概率论与数理统计的研究对象

随机现象的统计规律性

概率论与数理统计的区别

概率论主要研究描述随机现象的规律性所用的数学工具

数理统计主要研究分析数据的方法手段

描述随机现象的规律性所用的数学工具，----函数

第一章给出的工具---事件的概率

随机变量、分布列、分布函数、密度函数、数字特征、特征函数等

第二章　　随机变量及其分布

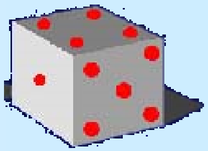
§2.1 随机变量的概念

一、随机变量的定义

二、引入随机变量的意义

三、随机变量的分类

一、随机变量的定义



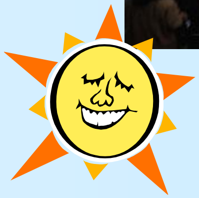
常见的两类试验结果：

1、示数的一试验结果本身就是一个数

例如，掷一颗骰子面上出现的点数；

每天进入地铁站的人数；

三月份新出生婴儿的个数；



三月份南京的最高温度；降雨量

…

2、示性的一试验结果看来与数值无关

例如明天天气（晴，多云…）；

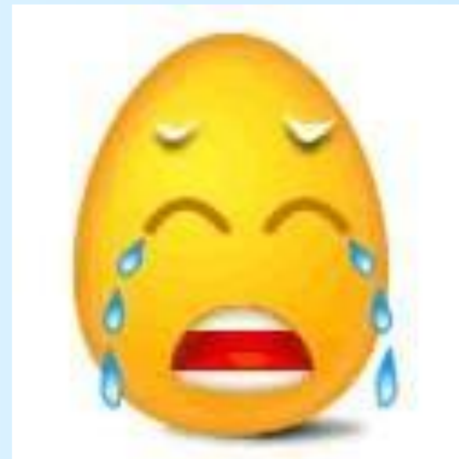
化验结果（阳性，阴性）…

例 如 掷一枚硬币，令：

$$X=\begin{cases}1 & \text{掷硬币出现正面}\\ 0 & \text{掷硬币出现反面}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1 & \text{化验结果为阳性}\\ 0 & \text{化验结果为阴性}\end{cases}$$

考试后…



分数 ≥ 60

万岁！万万岁！！

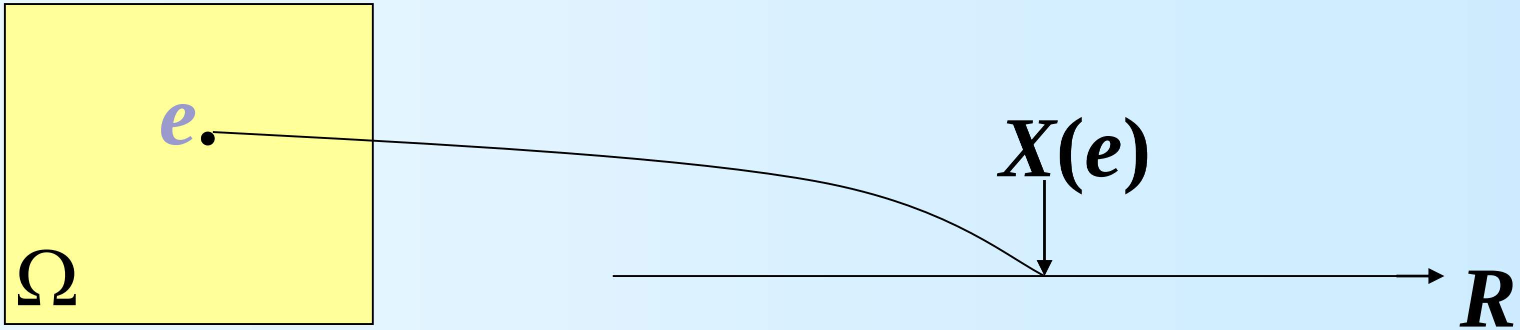
$\xi = 1$

分数 < 60

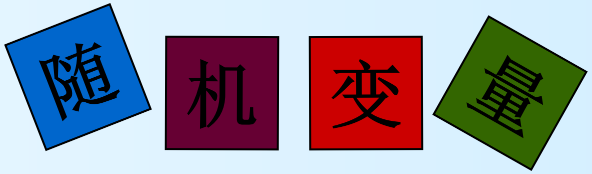
为什么受伤的总是我?

$\xi = 0$

这种对应关系在数学上理解为定义了一种实值单值函数.



称这种定义在样本空间 Ω 上的实值单值函数$X = X(e)$为



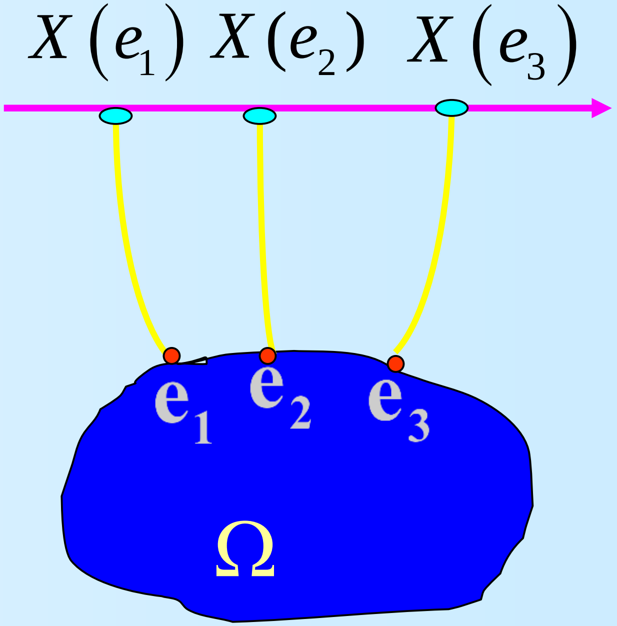
Random variable

简记为 *R.V.*

定义2.1：设E是一个随机试验，它的样本空间为$\Omega=\{e\}$，如果对于每个样本点$e\in\Omega$，都唯一地对应着一个实数$X(e)$，这就得到一个定义在Ω上的单值实值函数$X=X(e)$，称 X 为随机试验E的**随机变量**。

说　明

（1）随机变量是$\Omega\to R$上的一个映射，其定义域是Ω.



（2）随机性

随机变量的可能取值不止一个，试验前只能预知它的可能取值，但不能预知取哪个值。

（3）概率性

随机变量X以一定的概率取某个值。

(4) 随机变量常用大写的英文字母 X、Y、Z、$\cdots$

二、引入随机变量的意义

1、有了随机变量, 随机试验中的各种事件，就可以通过随机变量的关系式表达出来.

如：单位时间内某电话交换台收到的呼叫次数用X表示，它是一个随机变量.

事件{收到不少于1次呼叫}$\Leftrightarrow\{X\geq 1\}$

{没有收到呼叫} $\Leftrightarrow \{X=0\}$

又如：一报摊卖报，每份1.2元，其成本为0.45元.报社每天给报摊1000份报，并规定他不得把卖不出的报纸退回.设X为报摊每天卖出的报纸份数，试将报摊赔钱这一事件用随机变量的表达式表示.

解：分析

{报摊赔钱} $\longleftrightarrow$ {卖出的报纸钱不够成本}

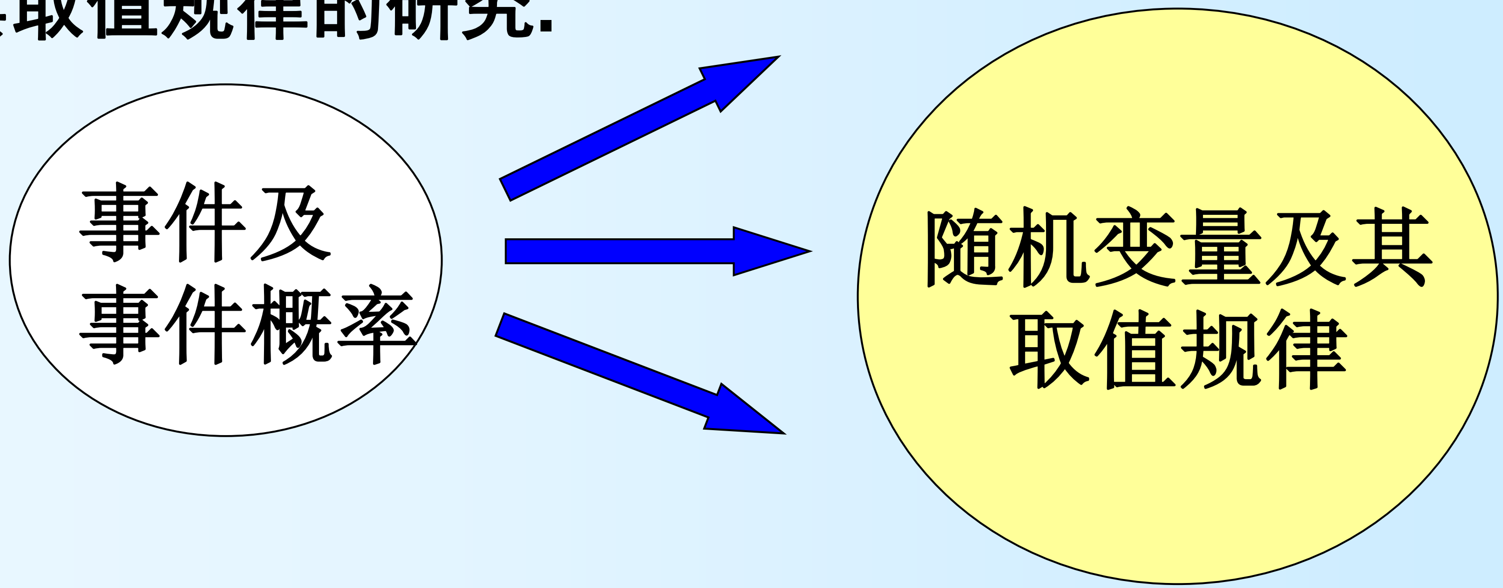
当 $1.2X<1000\times 0.45$时，报摊赔钱

故{报摊赔钱} $\Leftrightarrow$ $\{X\leq 375\}$

2、引入随机变量后，对随机现象统计规律的研究，

就由对事件及事件概率的研究扩大为对随机变量及

其取值规律的研究.



3、引入随机变量后，使我们可以用数学分析的方法

来研究随机现象的统计规律性

三、随机变量的分类

随机变量

- 离散型：如“取到次品的个数”，“收到的呼叫数”等.
- 非离散型
  - 连续型：例如，“电视机的寿命”，实际中常遇到的“测量误差”等.
  - 其它

随机变量

离散型随机变量 →分布列

连续型随机变量 →密度函数

分布函数

维数

一维随机变量

多维随机变量

离散型机变量

- 一维离散型R.V.
  - 分布列的定义、性质
  - 常见一维离散型R.V.
  - 一维离散型R.V.函数的分布列
- 二维离散型R.V.
  - 联合分布列
  - 边缘分布列
  - 条件分布列
  - 独立性的判断
  - 二维离散型R.V.函数的分布列

连续型随机变量

- 一维连续型R.V.
  - 密度函数的定义、性质
  - 常见一维连续型R.V.
  - 一维连续型R.V.函数的密度函数
- 二维连续型R.V.
  - 联合分布-联合密度函数
  - 边缘分布—边缘密度函数
  - 条件分布列—条件密度
  - 独立性的判断
  - 二维连续型R.V.函数的密度函数

随机变量

- 一维随机变量
  - 分布函数的定义、性质
  - 分布列与分布函数间的关系
  - 密度函数与分布函数间的关系
- 二维随机变量
  - 联合分布函数
  - 边缘分布函数
  - 条件分布函数
  - 独立性的判断

离散、连续

分布列

分布函数

离散R.V.

分布函数

概率密度函数

分布函数

连续R.V.

§2.1 2.2 离散型随机变量及其分布律

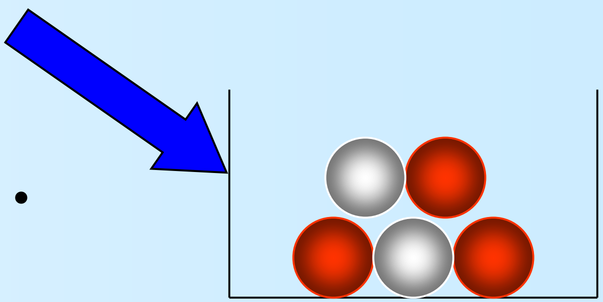
一、离散型随机变量分布律的定义

二、离散型随机变量分布律的表示方法

三、常见离散型随机变量

一、离散型随机变量分布律的定义

例1　　　　从中任取3 个球



取到的白球数X是一个随机变量 .

(1) X 可能取的值是0,1,2 ;

(2) 取每个值的概率为:

$$P\{X=0\}=\binom{3}{3}\Big/\binom{5}{3}=\frac{1}{10}\qquad P\{X=1\}=\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}\Big/\binom{5}{3}=\frac{6}{10}$$

$$P\{X=2\}=\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}\Big/\binom{5}{3}=\frac{3}{10}$$

定义1：随机变量X的所有可能取值是有限多个或无限可数多个，这种随机变量称为**离散型随机变量**.

定义2：设 x_k $(k=1,2,\ldots)$ 是离散型随机变量 X 所取的一切可能值，称

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots$$

为**离散型随机变量 X 的分布律.**

其中 p_k $(k=1,2,\ldots)$ 满足：

（1）$p_k \geq 0,\quad k=1,2,\ldots$

（2）$\sum_k p_k = 1$

用这两条性质判断一个数列是否是分布律

例2　设随机变量X的分布律为：

$$P(X=k)=a\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots,\quad \lambda>0$$

试确定常数a .

解: 依据分布律的性质

$$\begin{cases} P(X=k)\geq 0, \\ \sum_k P(X=k)=1 \end{cases}$$

即　$a\geq 0$,　$\sum_{k=0}^{\infty} a\frac{\lambda^k}{k!}=ae^{\lambda}=1$

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

从中解得　$a=e^{-\lambda}$

二、离散型随机变量分布律的表示方法

（1）公式法 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$

（2）列表法

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

（3）矩阵形式

$$X \sim \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{Bmatrix}$$

\# 概率分布

1、写出可能取值

2、写出相应的概率

分布列不仅明确给出了 $X=x_k$ 的概率，而且对于任意的实数 $x<y$，事件 $\{x<X<y\}$ 发生的概率可由分布列算出。

因为

$$\{x \le X \le y\} = \bigcup_{x \le x_k \le y} \{X = x_k\}$$

由概率的可列可加性，有

$$P(x \le X \le y) = \sum_{x \le x_k \le y} P(X = x_k) = \sum_{x \le x_k \le y} P_k$$

例3 掷两颗骰子，观察其点数。则其样本空间**Ω**

含有36个等可能的样本点

$$\Omega = \{(x,y);\ x,\ y = 1,2,\cdots,6\}.$$

在**Ω**上定义随机变量*X*，*Y*：

（1）*X*为6点的个数　　（2）*Y*为最大点数

X	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

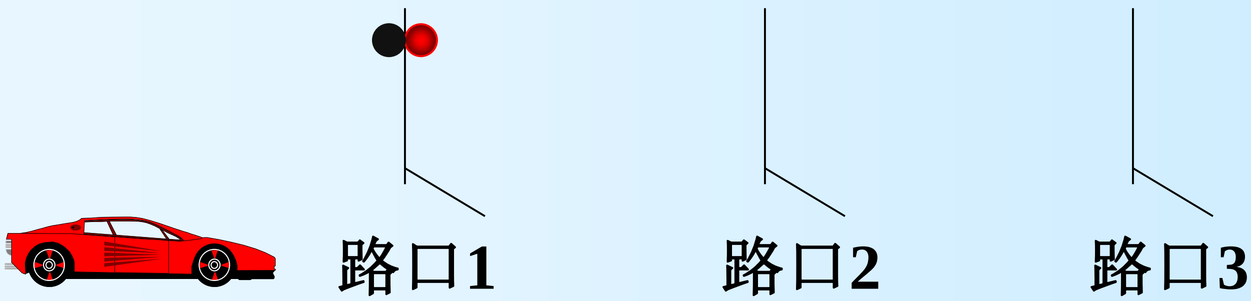
求*X*，*Y*的分布列

Y	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

例4 一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号灯显示的时间相等. 以X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求X的分布律.

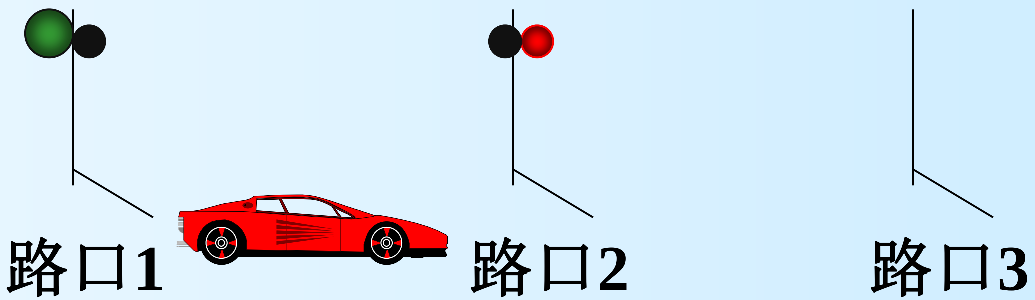
解: 依题意, X可取值0, 1, 2, 3.

设 A_i={第i个路口遇红灯}，i=1,2,3

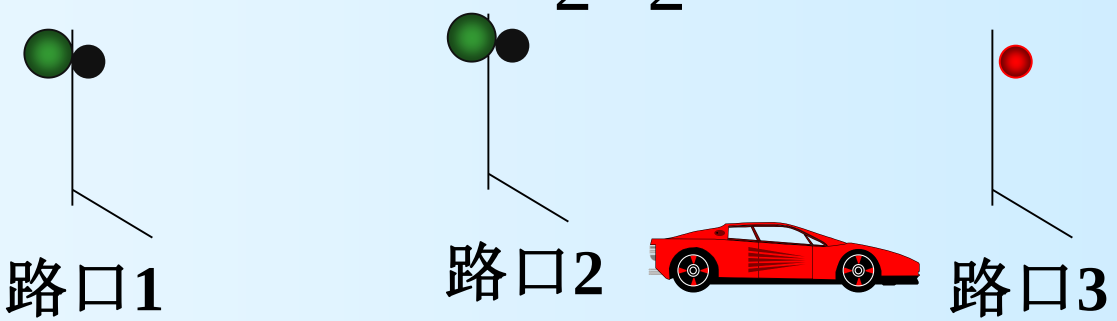


$$P\{X=0\}=P(A_1)=1/2,$$

X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数

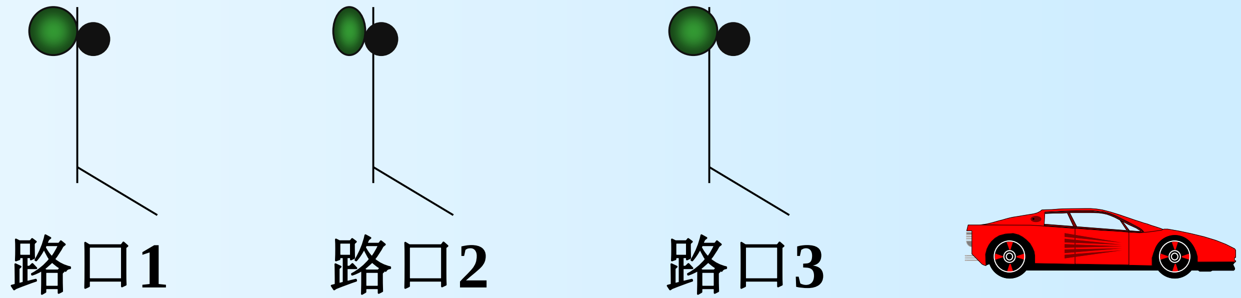


$$P\{X=1\}=P(\overline{A}_1 A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/4$$



$$P\{X=2\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/8$$

***X*表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数**



$$\boldsymbol{P(X=3)= P(}\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\boldsymbol{)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\textbf{=1/8}$$

即 $$X\sim\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$

伯努利试验

伯努利试验:

每次试验结果有且仅有两种情况：A和$\overline{A}$

任何一个只有两种可能结果的随机现象,比如新生婴儿是男还是女、抛硬币出现正面还是反面、明天是否下雨、射击是否会击中、投篮是否会命中、产品检验是否是合格品、种籽是否发芽等,都可以看作贝努力试验.

伯努利试验

将这试验独立地重复进行n次，称为n重贝努里试验

它具有如下四个特征

（1）在相同条件下进行n次重复试验;

（2）每次试验结果有且仅有两种情况：A和$\overline{A}$

（3）每次试验是相互独立的;

（4）每次试验中 $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p$ 。

§ 2.4 常用离散分布

1.单点分布/退化分布

P(X=a)=1

称这个分布为单点分布或退化分布

2. 二点分布（0—1分布）

分布列为 $P(X=x)=p^{x}(1-p)^{1-x}$， $x=0,1$

或记为

X	0	1
P	$1-p$	p

n重Bernoulli试验中事件 A 出现 k 次的概率 记为 $P_n(k)$

B_k = "在n重贝努里试验中事件A恰好发生了k次"，

$$P(\underbrace{A\cdot A\cdots\cdots A}_{k}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdots\cdots\overline{A}}_{n-k})=p\cdot p\cdots p\cdot(1-p)\cdots(1-p)=p^k(1-p)^{n-k}$$

$$P_n(k)=P(B_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\qquad k=0,1,2,\cdots,n$$

由于 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$恰好是 $[(1-p)+p]^n$ 按二项公式展开时的各项，所以上述公式称为二项概率公式。

3. 二项分布

(1)二项分布的分布列

n 重Bernoulli 试验中, X 是事件A 在 n 次试验中发生的次数 , $P(A)=p$,则

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\cdots,n$$

并称 X 服从参数为n, p 的二项分布，记作

$$X \sim b(n,p)$$ binomial --- 二项式

注：
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p+(1-p)]^n = 1$$

例如

- 检查10个产品，其中不合格品率为p，记 X 为不合格品的个数，则

$$X \sim b(10, p)$$

- 射击5次，其中命中率为p，记 Z为命中的次数，则

$$Z \sim b(5, p)$$

例5 设$X \sim b(2, p)$, $Y \sim b(3, p)$. 若$P(X \geq 1) = 5/9$,

试求$P(Y \geq 1)$.

解：由$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 5/9$,

知 $P(X = 0) = (1 - p)^2 = 4/9$,

$$\longrightarrow \quad p = \frac{1}{3}$$

则 $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - \frac{1}{3})^3 = \frac{19}{27}$

二项分布的取值情况　设 $X \sim b(8, 1/3)$

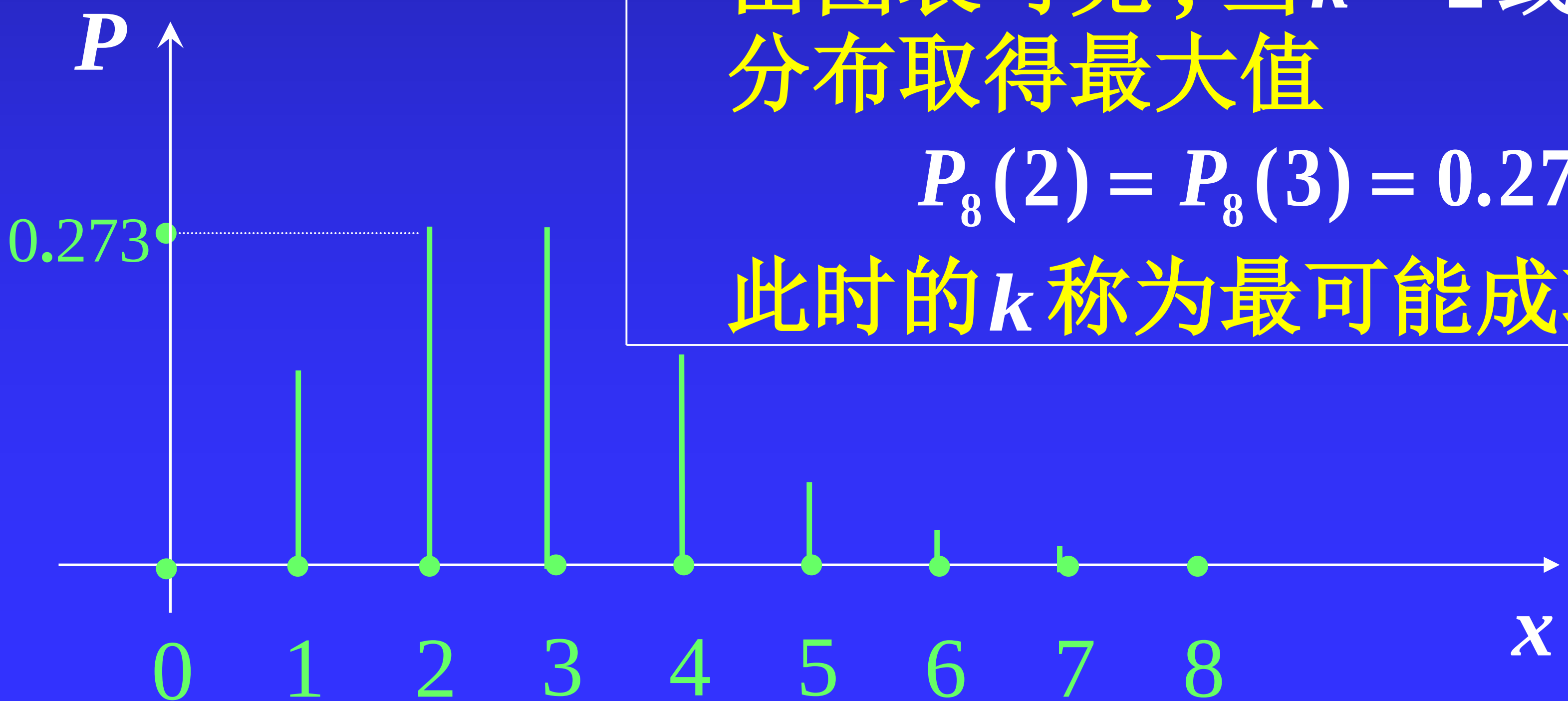
$$P_8(k) = P(X = k) = C_8^k (1/3)^k (1 - 1/3)^{8-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, 8$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
.039	.156	.273	.273	.179	.068	.017	.0024	.0000

由图表可见，当 $k = 2$ 或 3 时，分布取得最大值

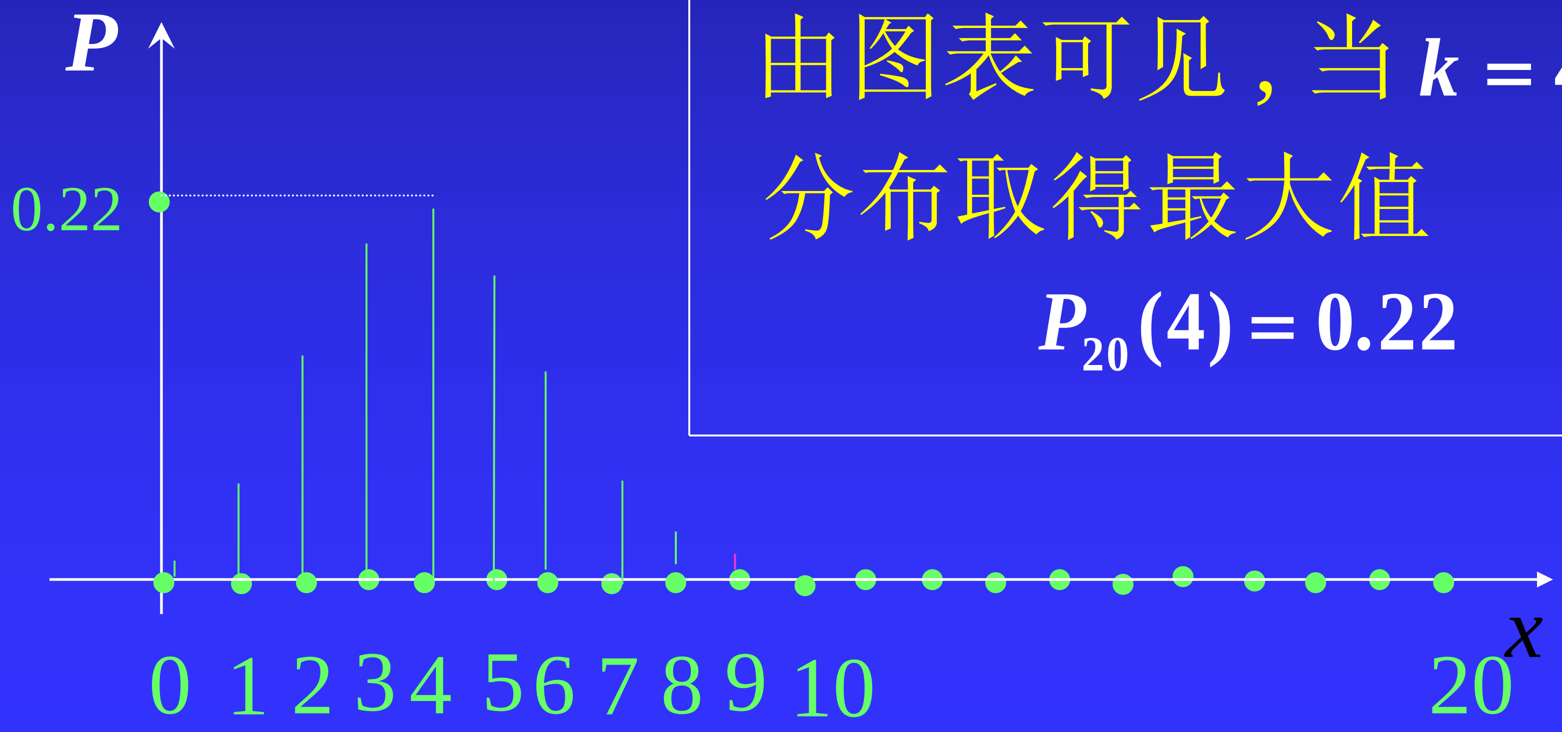
$$P_8(2) = P_8(3) = 0.273$$

此时的 k 称为最可能成功次数



设 $X \sim b(20, 0.2)$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ~ 20
.01	.06	.14	.21	.22	.18	.11	.06	.02	.01	.002	< .001



由图表可见，当 $k = 4$ 时，分布取得最大值

$$P_{20}(4) = 0.22$$

性质：设 $X \sim b(n, p)$，则当 **k=[(n+1)p]** 时，**P(X=k)**取得最大值。

实际应用时，可以取 **k=[np]**，比较**P(X=k+1)**和**P(X=k)**的大小，概率大的那个即为最大值。

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q}$$

若 $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} > 1$，**P(X=k+1)**取得最大值。

若 $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} < 1$ ，**P(X=k)取得最大值。**

若 $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = 1$

P(X=k)和P(X=k+1)同时取得最大值。

- 例6： 设有80台同类型设备，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是0.01，且一台设备的故障能有一个人处理。

考虑两种配备维修工人的方法，

其一是由4个人维护，每人负责20台；

其二是由3个人共同维护80台。

试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小。

解：按第一种方法。

以X记“第一人维护的20台中同一时刻发生故障的台数”。

以$A_i\left(i=1,2,3,4\right)$表示事件“第$i$人维护的20台中发生故障不能及时维修”，则知80台中发生故障不能及时维修的概率为：

$$P\left(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\right)\ge P\left(A_1\right)=P\left\{X\ge 2\right\}$$

而$X\sim b\left(20,0.01\right)$，故有：

$$P\left\{X\ge 2\right\}=1-\sum_{k=0}^{1}P\left\{X=k\right\}=1-\sum_{k=0}^{1}\left(C_{20}^{k}\right)\left(0.01\right)^{k}\left(0.99\right)^{20-k}=0.0169$$

即有：$P\left(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\right)\ge 0.0169$

按第二种方法。以Y记80台中同一时刻发生故障的台数，

此时，$Y\sim b\left(80,0.01\right)$，

故80台中发生故障而不能及时维修的概率为：

$$P\left\{Y\ge 4\right\}=1-\sum_{k=0}^{3}\left(C_{80}^{k}\right)\left(0.01\right)^{k}\left(0.99\right)^{80-k}=0.0087$$

4. 泊松（Poisson）分布

(1)泊松分布分布列

若 $P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$

其中 $\lambda>0$ 是常数，则称 X 服从参数为 λ 的Poisson 分布. 记作 $X\sim\pi(\lambda)$ 或 $P(\lambda)$

(1) $p_k=P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\geq 0, k=0,1,2,\cdots$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$

地震

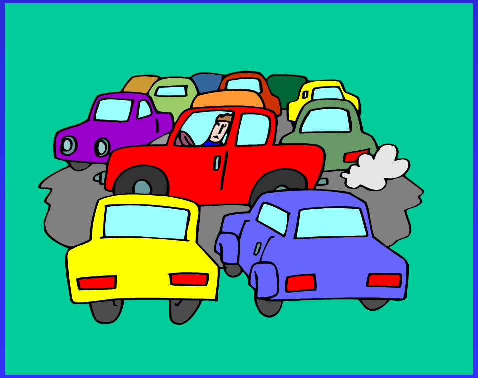
火山爆发

特大洪水

电话呼唤次数

商场接待的顾客数

交通事故次数



例7 一家商店采用科学管理，由该商店过去的销售记录知道，某种商品每月的销售数可以用参数 $\lambda=5$ 的泊松分布来描述，为了以95%以上的把握保证不脱销，问商店在月底至少应进某种商品多少件？

解：设该商品每月的销售数为X,

已知X服从参数 $\lambda=5$的泊松分布.

设商店在月底应进某种商品m件,

求满足 $P\{X \le m\} > 0.95$ 的最小的m.

销售数

进货数

求满足 $P\{X \le m\} > 0.95$ 的最小的m.

也即

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{e^{-5} 5^{k}}{k!} > 0.95$$

查泊松分布表得

$$\sum_{k=0}^{8} \frac{e^{-5} 5^{k}}{k!} \approx 0.9319, \quad \sum_{k=0}^{9} \frac{e^{-5} 5^{k}}{k!} \approx 0.9682$$

于是得 **m=9件**

(3)二项分布的泊松近似

当试验次数*n*很大时，计算二项概率变得很麻烦，如 $X \sim b(5000, 0.001)$，要计算

$$P(X>2000)=\sum_{k=2001}^{5000} P(X=k)=\sum_{k=2001}^{5000} C_{5000}^{k}\left(\frac{1}{1000}\right)^{k}\left(\frac{999}{1000}\right)^{5000-k}$$

或诸如此类的计算问题，必须寻求近似方法.

定理1(泊松定理) 在n重伯努利试验中,记事件A在一次试验中发生的概率为p_n（与试验次数有关, 如果当$n\to+\infty$时, 有$np_n\to\lambda$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\binom{n}{k}p_n^{\ k}(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

定理的条件意味着当 n很大时，p_n 必定很小. 因此，泊松定理表明，当 n 很大，p 很小时有以下近似式:

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

其中 $\lambda=np$

在实际计算中,当 $n \geq 20$, $p \leq 0.05$时, 可用上述公式近似计算; 而当 $n \geq 100$, $np \leq 10$ 时, 精度更好

k	按二项分布 $C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}$				按泊松近似
	$n=10$ $p=0.1$	$n=20$ $p=0.05$	$n=40$ $p=0.025$	$n=100$ $p=0.01$	$\lambda=np=1$
0	0.349	0.358	0.369	0.366	0.368
1	0.305	0.377	0.372	0.370	0.368
2	0.194	0.189	0.186	0.185	0.184
3	0.057	0.060	0.060	0.061	0.061
4	0.011	0.013	0.014	0.015	0.015

例8 已知某种疾病的发病率为0.001，有一单位共有5000人.问该单位患有这种疾病的人数超过10人的概率.

解：记X为该单位患有此疾病的人数为

$X \sim b(5000, 0.001)$，要求的是$P(X > 10)$

$$P(X>10)=\sum_{k=11}^{5000} P(X=k)=\sum_{k=11}^{5000} C_{5000}^{k}\left(\frac{1}{1000}\right)^{k}\left(\frac{999}{1000}\right)^{5000-k}$$

由于n很大，p很小，且$\lambda = np = 5000 \times 0.001 = 5$

$$P(X>10) = 1 - P(X \le 10) \approx 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} e^{-5}$$

$$= 1 - 0.986 = 0.014$$

5. 几何分布

例、在一个贝努里实验中，每次试验成功的概率为 p，失败的概率为 q=1-p，（0<p<1）.设试验进行到第X次才出现成功。求X的分布列。

解： $P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$

$pq^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots)$是几何级数 $\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}$ 的一般项，于是人们称它为几何分布，并记作

$X \sim ge(p)$

Geometry --- 几何

定理2（几何分布的无记忆性）设$X\sim Ge(p)$,则对任意正整数m与n有

$$P(X>m+n\mid X>m)=P(X>n)$$

证明：由$X\sim Ge(p)$,可知

$$P(X>n)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p=\frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)}=(1-p)^n$$

所以 $$P(X>m+n\mid X>m)=\frac{P(X>m+n)}{P(X>m)}$$

$$=\frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m}=(1-p)^n=P(X>n)$$

6. 负二项分布（巴斯卡分布）

在伯努利试验序列中，记每次实验中事件A发生的概率为p，如果X为事件A第r次出现时的试验次数，则X的可能取值为$r,r+1, ,r+m,$ 称X服从负二项分布或巴斯卡分布，其分布列为

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r},\quad k=r,r+1,\cdots$$

记为$X\sim Nb(r,p)$.特别的,当$r=1$时,即为几何分布.

作业

练习册 第二章练习1
P13-14