§2.4 连续型随机变量的密度函数

- 密度函数的定义
- 密度函数的性质

连续型随机变量的概念

定义 设 X 是随机变量, 若存在一个非负可积函数 $f(x)$, 使得对任意实数x 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad -\infty < x < +\infty$$

其中$F(x)$是它的分布函数.

则称 X 是连续型随机变量，$f(x)$是 X 的概率密度函数，简称为密度函数或概率密度.

由定义得到结论

(1) $F(x)$在R上连续；

(2)若 $F(x)$在x点导数存在，则

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

例　设随机变量X的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & x \geq 0 \end{cases},$$

求密度函数 $f(x)$

解：该函数处处可导，则

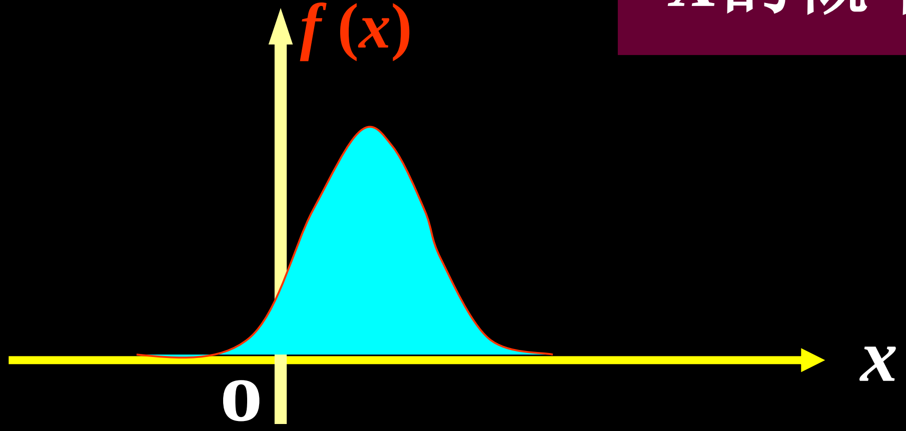
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

密度函数 $f(x)$ 的性质

(1) 非负性 $f(x) \geq 0$

(2) 正则性 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

这两条性质是判定一个
函数 $f(x)$ 是否为某连续随机变量
X 的概率密度函数的充要条件.



3° 对于任意实数 $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$,

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

利用概率密度可确定随机点落在某个范围内的概率

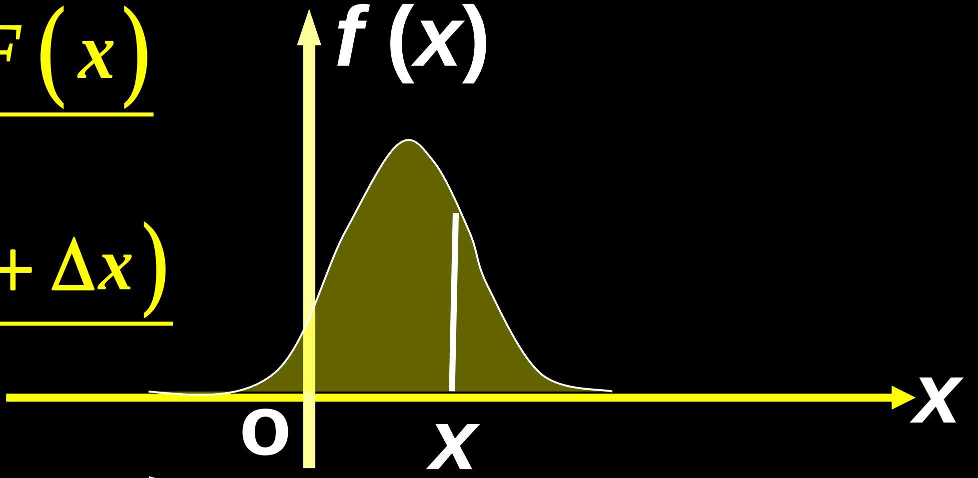
4° 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则有

$$F'(x) = f(x).$$

若 x 是 *f(x)* 的连续点，则

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}$$



若不计高阶无穷小，有

$$P\{x<X\le x+\Delta x\}=f(x)\Delta x$$

$f(x)\Delta x$ 在连续型 *r .v* 理论中所起的作用与 $P(X=x_k)=p_k$ 在离散型 *r .v* 理论中所起的作用相类似.

请注意:

(1) 连续型*r.v*取任一指定实数值*a* 的概率均为0. 即

$$P\{X=a\}=0.$$

这是因为

$$0\le P\{X=a\}\le P\{a-\Delta x<X\le a\}=F(a)-F(a-\Delta x)$$

当 $\Delta x\to 0+$ 时 得到

$$P\{X=a\}=0.$$

由$P(A)$=0，不能推出 $A=\varnothing$

由$P(B)$=1，不能推出 B=S

(2) 对连续型 *r.v* X，有

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b)$$

$$= P(a \le X < b)$$

$$= P(a < X < b)$$

注：连续型与离散型随机变量的差别

（1）

- 离散随机变量分布函数是右连续的阶梯函数

$$F(x+0) \overset{\triangle}{=} \lim_{t \to x+0} F(t) = F(x)$$

- 连续随机变量分布函数在（-∞，+∞）上连续

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_{x}^{x+\Delta x} f(x)dx \to 0, \quad (\Delta x \to 0)$$

(2) ◆ 离散随机变量在其可能取值点上概率不为0

◆ 连续随机变量分布函数在(-∞，+∞)上连续

对于连续型随机变量X, $P(X = a) = 0$

其中 a 是随机变量 X 的一个可能的取值

$$P(X=a)=\int_a^a f(x)dx = 0$$

命题 连续随机变量取任一常数的概率为零

强调 概率为0 的事件未必不发生

（3）◆ 对于连续随机变量，有

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b)$$
$$= P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

$$P(X \le b) = P(X < b) = F(b)$$

$$P(X > a) = P(X \ge a) = 1 - F(a)$$

◆ 而对于离散随机变量不存在这个性质.

（4）◆ 连续分布的密度函数不唯一.

例如 均匀分布 U（-1，1）的密度函数可表示为

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1< x< 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

- 这两个密度函数在概率意义上无差别

称 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是“几乎处处相等”

例1　设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x\le 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（1）确定常数k;（2）求X的分布函数$F(x)$;

（3）求$P\left\{1<X\le\dfrac{7}{2}\right\}$

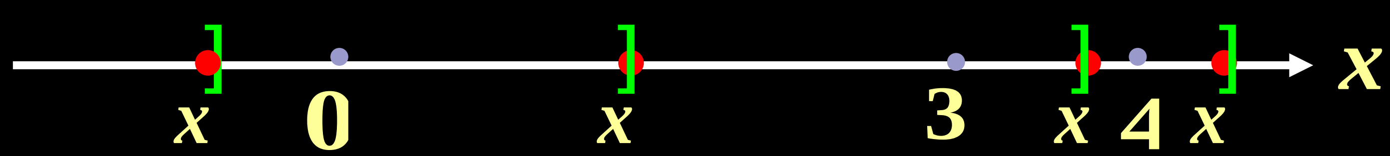
解 $$f(x)=\begin{cases} kx, & 0 \le x < 3 \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3 \le x \le 4 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$(1)\ 由\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 得 k = \frac{1}{6}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,\ -\infty < x < +\infty$$

(2) 分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \int_0^x \frac{x}{6}\,dx, & 0 \le x < 3 \\ \int_0^3 \frac{x}{6}\,dx + \int_3^x \left(2-\frac{x}{2}\right)dx, & 3 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$



即分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3\\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4}, & 3\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$$

（3） $P\left\{1<X\le\dfrac{7}{2}\right\}=F\left(\dfrac{7}{2}\right)-F(1)=\dfrac{41}{48}$

例2：设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-a\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a} & -a\le x<a\\ 1 & x\ge a\end{cases}$$

其中 a>0，试求：（1）常数A，B；（2）$P(|X|<\frac{a}{2})$;

（3）概率密度 f(x)。

解：（1）因为 $F(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故有

$$F(-a)=\lim_{x\to-a^-}F(x),\qquad F(a)=\lim_{x\to a^-}F(x)$$ 即

$$A-\frac{\pi}{2}B=0,\ 1=A+\frac{\pi}{2}B$$ 解得：$A=\dfrac{1}{2},\quad B=\dfrac{1}{\pi}$

例2：设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-a \\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a} & -a\le x<a \\ 1 & x\ge a\end{cases}$$

其中 a>0， 试求:（1）常数A，B;（2）$P(|X|<\frac{a}{2})$;（3）分布密度 f(x) 。

（2）$P(|X|<\frac{a}{2})=P(-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2})=F(\frac{a}{2})-F(-\frac{a}{2})$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2})=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

（3）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} & |x|<a \\ 0 & |x|\ge a\end{cases}$

例3 已知某型号电子管的使用寿命 X 为连续随机变量, 其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x^2}, & x>1000\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(1) 求常数 c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{1000}^{+\infty}\frac{c}{x^2}\mathrm{d}x=1$

(2)求 任取一只寿命大于1500小时的概率 $P(X>1500)$

(3) 计算 $P(X\le 1700 \mid 1500<X<2000)$

(4) 已知一设备装有3个这样的电子管, 每个电子管能否正常工作相互独立, 求在使用的最初1500小时只有一个损坏的概率. $Y\sim b(3,p)$

解 (1) 令 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1000}^{+\infty} \frac{c}{x^2}\mathrm{d}x = 1$

$\longrightarrow$ $c = 1000$

(2) $P(X > 1500)$

$$= \int_{1500}^{+\infty} \frac{1000}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{1000}{x}\right)\Big|_{1500}^{+\infty} = \frac{2}{3}$$

密度函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2}, & x > 1000 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(3) $P(X \leq 1700 \mid 1500 < X < 2000)$

$$= P(X \leq 1700, 1500 < X < 2000) \Big/ P(1500 < X < 2000)$$

$$= P(1500 < X \leq 1700) \Big/ P(1500 < X < 2000)$$

$$= \int_{1500}^{1700} \frac{1000}{x^2} dx \Big/ \int_{1500}^{2000} \frac{1000}{x^2} dx$$

$$= \frac{4}{51} \Big/ \frac{1}{6} = \frac{24}{51} \approx 0.4706.$$

(4)

设A表示一个电子管的寿命小于1500小时

$$P(A)=P(0\le X<1500)=\int_{1000}^{1500}\frac{1000}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

设在使用的最初1500小时三个电子管中损坏的个数为Y

$$P(Y=1)=C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

前面我们讨论了离散和连续随机变量，还存在一类非离散和非连续随机变量，可看下例.

5、非离散又非连续的分布

例如函数

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{1+x}{2}, & 0\le x<1; \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$$

这是个分布函数，但既非离散的也非连续的分布.