知识点回顾

一、二维随机变量的分布函数

定义2 设(X,Y)是二维随机变量，如果对于任意实数x, y，二元函数

$$F(x,y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\} \triangleq P(X \le x, Y \le y)$$

称为二维随机变量(X,Y)的分布函数，或者称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

一维随机变量

X的分布函数

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$-\infty < x < \infty$$

二、二维离散型随机变量

(X,Y) 可能取的值是 $(x_i, y_j), i, j = 1,2,\cdots,$

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1,2,\cdots$$

$$\begin{cases} (1)\text{非负性} & p_{ij} \ge 0, \quad i, j = 1,2,\cdots \\ (2)\text{正则性} & \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1 \end{cases}$$

$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ 的求法

(1) 利用古典概型直接求;

(2) 利用乘法公式 $p_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_j \mid X = x_i)$.

一维离散型随机变量

X 的分布律

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k=1,2,\ldots$$

$$\begin{cases} p_k \ge 0, & k=1,2,\ldots \\ \sum_k p_k = 1 \end{cases}$$

三、二维连续型随机变量

定义　对于二维随机变（*X*,*Y*）的分布函数*F*(*x*,*y*) 如果存在非负的函数*f*(*x*,*y*)，使对于任意 *x*,*y*，有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量,函数 f(x,y) 称为二维随机变量(*X*,*Y*)的概率密度,或称为随机变量 *X* 和 *Y* 的联合概率密度.

一维随机变量*X*

连续型

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

$-\infty < x < +\infty$

*X*的概率密度函数

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$F'(x) = f(x)$$

二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度具有性质

（1）$f(x,y)\ge 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$

(3) 设G是xoy平面上的区域，则有

$$P\left((x,y)\in G\right)=\iint_G f(x,y)\,dxdy$$

（4）在 $f(x,y)$的连续点，

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

四、边缘分布

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<+\infty\}=F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X<+\infty,Y\le y\}=F(+\infty,y)$$

(X,Y) 的联合分布律为 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$

则 (X,Y) 关于X 的边缘分布律为

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$$

(X,Y) 关于 Y 的边缘分布律

i=1,2,…

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\triangleq p_{\cdot j}$$

$$(j=1,2,\cdots)$$

对连续型 *r.v* (*X,Y*)，

X 和 *Y* 的联合概率密度为 f(x,y)

则 (*X,Y*) 关于 *X* 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

(*X,Y*)关于 *Y* 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \qquad (-\infty < y < \infty)$$

例1：设 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6xy & 0<x<1, 0<y<2(1-x)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求关于X的边缘密度函数

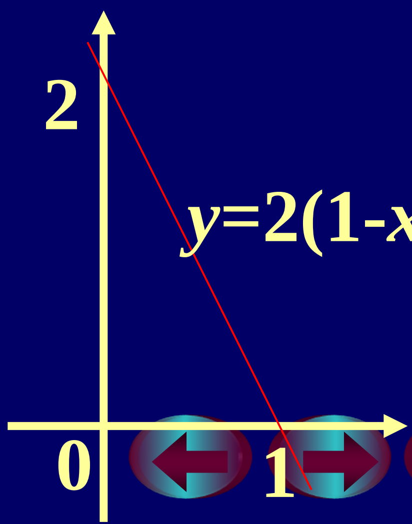
解：当 $x<0$ 或$x>1$时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}0dy=0$

当 $0\le x<1$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{0}^{2-2x}6xydy$

$$=12x(1-x)^2$$

于是，我们得到关于X的边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}12x(1-x)^2 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



二维均匀分布

设D是平面上的有界区域，其面积为 S(D)，若二维随机变量(X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

二维均匀分布

例2: $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$

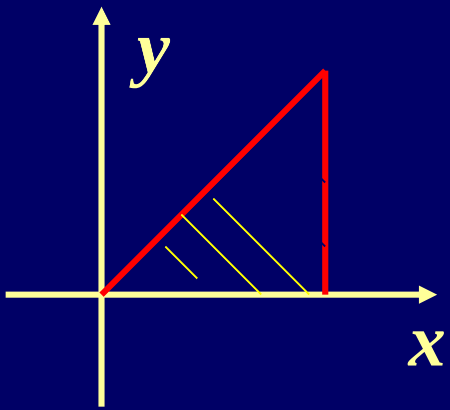
求出X与Y的边缘分布密度

解: 由均匀分布定义

$$f(x,y)=\begin{cases}2\ , & (x,y)\in D\\ 0\ , & \end{cases}$$

(1) 当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$f(x,y)\equiv 0$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=0$$



(2) 当 $0\le x\le 1$时, 只有 $0\le y\le x$ 时,

$$f(x,y)=2$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dy+\int_{0}^{x} 2dy+\int_{x}^{+\infty} 0dy=2x$$

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \end{cases}$$

$$f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases}2(1-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & \end{cases}$$

二维正态分布

若 r.v. (X, Y) 的联合密度函数为

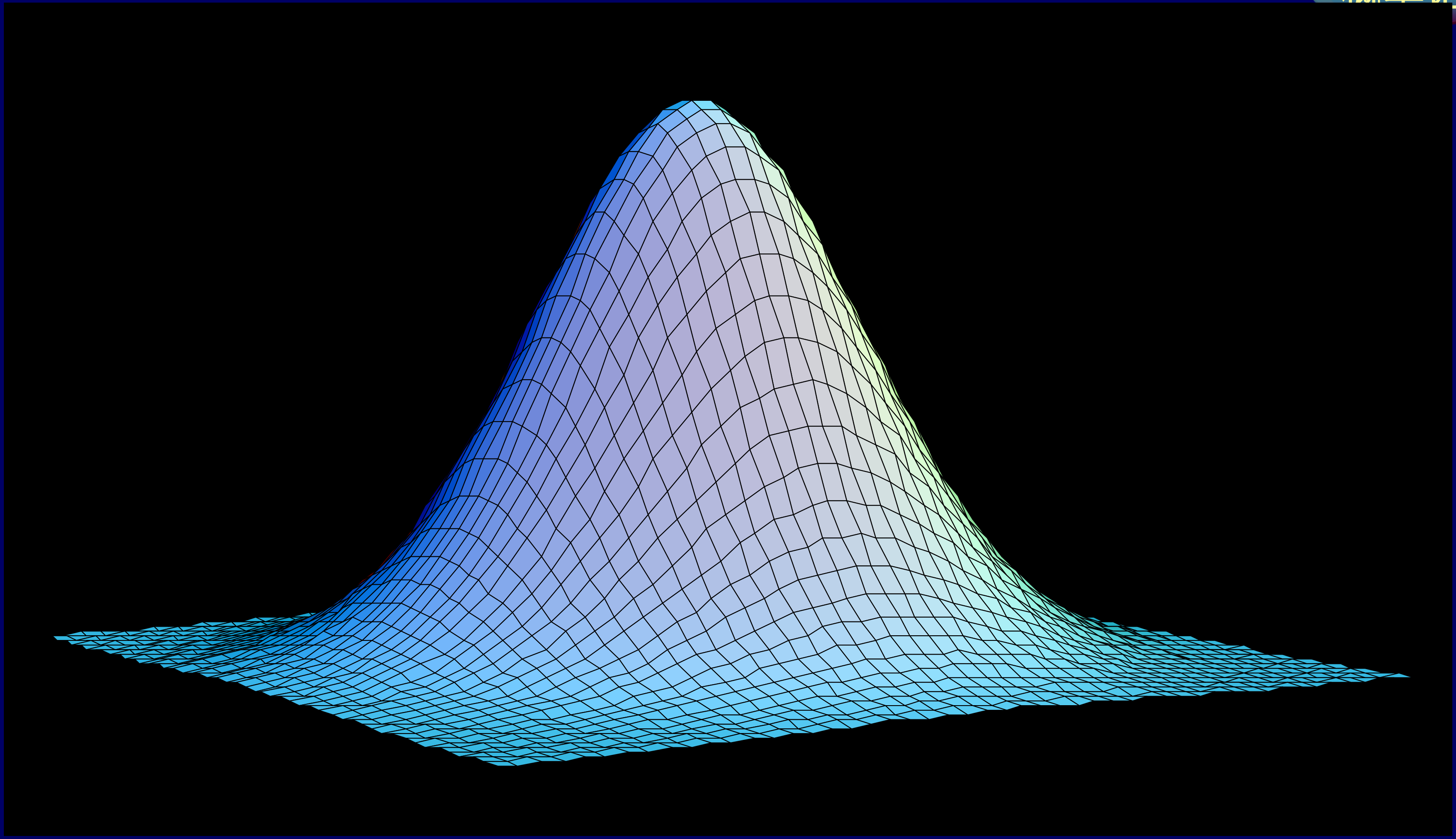
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

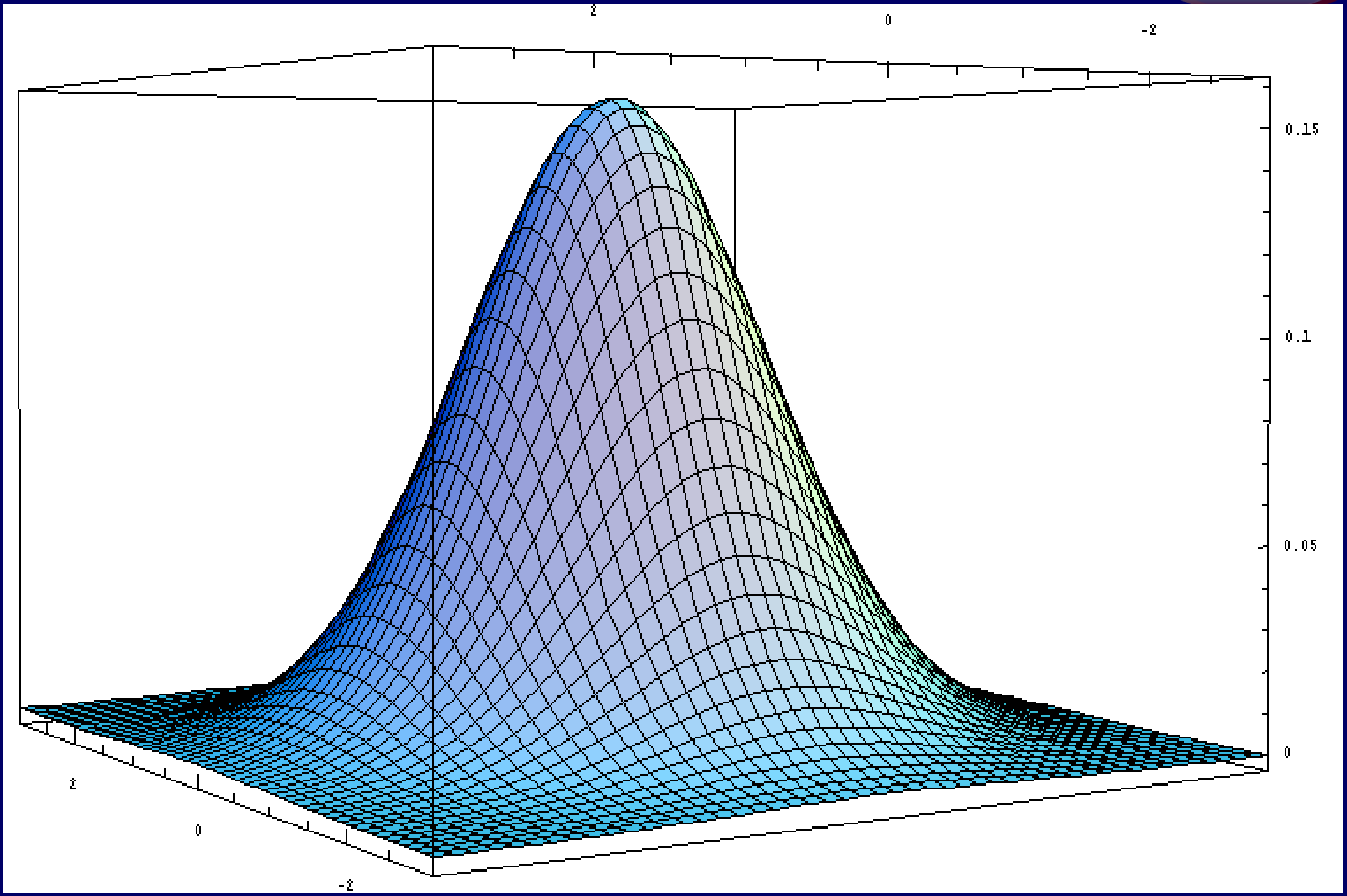
则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ 的正态分布，

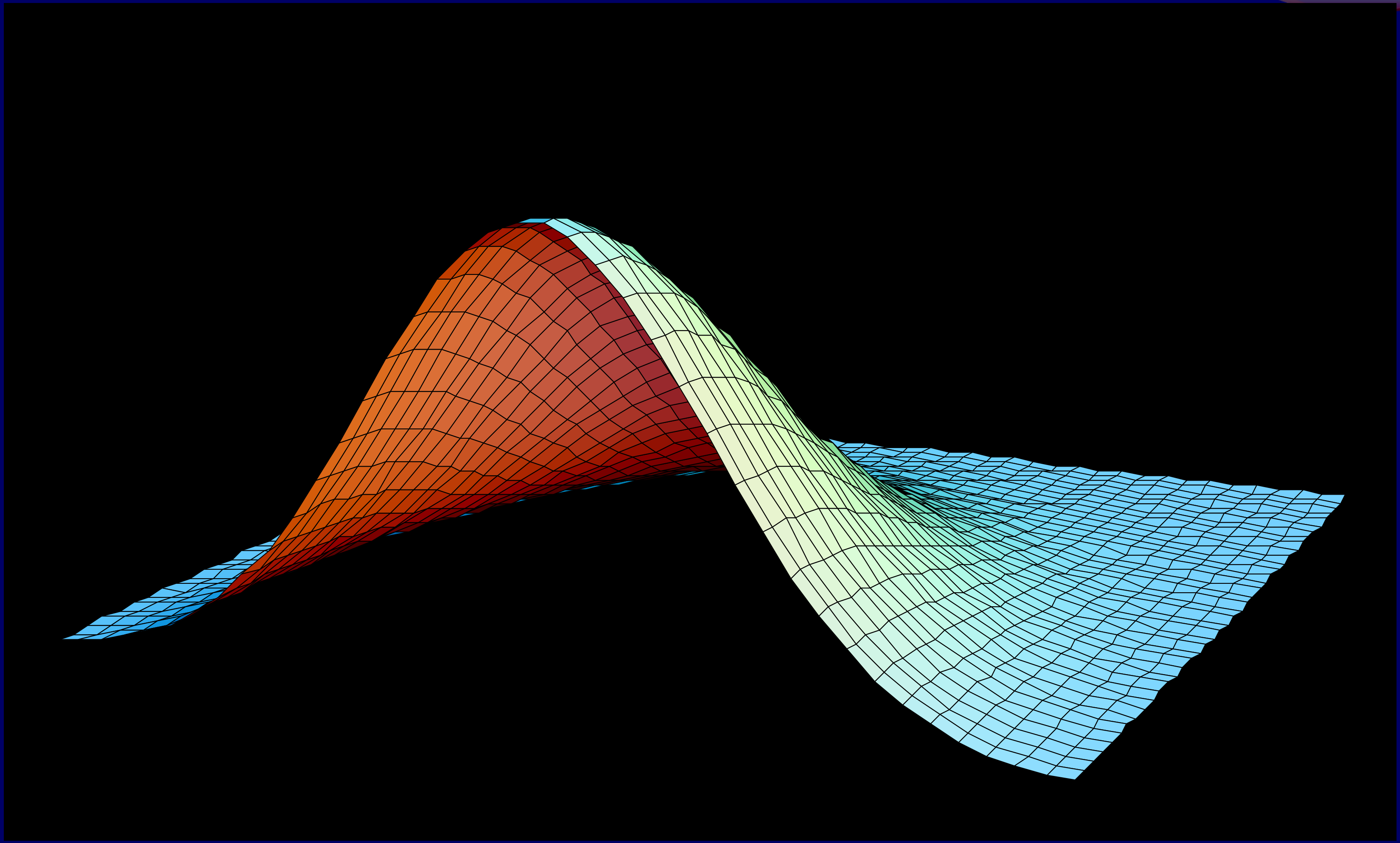
记作 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

其中 $-\infty<\mu_1, \mu_2<\infty$, $\sigma_1, \sigma_2>0$, $-1<\rho<1$.



二维正态分布图


2
0
-2
0.15
0.1
0.05
0
2
0
-2



二维正态分布剖面图

例 3 试求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

因为 $$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$=\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^1}$$

所以

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

令 $t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$，则有

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\qquad(-\infty<x<\infty)$$

同理

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad (-\infty < y < \infty)$$

可见

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且不依赖于参数 ρ .

也就是说,对于给定的 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,$ 不同的 ρ 对应不同的二维正态分布,但它们的边缘分布却都是一样的.

练习：设 $\mathbf{X} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

那么**X**和**Y**的联合分布为（ ）

A. 二维正态分布,且 $\rho=0$

B. 二维正态分布,且 ρ 不定

C.未必是二维正态分布

D. 以上都不对

例 4 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$\mathrm{f}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),x,y\in R$$

求 两个边缘密度。

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \quad =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

同理可得

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx \quad =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

§3.4 相互独立的随机变量

本节主要内容

一、两个随机变量相互独立的定义

二、随机变量的相互独立的充要条件

一、随机变量相互独立的定义

两事件 A , B 独立的定义是：若$P(AB)=P(A)P(B)$
则称事件 A , B 独立 .

设 X,Y是两个$r.v$，若对任意的x,y,有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称 X 和 Y 相互独立 .

设 X,Y是两个$r.v$，若对任意的x,y,有

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称 X 和 Y 相互独立 .

二、随机变量独立的判定

1、离散型随机变量独立的判定

若 (X,Y)是离散型 $r.v$， 则上述独立性的定义可改为:

若对(X,Y)的所有可能取值 (x_i, y_j), 都有

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

则称 X 和 Y 相互独立.

X 和 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$ 对(X,Y)的所有可能取值(x_i, y_j),有

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

即 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$

逆否命题

X 和 Y 不相互独立 $\Longleftrightarrow$ 存在(X,Y)的某个可能取值(x_{i0}, y_{j0}),

$$s.t.\ \ P(X=x_{i0}, Y=y_{j0})\neq P(X=x_{i0})P(Y=y_{j0})$$

例1：判断所给 (X,Y) 的分布律的二维离散型随机变量 (X,Y) 的独立性。

Y \ X	1	2	3	4	$p_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$p_{\cdot 1}=\frac{25}{48}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$p_{\cdot 2}=\frac{13}{48}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$p_{\cdot 3}=\frac{7}{48}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$p_{\cdot 4}=\frac{3}{48}$
$p_{i\cdot}$	$p_{1\cdot}=\frac{1}{4}$	$p_{2\cdot}=\frac{1}{4}$	$p_{3\cdot}=\frac{1}{4}$	$p_{4\cdot}=\frac{1}{4}$	1

$\because \quad p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 1}=\frac{1}{4}\times\frac{25}{48}=\frac{25}{192}\neq\frac{1}{4}=p_{11}$ 故X，Y不独立。

例2：设X与Y是相互独立的随机变量， 已知 (X,Y) 的联合分布律，求其余未知的概率值。

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X=i)$
1	0.01	0.2	0.04	0.25
2	0.03	0.6	0.12	
$P(Y=j)$	0.04	0.8		

2、连续型随机变量独立的判定

若 (X,Y)是连续型$r.v$ $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\Leftrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_X(u)f_Y(v)dudv$$

上述独立性的定义等价于：若对任意的 x, y, 有

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 几乎处处成立，

则称 X 和 Y 相互独立．

连续型随机变量独立的判定条件

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

几乎处处成立

即若 $D=\{(x,y)\mid f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)\}$，

则 $S(D)=0.$

逆否命题

***X* 和 *Y* 不相互独立** $\Leftrightarrow$ 存在面积不为0的区域 D，

当 $(x,y)\in D$ 时，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

例3 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

问X和Y是否独立?

解 $$f_X(x)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dy = xe^{-x}, \quad x>0$$

$$f_Y(y)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dx = e^{-y}, \quad y>0$$

即 $$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对一切 x, y, 均有: $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

故 X, Y 独立.

例4. 若(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

情况又怎样?

解: $$f_X(x)=\int_x^1 2dy=2(1-x), \qquad 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_0^y 2dx=2y, \qquad 0<y<1$$

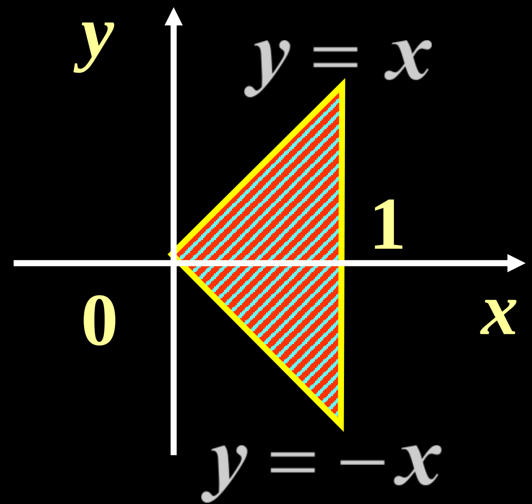
由于存在面积不为0的区域,

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

故 X 和 Y 不独立.

例5：已知 $f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,\quad 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

试判断X，Y 的独立性



解：求 $f_X(x), f_Y(y)$

当 0<*x*<1 时 $f_X(x)=\int_{-x}^{x}dy=2x$

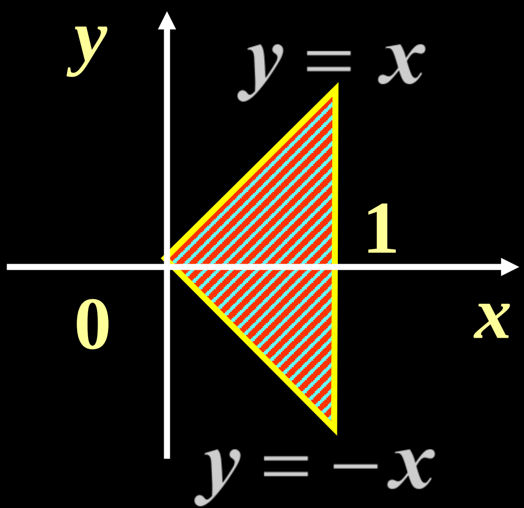
其它 $f_X(x)=0$

故 $f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

当 $-1<y<0$ 时， $f_Y(y)=\int_{-y}^{1}dx=1+y$

当 $0<y<1$ 时 ， $f_Y(y)=\int_{y}^{1}dx=1-y$ 其它 $f_Y(y)=0$

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}1+y & -1<y<0\\ 1-y & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$



当 $0<x<1$， $-1<y<0$ 时

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=2x(1+y)\neq 1=f(x,y)$$

故X 和Y 不独立。

例6 证明：对于二维正态随机变量(X,Y)，

X与Y相互独立的充要条件是参数$\rho=0$

证：因为(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

其边缘概率密度的乘积为：

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

"$\Leftarrow$" 如果$\rho=0$，则对于所有x,y，有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

即X,Y相互独立。

"$\Rightarrow$" 反之，若X,Y相互独立，

由于$f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$都是连续函数，

故对于所有的x,y，有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

特别的有$f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$，

即$\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$ $\Rightarrow \rho=0$