知识回顾

1. 条件概率 $$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

2. 乘法公式

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

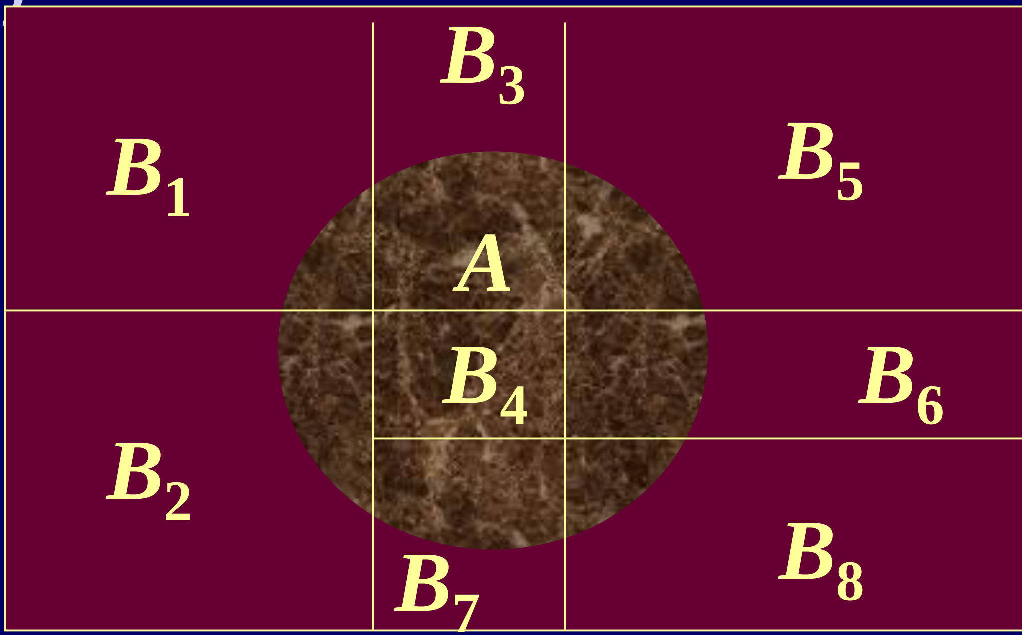
$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB).$$

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\ldots$$
$$P(A_{n-1}|A_1A_2\ldots A_{n\text{-}2}).P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n\text{-}1})$$

定理 1 设试验 E 的样本空间为 S，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0\ (i = 1,2,\ldots,n)$，则对样本空间中的任一事件 A，恒有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$



例10. 全概率公式的应用：敏感性问题调查

现要调查学生的考试作弊问题，估计出作弊的比率

调查方案：

一、先设计两个问题

问题1：你的生日是否在7月1日之前？

问题2：考试中你是否做过弊？

二、被调查者从箱子中随机取球，若抽到红球回答问题1，若抽到白球回答问题2，看完后放回

三、回答答卷 是或否

怎样来估计作弊的概率？

设 B_i={回答问题i},i=1,2， A ={回答是}

$$P(B_1)=\frac{a}{a+b},P(B_2)=\frac{b}{a+b}\quad P(A\mid B_1)=\frac{1}{2},P(A\mid B_2)=p$$

由全概率公式得

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)$$

$$=\frac{a}{a+b}\frac{1}{2}+\frac{b}{a+b}p \qquad p=\left[{}^{k}\!/_{n}-\frac{1}{2}\frac{a}{a+b}\right].\frac{a+b}{b}$$

$$={}^{k}\!/_{n}$$

例 11 某工厂有4条流水线生产同一产品，该4条流水线的产量分别占总产量的15%、20%、30%和35%，不合格品率依次为0.05、0.04、0.03及0.02。

问题1：现从出厂产品中任取一件，恰好抽到 不合格品的概率为多少

解：令A={任取一件，恰好抽到不合格品}；

B_i ={任取一件，恰好抽到第i条流水线的产品}，i=1,2,3,4

由全概率公式得 $P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A\mid B_i)$

$=0.15\times0.05+0.20\times0.04+0.30\times0.03+0.35\times0.02=3.25\%$

问题2：若该厂规定，出了不合格品要追究有关流水线的责任。现在出厂产品中任取一件，结果为不合格品，但该产品的标志已脱落，厂方如何处理这件不合格品比较合理？比方说第4条流水线应承担多大责任？

$$P(B_4 \mid A) = \frac{P(AB_4)}{P(A)} = \frac{P(B_4)P(A \mid B_4)}{\sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A \mid B_i)} = \frac{0.35 \times 0.02}{0.0325} \approx 21.5\%$$

Bayes公式

注： **P(Bi)** 先验概率。由过去的知识和经验确定，试验前就已知

P(Bi|A) 后验概率。 试验结束后利用新的信息对过去的认识进行修正

由结果推原因

定理2(贝叶斯公式)

设试验 E 的样本空间为 S，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是样本空间S的一个划分，A是一事件，且 P(A)>0，则有

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

贝叶斯公式的应用.

例12 某一地区患有癌症的人占0.005，患者对一种试验反应是阳性的概率为0.95，正常人对这种试验反应是阳性的概率为0.04，现抽查了一个人，试验反应是阳性，问此人是癌症患者的概率有多大?

解： 设 C={抽查的人患有癌症}，A={试验结果是阳性}，

则 $\overline{C}$表示"抽查的人不患癌症".

已知

$$P(C) = 0.005, \quad P(\overline{C}) = 0.995,$$

$$P(A \mid C) = 0.95, \quad P(A \mid \overline{C}) = 0.04$$

求 $P(C|A)$.

由贝叶斯公式，可得

$$P(C\mid A)=\frac{P(C)P(A\mid C)}{P(C)P(A\mid C)+P(\bar{C})P(A\mid \bar{C})}$$

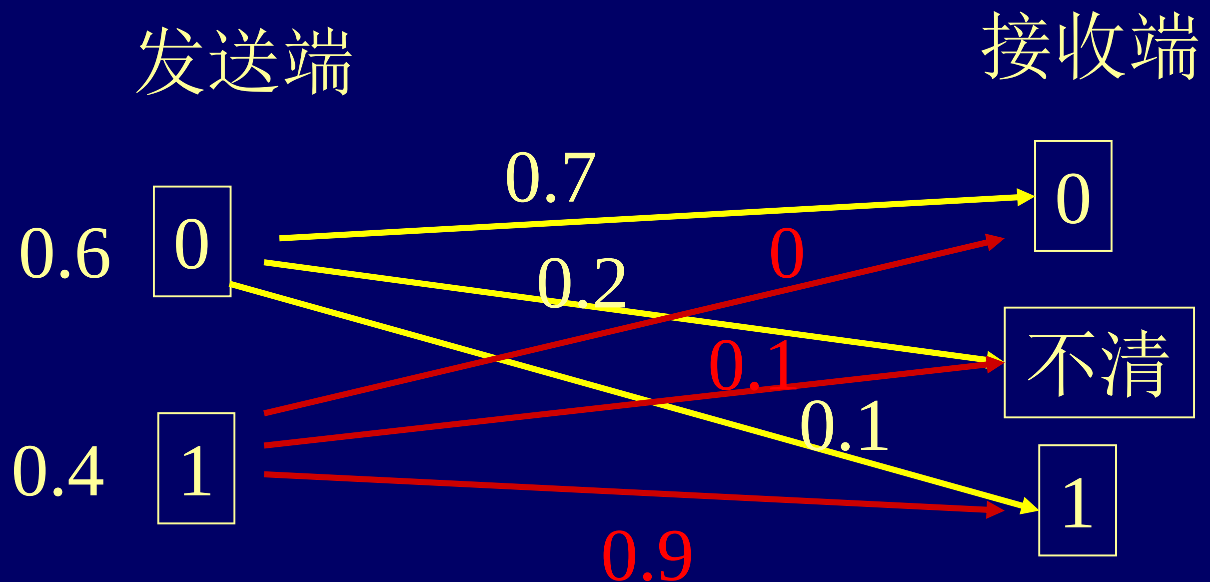
$$=\frac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95+0.995\times 0.04}=\mathbf{\mathit{0.1066}}$$

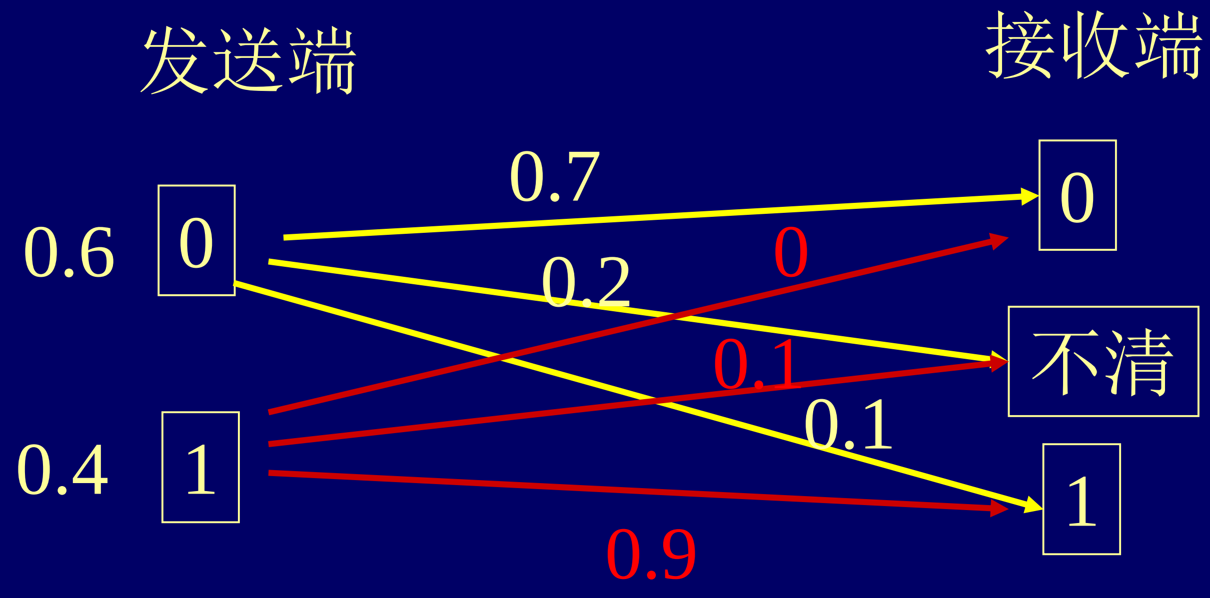
现在来分析一下结果的意义.

1. 这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有无意义？

2. 检出阳性是否一定患有癌症?

例13. 在数字通讯中，由于随机干扰，发出信号“0”时,收到信号"0","不清","1"的概率分别是0.7,0.2和0.1;当发信号"1"时,收到信号为"1","不清"和"0"的概率分别是0.9,0.1和0,如果整个发报过程中"0"和"1"出现的概率分别是0.6和0.4,当收到"不清"时,试推测原发信号是什么?





解 设 $B=\{$发出信号"0"$\}$,则 $\overline{B}=\{$发出信号"1"$\}$

$A=\{$收到信号"不清"$\}$,

则 B 与 $\overline{B}$ 为 $\Omega=\{$发出信号"0"或"1"$\}$的一个划分.

故收到信号为"不清"而原发信号为"0"的概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})}$$

故收到信号为"不清"而原发信号为"0"的概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})}$$

$$=\frac{0.6\times 0.2}{0.6\times 0.2+0.4\times 0.1}=0.75.$$

而收到信号为"不清"而原发信号为"1"的概率为

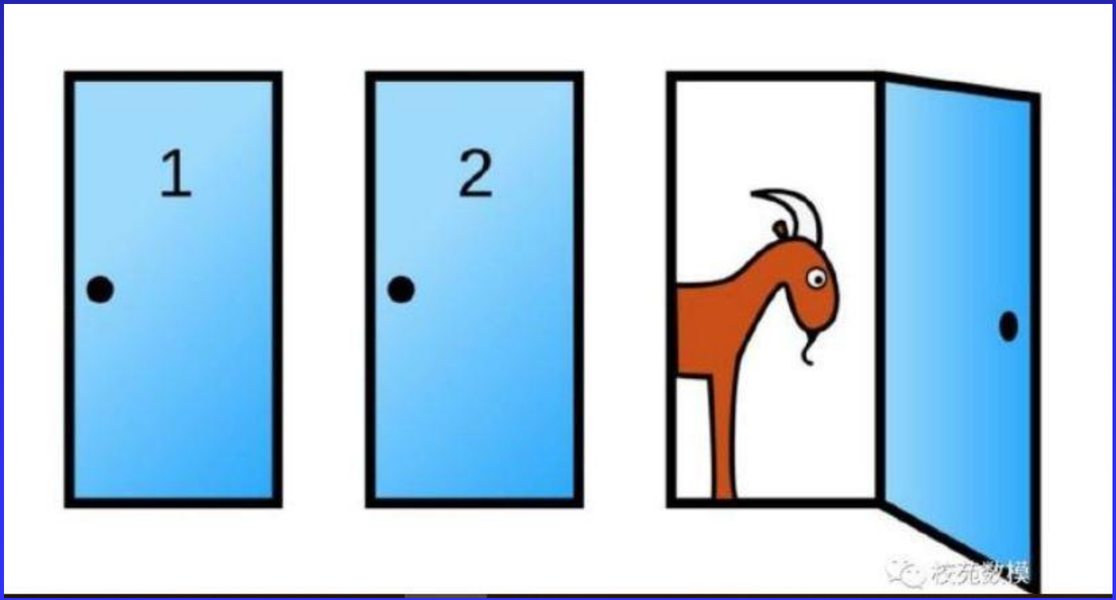
$$P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)=1-0.75=0.25.$$

因此,可以推测原发信号很可能(确切地说有75%的可能)是"0".

思考题：三门问题

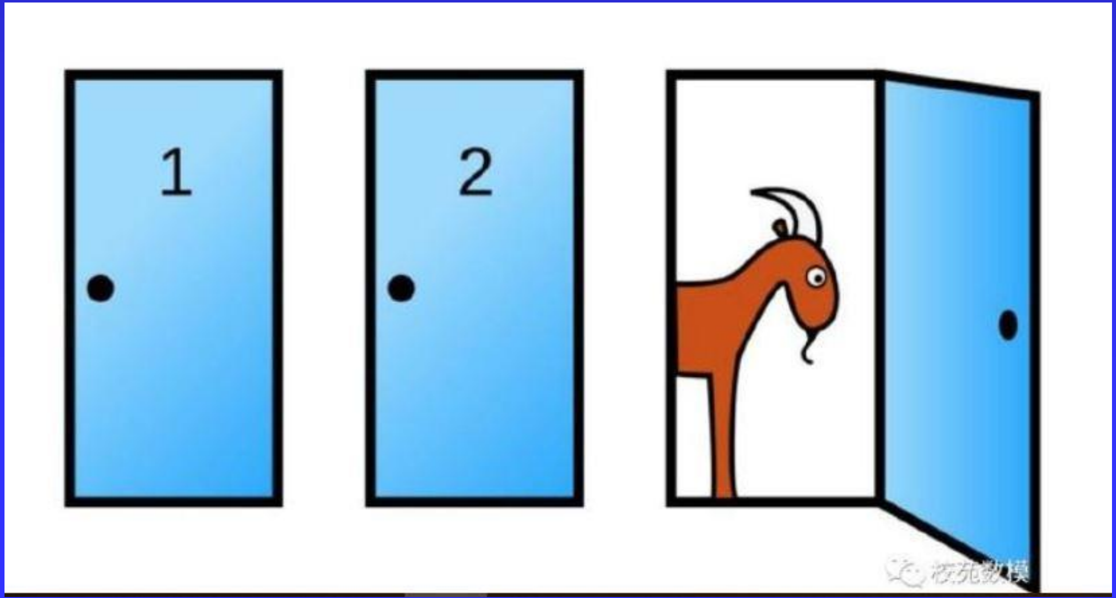
该问题出自美国一档电视游戏节目Let's Make a Deal,

这个游戏的玩法如下:



现场有三扇关闭了的门，其中一扇的后面有辆跑车，而另外两扇门后面则各藏有一只山羊。参赛者需要从中选择一扇门，如果参赛者选中后面有车的那扇门就可以赢得这辆跑车。当参赛者选定了一扇门，但未去开启它的时候，节目主持人会开启剩下两扇门的其中一扇，露出其中一只山羊。接下来主持人会问参赛者要不要换另一扇仍然关上的门。

问题是：换另一扇门是否会增加参赛者赢得跑车的概率？

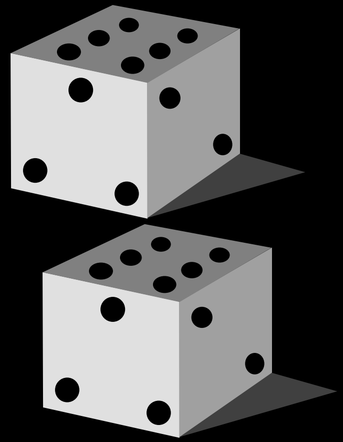


§1.5　事件的独立性

一、两事件的独立性

先看一个例子：

将一颗均匀骰子连掷两次，



设

A={第二次掷出6点}，

B={第一次掷出6点}，

显然　　$P(A|B)=P(A)$

由乘法公式知，当事件A、B独立时，有

$$P(AB)=P(A)\,P(B)$$

$$P(AB)=P(A|B)P(B)$$

用$P(AB)=P(A)\,P(B)$刻划独立性,比用

$$P(A|B) = P(A)$$

或

$$P(B|A) = P(B)$$

更好,它不受 $P(B)>0$ 或 $P(A)>0$ 的制约.

两事件独立的定义

若两事件A、B满足

$$P(AB)= P(A)\,P(B) \qquad (1)$$

则称A、B相互独立，简称A、B独立.

否则称A与B不独立或相依

性质 1 事件 A、B 独立的充要条件为

$$P(A\mid B)=P(A),P(B)>0$$

或

$$P(B\mid A)=P(B),P(A)>0$$

例　从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 A={抽到K}，B={抽到的牌是黑色的}

问事件A、B是否独立？

解　由于 $P(A)=4/52=1/13$,　$P(B)=26/52=1/2$,

$P(AB)=2/52=1/26$.

可见，　$P(AB)=P(A)P(B)$

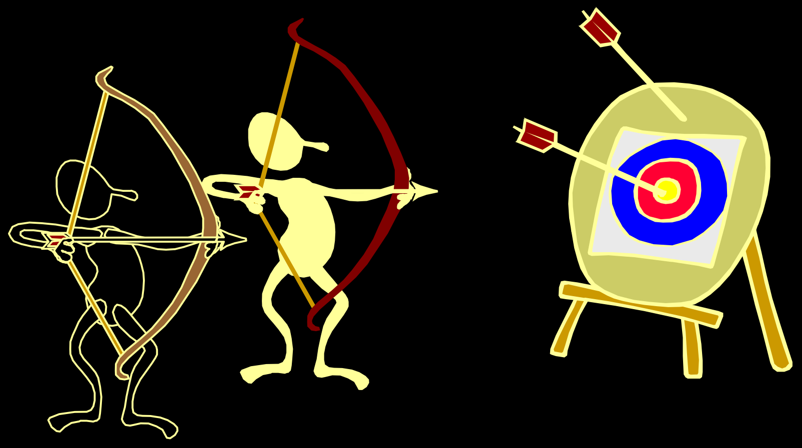
故　事件A、B独立.

前面我们是根据两事件独立的定义作出结论的，也可以通过计算条件概率去做:

从一副不含大小王的扑克牌中任取一张,记 A={抽到K}, B={抽到的牌是黑色的}, 则

$$P(A)=1/13,\ P(A|B)=2/26=1/13$$

可见 $P(A)=P(A|B)$, 即事件A、B独立.



例如

甲、乙两人向同一目标射击,记 A={甲命中}, B={乙命中}，A与B是否独立？

又如： 一批产品共n件，从中抽取2件，设

A_i={第i件是合格品} i=1,2

若抽取是有放回的，则A_1与A_2独立.

因为第二次抽取的结果

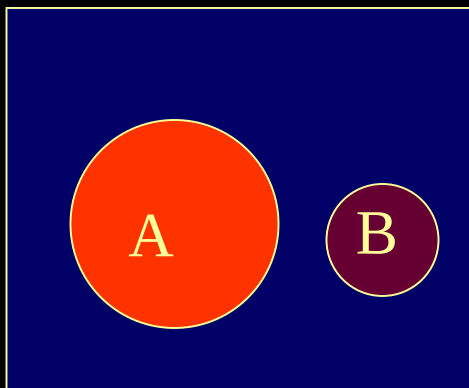
不受第一次抽取的影响.

若抽取是无放回的，则A_1与A_2不独立.

因为第二次抽取的结果受到第一次

抽取的影响.

请问：如图的两个事件是独立的吗？



我们来计算：　$P(AB)=0$

而$P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$

即　$P(AB) \neq P(A)P(B)$

故 A、B不独立

即 若A、B互斥，且$P(A)>0$, $P(B)>0$,则A与B不独立.

反之，若A与B独立，且$P(A)>0$,$P(B)>0$,则A 、B不互斥.

性质 2 若两事件A、B独立, 则$\overline{A}$与B, A与$\overline{B}$, $\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立.

证明　仅证A与$\overline{B}$独立

A、B独立

$$P(A\overline{B})= P(A - AB)$$

概率的性质

$$= P(A)- P(AB) = P(A)- P(A)P(B)$$

$$=P(A)[1- P(B)]= P(A)P(\overline{B})$$

故 A与$\overline{B}$独立

二、多个事件的独立性

定义 设 A、B、C 为三事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{cases}$$

则称三事件 A、B、C 为两两独立的事件.

当事件A、B、C 两两独立时,等式

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

不一定成立.

例如 $S=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}, A=\{\omega_1,\omega_2\}, B=\{\omega_1,\omega_3\},$

$C=\{\omega_1,\omega_4\}$,则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$,并且,

$$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B),$$

$$P(AC)=\frac{1}{4}=P(A)P(C),$$

$$P(BC)=\frac{1}{4}=P(B)P(C).$$

即事件 A、B、C 两两独立.

但是 $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C).$

对于三个事件A、B、C，若

$$
\begin{cases}
P(AB) = P(A)P(B) \\
P(AC) = P(A)P(C) \\
P(BC) = P(B)P(C) \\
P(ABC) = P(A)P(B)P(C)
\end{cases}
$$

四个等式同时成立,则称事件A、B、C相互独立.

此定义可推广到任意有限多个事件的情形：

定义 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 n 个事件,如果对于任意的 $k\ (1 < k \le n)$,和任意的 $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n$ 有等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为相互独立的事件.

请注意多个事件两两独立与相互独立的区别与联系

对 $n\ (n > 2)$ 个事件

相互独立 $\longrightarrow$ 两两独立

$\longleftarrow$?

- 若 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立,将这 n 个事件任意分成 k 组,同一个事件不能同时属于两个不同的组,则对每组的事件进行求和、积、差、对立等运算所得到的 k 个事件也相互独立.

例 已知事件 *A*, *B*, *C* 相互独立,证明事件 $\overline{A}$ 与 $B \cup C$ 也相互独立

证

利用独立事件的性质计算其并事件的概率

若 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P(A_i)\right)$$

三、独立性的概念在计算概率中的应用

例1 某彩票每周开奖一次，每次提供十万分之一的中奖机会，且各周开奖是相互独立的.若每周买一张彩票，坚持十年（每年52周），从未中奖的概率是多少？

解：A_i =“第i次开奖不中奖”，i=1，2，…，520

则 $A_1, A_2, \cdots, A_{520}$ 相互独立 .

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{520}) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_{520})$$

$$= (1-10^{-5})^{520} = 0.9948$$

例2 设有两门高射炮,每一门击中飞机的概率都是 0.6 ,求下列事件的概率：

(1)同时发射一发炮弹而击中飞机的概率是多少?

(2)若有一架敌机入侵领空,欲以99%以上的概率击中它 ,问至少需要多少门高射炮 ?

解 设 $A_k = \{$第 k 门高射炮发射一发炮弹而击中飞机$\}$,

$k = 1,2$,则 A_k 之间相互独立 ,且 $P(A_k) = 0.6$,于是

$$(1)\ P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = 1 - 0.4^2 = 0.84 .$$

(2)设至少需要n门高射炮,由题知

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}\right)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \dots \overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\dots P(\overline{A}_n)$$

$$= 1 - 0.4^n > 0.99$$

即

$$(0.4)^n < 0.01,$$

解之得，

$$n > \frac{\ln 0.01}{\ln 0.4} \approx 5.026.$$

例 3　甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为0.4、0.5、0.7. 飞机被一人击中而击落的概率为0.2,被两人击中而击落的概率为0.6, 若三人都击中, 飞机必定被击落, 求飞机被击落的概率.

解

设A={飞机被击落}

B_i={飞机被i人击中}, $i=1,2,3$

则　$A=B_1A+B_2A+B_3A$

依题意,

$P(A|B_1)=0.2$,

$P(A|B_2)=0.6$,

$P(A|B_3)=1$

由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

为求$P(B_i)$，

设 H_i={飞机被第i人击中}，i=1,2,3

可求得

$$P(B_1)=P\left(H_1\overline{H_2}\,\overline{H_3}\cup\overline{H_1}H_2\overline{H_3}\cup\overline{H_1}\,\overline{H_2}H_3\right)$$

$$P(B_2)=P\left(H_1H_2\overline{H_3}\cup\overline{H_1}H_2H_3\cup H_1\overline{H_2}H_3\right)$$

$$P(B_3)=P\left(H_1H_2H_3\right)$$

将数据代入计算得

$$P(B_1)=0.36;P(B_2)=0.41;P(B_3)=0.14.$$

于是

$$P(A)=P(B_1)P(A\,|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

$$=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1$$

$$=0.458$$

即飞机被击落的概率为0.458.

例4. 口袋里装有a+b枚硬币，其中b枚硬币是废品（两面都是国徽）. 从口袋中随机取出1枚硬币，并把它独立的抛n次，结果发现向上的一面全是国徽，试求这枚硬币是废品的概率。

解：令B_1={这枚硬币是废品}，B_2={这枚硬币是正品}，

A={独立抛n次全是国徽}

例4. 口袋里装有a+b枚硬币，其中b枚硬币是废品（两面都是国徽）. 从口袋中随机取出1枚硬币，并把它独立的抛n次，结果发现向上的一面全是国徽，试求这枚硬币是废品的概率。

解：令B_1={这枚硬币是废品}，B_2={这枚硬币是正品}，A={独立抛n次全是国徽}

$$P(B_1)=\frac{b}{a+b},\quad P(B_2)=\frac{a}{a+b},\quad P(A\mid B_1)=1,\quad P(A\mid B_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)=\frac{b}{a+b}\times 1+\frac{a}{a+b}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

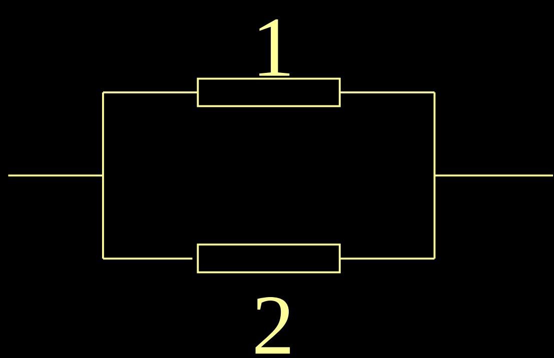
$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{a}{a+b}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}=\frac{2^n b}{a+2^n b}$$

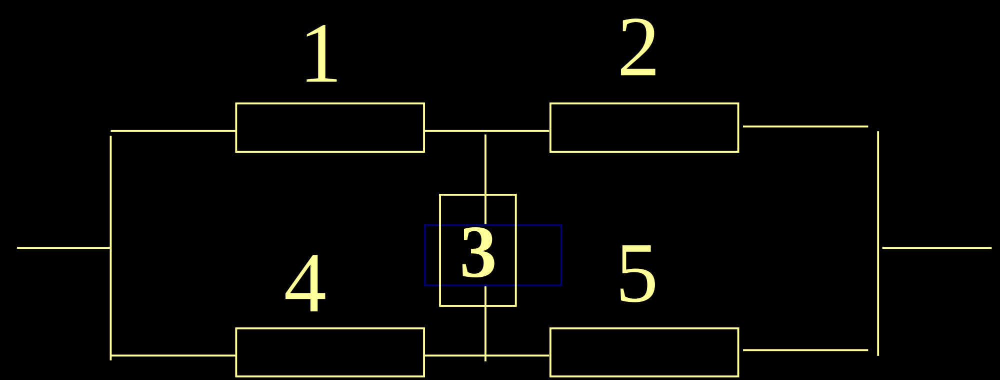
例5 系统的可靠性问题

一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性.

系统由元件组成, 常见的元件连接方式:

(1)串联





(2)并联

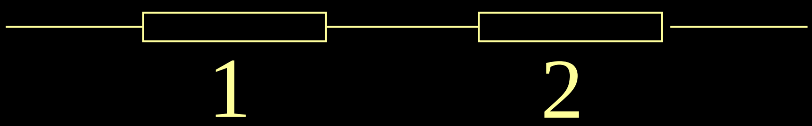
(3)5个元件组成的桥式系统

假设这里所有元件都独立工作。设每个元件正常工作的概率为$p=0.9$，求以上系统的可靠性.

解：　记 S_i="第i个系统正常进行"

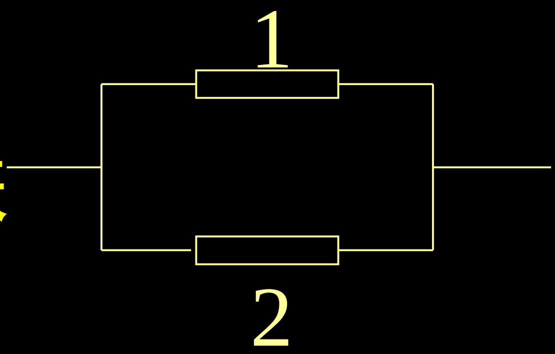
A_i="第i个元件正常工作"

(1)串联



$$P(S_1)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=p^2=0.81$$

(2)并联

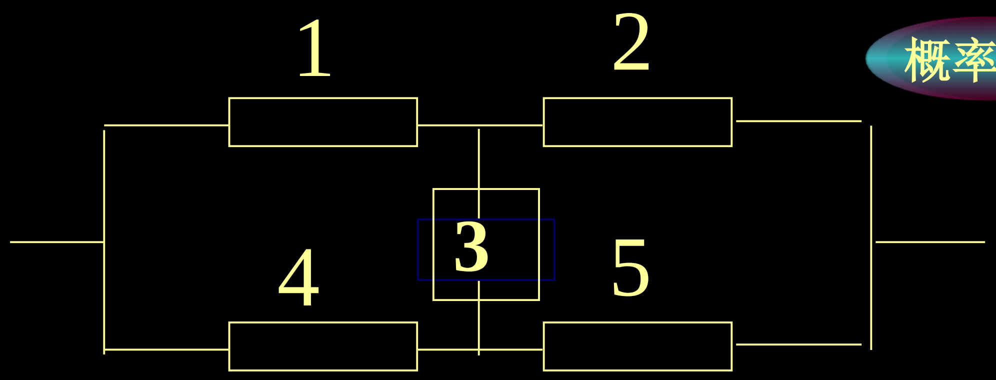


$$P(S_2)=P(A_1\cup A_2)$$

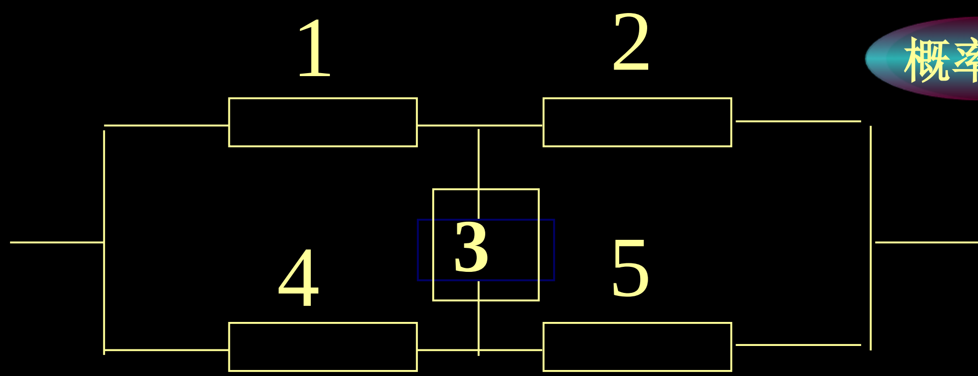
$$=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$$

$$=2p-p^2=0.99$$

(3)5个元件组成的桥式系统



(3)5个元件组成的桥式系统



$$P(S_3)=P(A_3)P(S_3|A_3)+P(\overline{A}_3)P(S_3|\overline{A}_3)$$

$$P(S_3|A_3)=P((A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5))$$

$$=P(A_1\cup A_4)P(A_2\cup A_5)=[1-(1-p)^2]^2=0.9801$$

$$P(S_3|\overline{A}_3)=P(A_1A_2\cup A_4A_5)=1-(1-p^2)^2=0.9639$$

$$P(S_3)=P(A_3)P(S_3|A_3)+P(\overline{A}_3)P(S_3|\overline{A}_3)$$

$$=0.9\times 0.9801+0.1\times 0.9639=0.9785$$

四、 试验的独立性

定义4 设有两个试验E_1和E_2，假如试验E_1的任一结果（事件）与试验E_2的任一结果（事件）都是相互独立的事件，则称这两个试验相互独立。

(扩展）设有n个试验$E_1,E_2,\cdots E_n$，假如试验E_1的任一结果，试验E_2的任一结果，$\cdots E_n$的任一结果都是相互独立的事件，

则称试验$E_1,E_2,\cdots E_n$相互独立。

若n个独立试验还是相同的，则称其为n重独立重复试验

伯努利
Jacob Bernoulli
1654-1705

瑞士数学家

概率论的奠基人

伯努利试验

伯努利试验：

每次试验结果有且仅有两种情况：A 和 $\overline{A}$

将这试验独立地重复进行n次，称为n重贝努里试验

它具有如下四个特征

(1) 在相同条件下进行n次重复试验；

(2) 每次试验结果有且仅有两种情况：A 和 $\overline{A}$

(3) 每次试验是相互独立的；

(4) 每次试验中 $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p$ 。

n重Bernoulli试验中事件 A 出现 k 次的概率 记为 $P_n(k)$

$$0 \le k \le n$$

B_k = “在n重贝努里试验中事件A恰好发生了k次”，

$$P(\underbrace{A \cdot A \cdots\cdots A}_{k} \cdot \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdots\cdots \overline{A}}_{n-k}) = p \cdot p \cdot\cdot p \cdot (1-p) \cdot\cdot (1-p) = p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P_n(k) = P(B_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0,1,2,\cdots,n$$

由于 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0,1,2,\cdots,n)$ 恰好是 $[(1-p)+p]^n$

按二项公式展开时的各项，所以上述公式称为二项概率公式。

练习. 设某工厂生产的每台仪器以概率0.7可以直接出厂；以概率0.3需要进一步调试，经调试后以概率0.8可以出厂，以概率0.2定为不合格品不能出厂. 现在该厂生产了n(n>1)台仪器，求所有仪器都能出厂的概率.

练习．设某工厂生产的每台仪器以概率0.7可以直接出厂；以概率0.3需要进一步调试，经调试后以概率0.8可以出厂，以概率0.2定为不合格品不能出厂．现在该厂生产了n(n>1)台仪器，求所有仪器都能出厂的概率.

解：令B_1={任选一台仪器，可以直接出厂}，

B_2={任选一台仪器，需要调试}，A={任选一台仪器可以出厂}　C={n台仪器都能出厂}

$$P(B_1)=0.7,\ P(B_2)=0.3,\ P(A|B_1)=0.1,\ P(A|B_2)=0.8$$

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$

$$=0.7\times1+0.3\times0.8=0.94$$

$$P(C)=[P(A)]^n=0.94^n$$

本节基本要求和重点、难点

（1）了解条件概率的定义

（2）熟练掌握概率的乘法公式

（3）熟练掌握全概率公式和Bayes公式，并能熟练计算相应问题的概率。