# § 2.5 随机变量函数的分布

**问题** 已知随机变量 $X$ 的密度函数 $f_X(x)$ 或分布列

求 随机因变量$Y=g(X)$的密度函数 $f_Y(y)$或分布列

**方法** 将与$Y$有关的事件转化成 $X$ 的事件

## 一、离散型随机变量的分布

例1：设随机变量X的分布为：

| X | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |

求 $Y = X^2 + 1$ 的分布律

解：由 $Y = X^2 + 1$ 及 X 的分布得：

| $Y = X^2 + 1$ | $(-2)^2 + 1$ | $(-1)^2 + 1$ | $0^2 + 1$ | $1^2 + 1$ | $2^2 + 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |

$$P(Y = 5) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 1) = P(X = 0) = \frac{1}{5}$$

$$P(Y = 2) = P\{X = -1\} + P(X = 1) = \frac{3}{10}$$

所以

| Y | 1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| p | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{2}$ |

**例2** 已知 $X$ 的概率分布为

| $X$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

求 $Y_1 = 2X - 1$ 与 $Y_2 = X^2$ 的分布列

**解**

| $Y_1$ | -3 | -1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

# 离散型随机变量函数的分布

设随机变量 $X$ 的分布列为

$$P(X = x_k) = p_k, \qquad k = 1,2,\cdots$$

分布列

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

由已知函数 $g(x)$可求出随机变量 $Y$ 的所有可能取值，则 $Y$ 的概率分布为

$$P(Y = y_i) = \sum_{k:\, g(x_k)=y_i} p_k, \qquad i = 1,2,\cdots$$

分布列

| $Y$ | $g(x_1)$ | $g(x_2)$ | $\cdots$ | $g(x_n)$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

# 连续性随机变量函数的分布

已知 $X$ 的密度函数 $f(x)$ 或分布函数

求 $Y = g(X)$ 的密度函数

分布函数法

$$X \sim f_X(x), F_X(x), Y = g(X), \text{求 } f_Y(y)$$

**分布函数法** 设 $a \le g(X) \le b$

1) 若 y<a, $F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$

2) 若 y>b, $F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$

3)若 $a \le y \le b$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$$

$$= P(m(\mathrm{y}) \le \mathrm{X} \le h(y)) = F_X(h(y)) - F_X(m(y))$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y)$$

$$= \begin{cases} f_X(h(y))h'(y) - f_X(m(y))m'(y) & a < y < b \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$X \sim f_X(x), F_X(x), Y = X^2, \text{求 } f_Y(y)$$

解：当y>0时 $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y)$

$$= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) & y \ge 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

例3、 $Y = X^2$

$$X \sim N(0,1); X \sim U(0,2) \quad X \sim Exp(1)$$

$$Y = X^2$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$X \sim N(0,1) \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_X(\sqrt{y}) = f_X(-\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \sim \chi^2(1)$$

$Y = X^2$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$X \sim U(0,2)$ $$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_X(\sqrt{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 < \sqrt{y} < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$ $$f_X(-\sqrt{y}) = 0$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{y}} & 0<y<4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$Y = X^2$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$X \sim Exp(1)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$$f_X(\sqrt{y}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{y}},(y > 0) \qquad f_X(-\sqrt{y}) = 0$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} & y > 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

例4、 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

求 $Y = 1 - e^{-2X}$ 的密度 $f_Y(y)$

解:x>0, $0 \le 1 - e^{-2x} \le 1$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

(1)当$y$<0时, $F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$

(2)当$y$>1时, $F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$

(3)当 $0 \le y \le 1$时

U(0,1)的分布函数

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(1 - e^{-2X} \le y)$$

$$= P(X \le -\frac{1}{2}\ln(1-y)) = 1 - e^{-2(-\frac{1}{2}\ln(1-y))}$$

$$= y$$

**定理** 若$X$的分布函数$F_X(x)$为严格单调递增的连续函数，其反函数$F_X^{-1}(y)$存在，则

$$Y = F_X(X) \sim U(0,1)$$

---

证: $y = F_X(x)$是严格单调增函数,它仅在$[0,1]$取值

(1)当$y<0$时

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$$

(2)当$y>1$时

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$$

(3)当$0 \le y \le 1$时

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(F_X(X) \le y)$$
$$= P(X \le F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

$$\longrightarrow \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

$U(0,1)$的分布函数

定理1　设$X$ 是连续随机变量，具有概率密度 $f_X(x)$, 又设$Y=g(X)$是另一随机变量.若$y=g(x)$严格单调，其反函数$h(y)$有连续导函数，则$Y=g(X)$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & a<y<b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$x=h(y)$是$y=g(x)$的反函数

其中 $a=min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$ $b=max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则当 $a\neq 0$ 时，有

$$Y=aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$$

证：当 $a\neq 0$ 时，$y=ax+b$ 是严格单调函数，所以

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

反函数 $x=\dfrac{y-b}{a}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}}\qquad -\infty<y<\infty$$

注：正态随机变量的线性变换仍是正态变量

特别地，若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

练习． 1. 设随机变量X的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

求Y=X²的密度函数 $f_Y(y)$

2. 设随机变量X服从区间 (0，1) 上的均匀分布，求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.