知识点回顾---离散型R.V的分布列

（1）公式法 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots$

（2）列表法

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

（3）矩阵形式

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

\# 概率分布

1、写出可能取值

2、写出相应的概率

二、常用离散分布

1.单点分布/退化分布

$$P(X=a)=1$$

2. 二点分布（**0—1**分布）

$$P(X=x)=p^{x}(1-p)^{1-x},\quad x=0,1$$

X	0	1
P	$1-p$	p

3. 二项分布 $X\sim b(n,p)$

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

4. 泊松（Poisson）分布 $X \sim \pi(\lambda)$ $P(\lambda)$

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

概率的计算：附表3 $P(X\le m)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad m=0,1,2,\cdots$

5. 几何分布

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=\mathrm{pq}^{\mathrm{k}-1},\quad \mathrm{k}=1,2,\ldots$$

6. 负二项分布（巴斯卡分布）

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r},\quad k=r,r+1,\cdots$$

§2.3 随机变量的分布函数

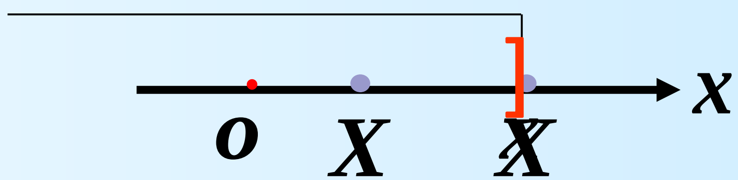
- 分布函数的定义
- 分布函数的性质

一、分布函数的定义

设 X 是一个 $r.v$，称

$$F(x)=P(X\le x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

为 X 的分布函数，记作 $F(x)$.



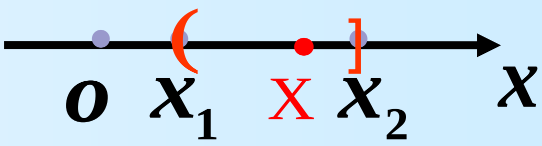
请注意：

(1) 在分布函数的定义中，X是随机变量，x是参变量.

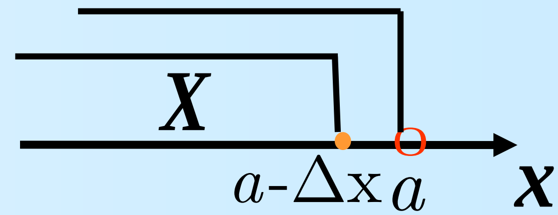
(2) $F(x)$ 是r.v X取值不大于 x 的概率.

(3) 对任意实数 $x_1 < x_2$，随机点落在区间$(x_1, x_2]$内的概率为：

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$$



用分布函数表示概率 $F(x)=P(X\le x)$



$$P(X\le \mathrm{a})=F(a)$$

$$P(X>\mathrm{a})=1-P(X\le a)\ \ =1-F(a)$$

$$P(X<\mathrm{a})=\lim_{\Delta x\to 0^+}P(X\le a-\Delta x)\ \ =\lim_{\Delta x\to 0^+}F(a-\Delta x)=F(a-0)$$

$$P(X\ge \mathrm{a})=1=P(X<a)=1-F(a\text{-}0)$$

$$P(X=\mathrm{a})=P(X\le a)-P(X<a)=\mathrm{F(a)}-F(a\text{-}0)$$

$$P(a\le X\le b)=P(X\le b)-P(X<a)=F(b)-F(a\text{-}0)$$

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

$$P(a\le X<b)=F(b-0)-F(a-0)$$

$$P(a<X<b)=F(b-0)-F(a)$$

例1 设 随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	1/3	1/6	1/2

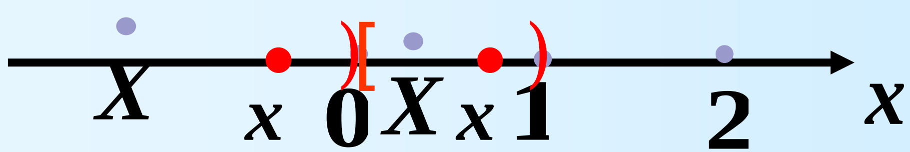
求 X 的分布函数 $F(x)$.

解 $F(x) = P(X \le x)$

当 $x<0$ 时，$\{X \le x\} = \phi$ ，故 $F(x) = 0$

当 $0 \le x < 1$ 时，

$F(x) = P\{X \le x\} = P(X=0) = \frac{1}{3}$

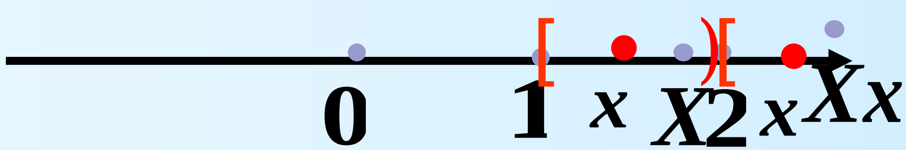


当 $1 \leq x < 2$ 时，

$$F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

当 $x \geq 2$ 时，

$$F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} = 1$$



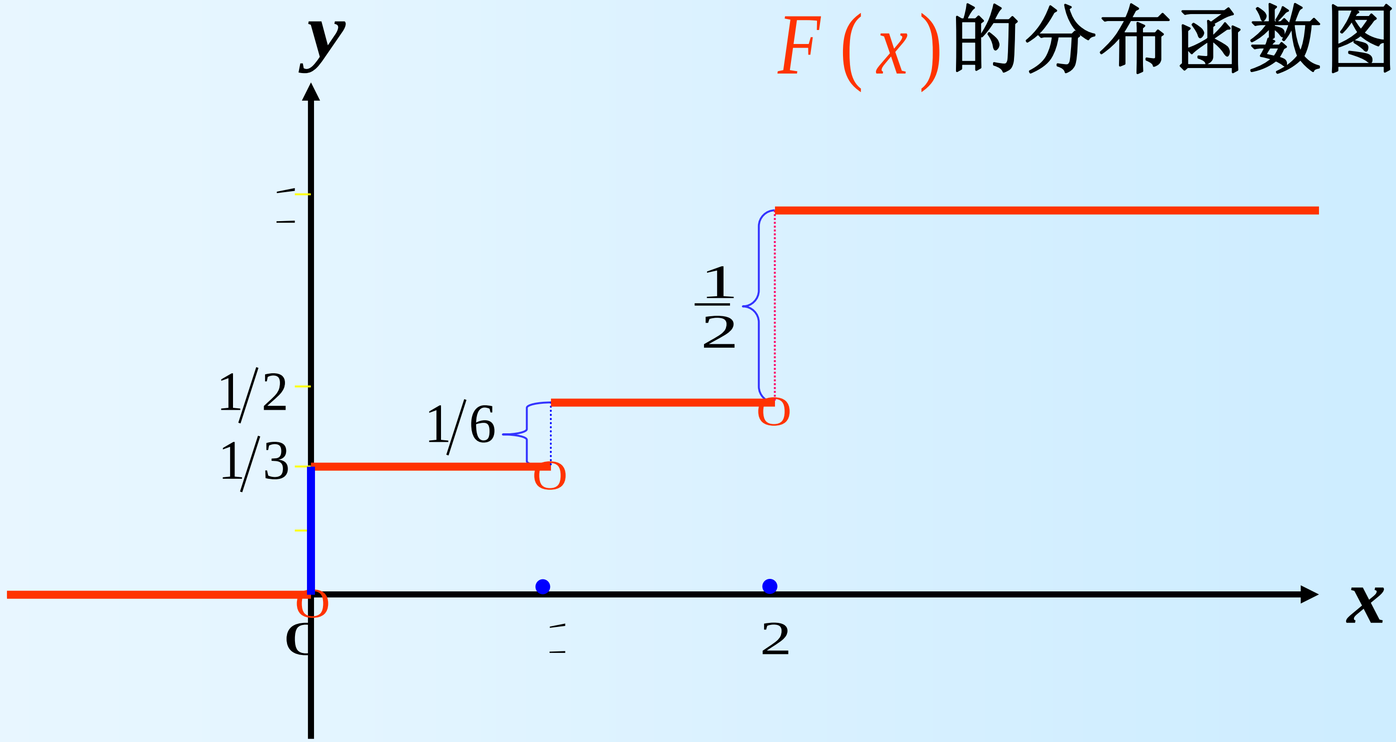
故

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1}{3}, & 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

注意右连续

下面我们从图形上来看一下.

$F(x)$的分布函数图



1. 离散型随机变量的分布函数有什么特点.

2. 分布函数和分布列之间有什么的关系?

3. 知道了分布列，如何计算分布函数?

4. 知道了分布函数，如何计算分布列?

一般地

设离散型 $r.v$ X 的分布律是

$$\mathrm{P}\{X=x_k\}=p_k, \qquad k=1,2,3,\ldots$$

则其分布函数

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{x_k\leq x} p_k$$

即$F(x)$ 是 X 取 $\leq$ χ的诸值 x_k 的概率之和.

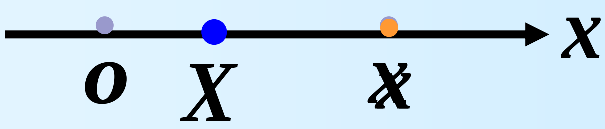
二、分布函数的性质

(1) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是一个不减函数，即对 $\forall\ x_1, x_2 \in (-\infty,+\infty)$ 且 $x_1 < x_2$，都有 $F(x_1) \le F(x_2)$；

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \le x_2\} \ge 0$$

(2) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$



(3) $F(x)$ 右连续，即 $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

例2 设有函数 $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$F(x)$能否是某个r.v 的分布函数.

A. 能

B. 不能

解 注意到函数 $F(x)$在$[\pi/2,\pi]$上下降，不满足性质(1)，故$F(x)$不能是分布函数.

或者 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$

不满足性质(2)， 可见$F(x)$也不能是r.v 的分布函数.

例3 设有一反正切函数（柯西分布）

$$F(x)=\frac{1}{\pi}[\arctan x+\frac{\pi}{2}],-\infty<x<+\infty$$

A. *能*

B. *不能*

***F(x)*能否是某个*r.v* 的分布函数.** 求$P(-1 \le x \le 1)$

解: ***F(x)*满足分布函数的三个基本性质，故**

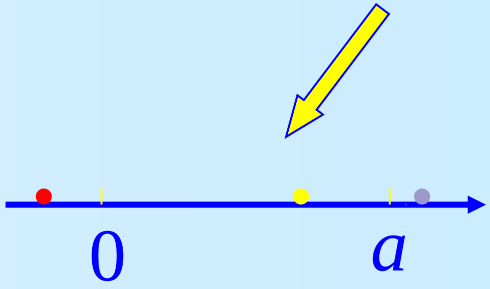
***F(x)*是一个分布函数。**

$$P(-1 \le X \le 1)=F(1)-F(-1)$$

$$=\frac{1}{\pi}[\arctan(1)-\arctan(-1)]=\frac{1}{2}$$

例4 在区间 $[0, a]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示这个质点的坐标 . 设这个质点落在区间$[0, a]$内的概率与这个小区间的长度成正比，试求 X 的分布函数.

解 设 $F(x)$ 为 X 的分布函数，



当 $x < 0$ 时， $F(x) = P(X \le x) = 0$

当 $x > a$ 时， $F(x) = 1$

当 $0 \le x \le a$ 时， $P(0 \le X \le x) = kx$ （k为常数）

由于 $P(0 \le X \le a) = 1 \Longrightarrow ka = 1$， $k = 1/a$

$$F(x) = P(X \le x) = P(X<0) + P(0 \le X \le x) = x / a$$

故 $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x}{a}, & 0\le x\le a \\ 1, & x>a \end{cases}$$

令

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a} & 0<x<a \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$