 0.5 \times (1 - 0.4) = 0.18$$

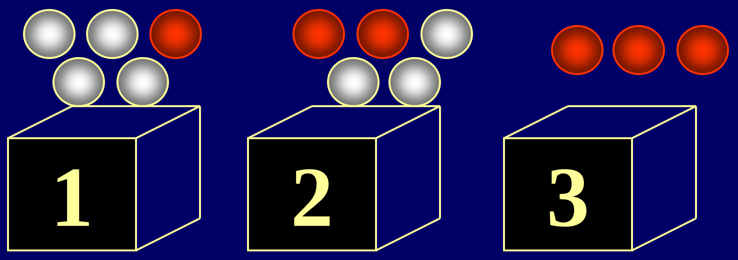
三、全概率公式

看一个例子:

例6. 有三个箱子,分别编号为1,2,3.1号箱装有1个红球4个白球,2号箱装有2红3白球，3号箱装有3 红球. 某人从三箱中任取一箱,从中任意摸出一球,求取得红球的概率.

解 记 B_i={球取自i号箱}, $i=1,2,3$;

A ={取得红球}

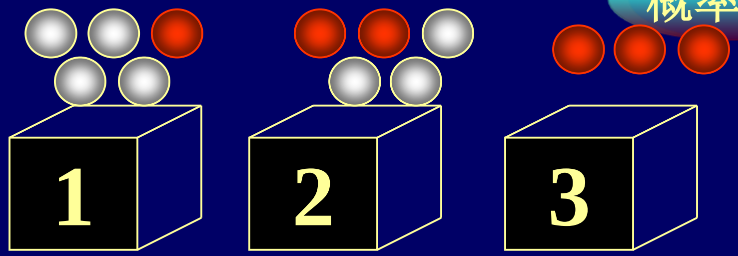


其中 B_1、B_2、B_3两两互斥

A发生总是伴随着B_1，B_2，B_3 之一同时发生,

解　记 B_i={球取自i号箱}, $i=1,2,3$;

A ={取得红球}



$$A = AB_1 \bigcup AB_2 \bigcup AB_3,$$

且 AB_1、AB_2、AB_3 两两互斥

运用加法公式得到

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+P(AB_3)$$

对求和中的每一项运用乘法公式得

$$= \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times 1$$

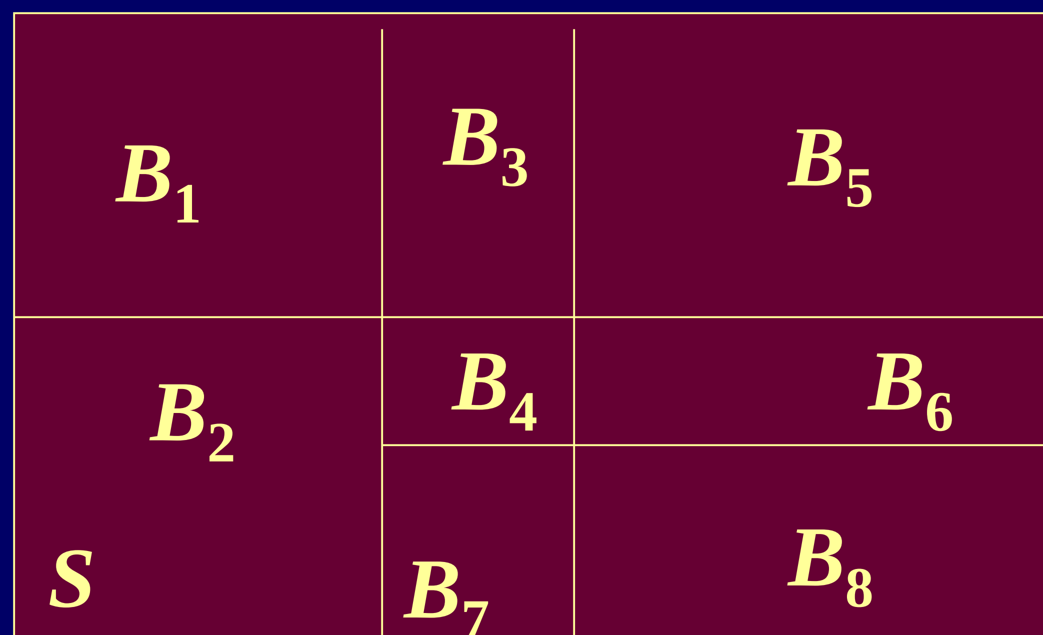
$$=8/15$$

定义：设S是随机试验E的样本空间，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是 E 的一组事件,如果满足

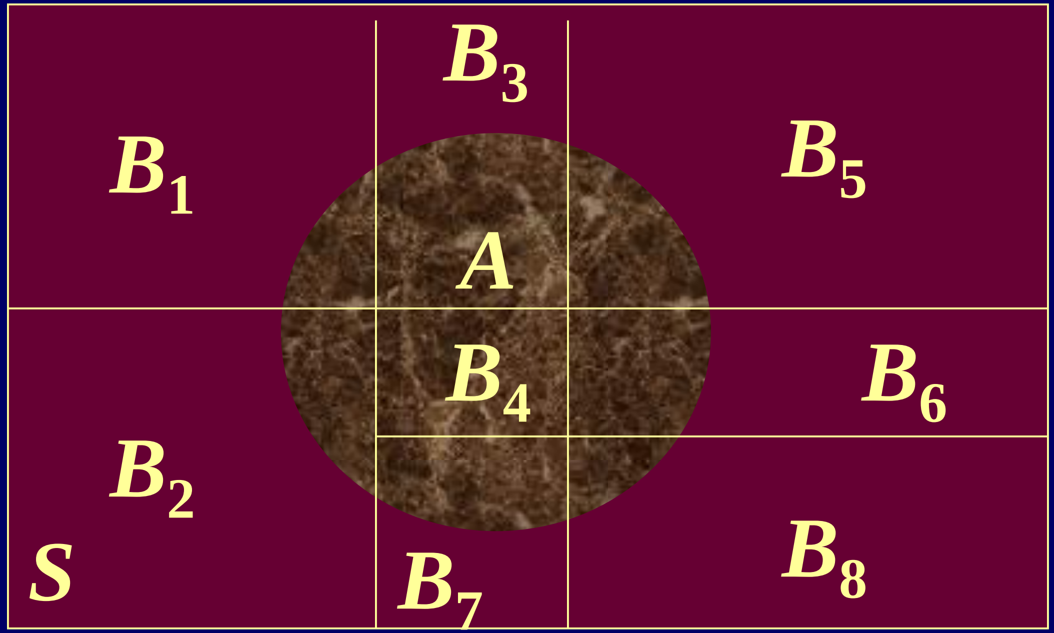
$$(1)\ B_1 B_j = \Phi \qquad (i \neq j)$$

$$(2)\ B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$$

则称 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为完全事件系,或称 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为S的一个划分。



不重复
不遗漏



因为 $A = AS = A(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)$

$$= AB_1 \cup AB_2 \cup \ldots \cup AB_n$$

并且 $AB_i \cap AB_j = \varphi, (i \neq j)$,所以

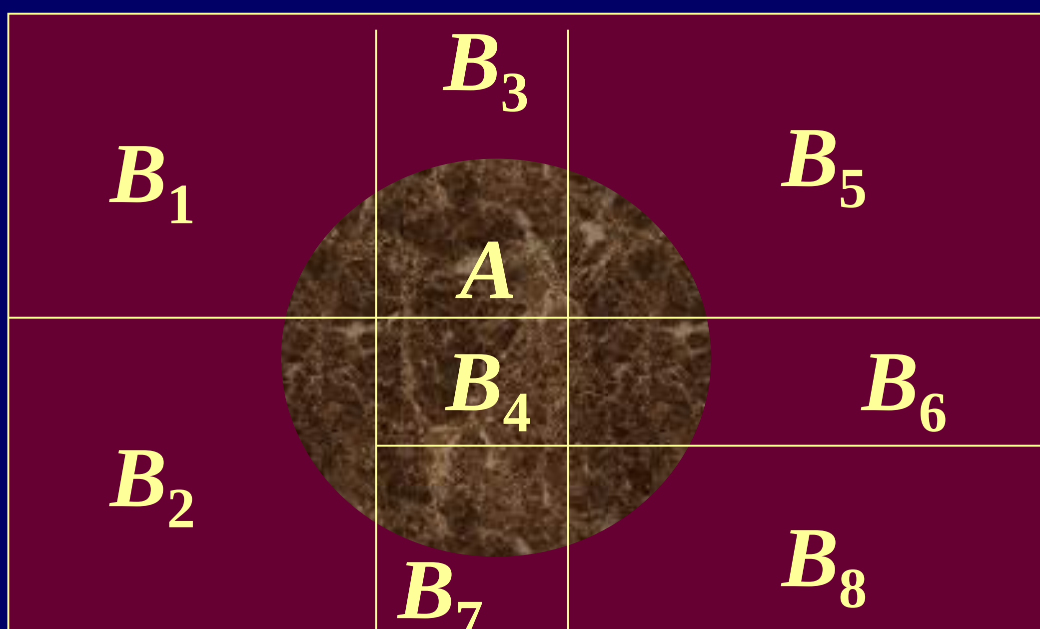
$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_n)$$

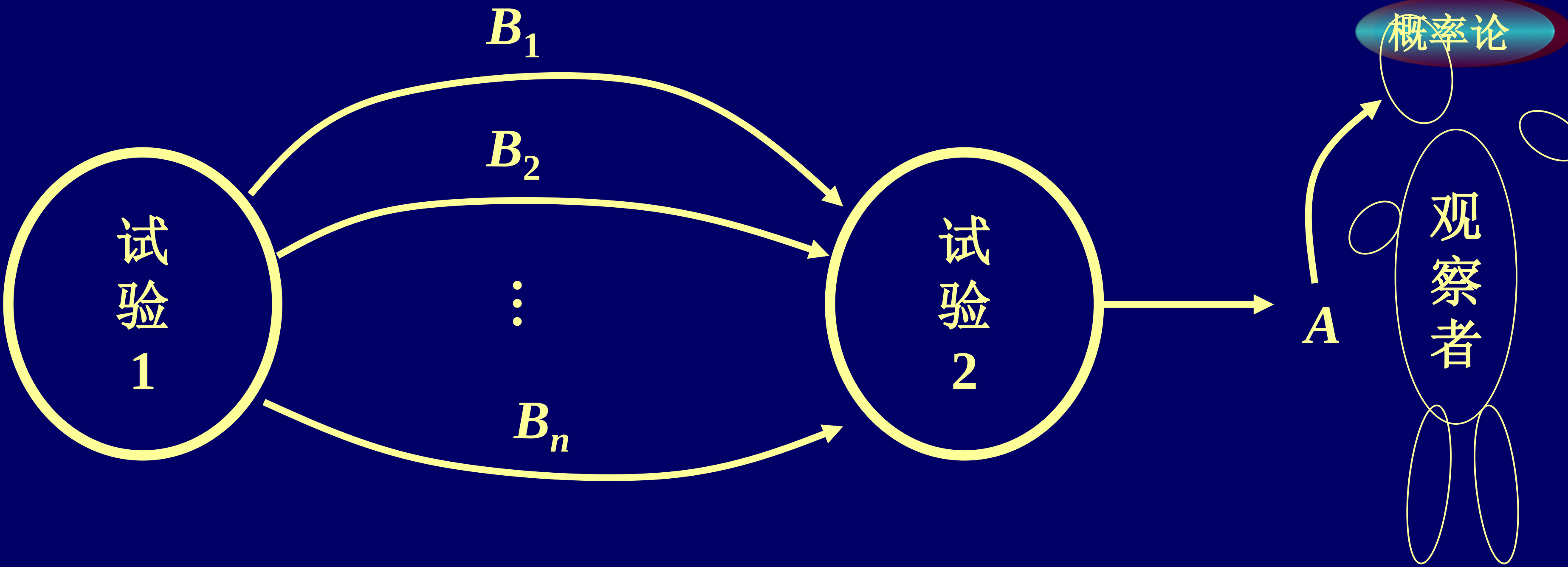
$$= P(B_1)P(A \mid B_1) + \ldots + P(B_n)P(A \mid B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

定理 1 设试验 E 的样本空间为 S ,B_1 ,B_2 ,…,B_n 为 S 的一个划分 ,且 $P(B_i)>0\ (i=1,2,\ldots,n)$,则对样本空间中的任一事件 A ,恒有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$





$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是A发生的所有可能原因

不知原因求A的概率时用全概率公式

例7　已知男子有5%是色盲患者，女子有0.25%是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，则此人是色盲患者的概率是多少？

解：令A={任选一人，此人是色盲}；

B_1={任选一人是男性}，B_2={任选一人是女性}

（1）由全概率公式得

$$\mathrm{P(A)=P}(B_1)\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid B_1)+\mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}(A \mid B_2)$$

$$=0.5\times 5\%+0.5\times 0.25\%$$

$$=2.625\%$$

例8 某口袋中有6个红球，4个白球. 现从袋中随机取走3个球，然后再从袋中任取一球，求此球是红球的概率.

解：设 A={第二次取出的球是红球}

B_i={第一次取出的3个球中有i个红球}，i=0,1,2,3

$$P(B_0)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}\qquad P(B_1)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$$

$$P(B_2)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}\qquad P(B_3)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$$

$$P(A|B_0)=\frac{6}{7},\qquad P(A|B_1)=\frac{5}{7},$$

$$P(A|B_2)=\frac{4}{7},\qquad P(A|B_3)=\frac{3}{7}$$

由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$$

$$=\frac{1}{30}\times\frac{6}{7}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{7}$$

$$=\frac{3}{5}$$

例9. 全概率公式的应用：敏感性问题调查

现要调查学生的考试作弊问题，估计出作弊的比率

调查方案：

一、先设计两个问题

问题1：你的生日是否在7月1日之前？

问题2：考试中你是否做过弊？

二、被调查者从箱子中随机取球，若抽到红球回答问题1，若抽到白球回答问题2，看完后放回

三、回答答卷 是或否

怎样来估计作弊的概率?