知识点回顾

一、两个随机变量相互独立的定义

设 X,Y是两个$r.v$，若对任意的x,y,有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称 X 和 Y 相互独立.

设 X,Y是两个$r.v$，若对任意的x,y,有

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称 X 和 Y 相互独立.

二、随机变量的相互独立的充要条件

离散型随机变量独立的判定条件

X 和 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$ 对(X,Y)的所有可能取值(x_i, y_j),有

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

即 $\quad p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$

逆否命题

X 和 Y 不相互独立 $\Longleftrightarrow$ 存在(X,Y)的某个可能取值(x_{i0}, y_{j0}),

$$s.t.\ P(X=x_{i0}, Y=y_{j0})\neq P(X=x_{i0})P(Y=y_{j0})$$

连续型随机变量独立的判定条件

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

几乎处处成立

即若 $D=\{(x,y)\mid f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)\}$，

则 $S(D)=0$.

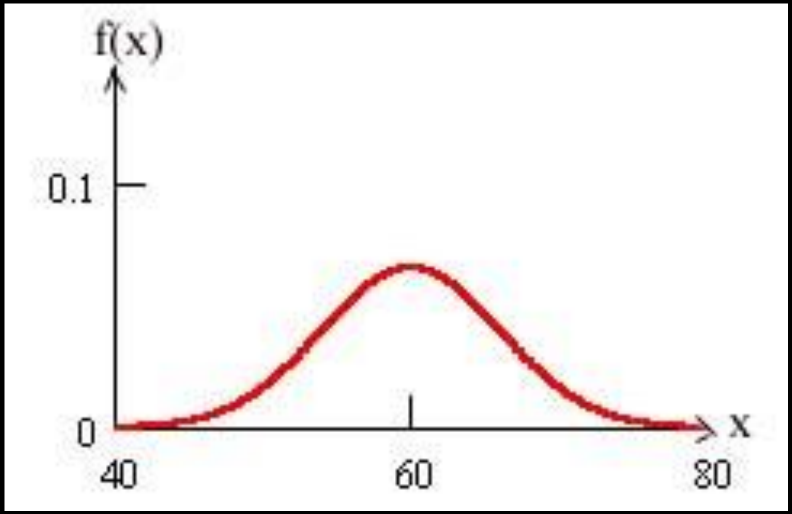
逆否命题

X 和 Y 不相互独立 $\Leftrightarrow$ 存在面积不为0的区域 D，

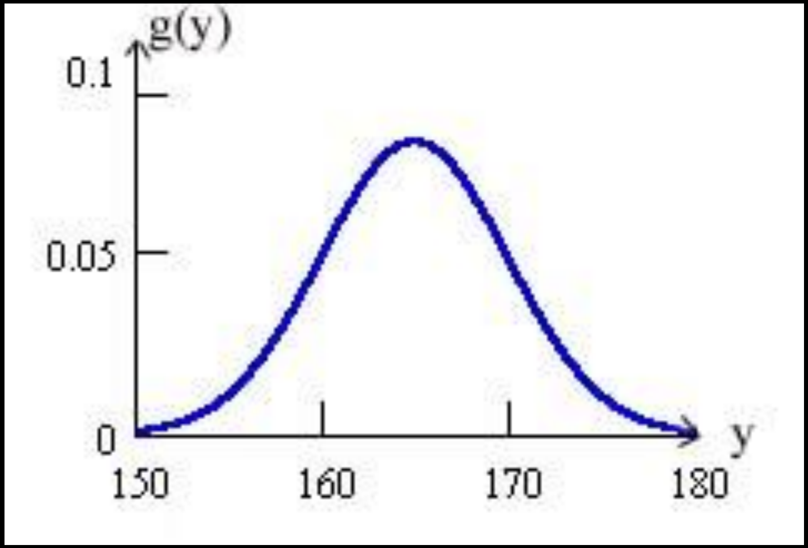
当 $(x,y)\in D$ 时，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

§ 3.3 条件分布

若限制Y=1.7(米), 在这个条件下去求X的条件分布.



体重X的分布



身高Y 的分布

1、二维离散 r. v. 的条件分布

定义1 设二维离散型r.v.(X,Y)的联合分布列

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

若 $$p_{\bullet j}=P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}>0$$

则称

$$P(X=x_i \mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}\triangleq p_{i|j}$$

$$i=1,2,\cdots$$

为在 $Y=y_j$ 的条件下, X的条件分布列.

若 $p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} > 0,$

则称 $P(Y = y_j \mid X = x_i) = \dfrac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \triangleq p_{j|i}$

$j = 1, 2, \cdots$

为在 $X = x_i$ 的条件下Y的条件分布列.

类似乘法公式

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j \mid X = x_i)$$

或

$$= P(Y = y_j)P(X = x_i \mid Y = y_j)$$

$$i, j = 1, 2, \cdots$$

类似于全概率公式

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j) \quad i=1,2,\cdots$$

类似于Bayes公式

$$P(Y=y_j\,|\,X=x_i)=\frac{P(Y=y_j)P(X=x_i\,|\,Y=y_j)}{\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}} \quad j=1,2,\cdots$$

例1 设X与Y独立，且$X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$.求在已知$X+Y=n$的条件下$X$的条件分布.

若 X 和 Y 相互独立,它们分别服从参数为 λ_1, λ_2 的泊松分布，$Z=X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

$$P(X=i)=\frac{\lambda_1^{\ i}}{i!}e^{-\lambda_1} \quad i=0,1,2,\ldots$$

$$P(Y=j)=\frac{\lambda_2^{\ j}}{j!}e^{-\lambda_2} \quad j=0,1,2,\ldots$$

于是

$$P(Z=\mathrm{k})=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^{i}}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^{i}\lambda_2^{k-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k,\quad k=0,1,\ldots$$

$$Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$P(X=k|X+Y=n)=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}$$

$$=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$$

$$=\frac{\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\dfrac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$=C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

k= 0 , 1 , …n

二维离散 r. v. 的条件分布函数

定义2 给定 $Y=y_j$ 的条件下X的条件分布函数为

$$F(x\mid y_j)=P(X\le x\mid Y=y_j)$$

$$=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i\mid Y=y_j)=\sum_{x_i\le x}p_{i|j},$$

给定 $X=x_i$ 的条件下Y的条件分布函数为

$$F(y\mid x_i)=P(Y\le y\mid X=x_i)$$

$$=\sum_{y_j\le y}P(Y=y_j\mid X=x_i)=\sum_{y_j\le y}p_{j|i}$$

2、二维连续 *r.v.*的条件分布和条件密度

当(X,Y)连续时，条件分布 $P(X \le x \mid Y = y)$,

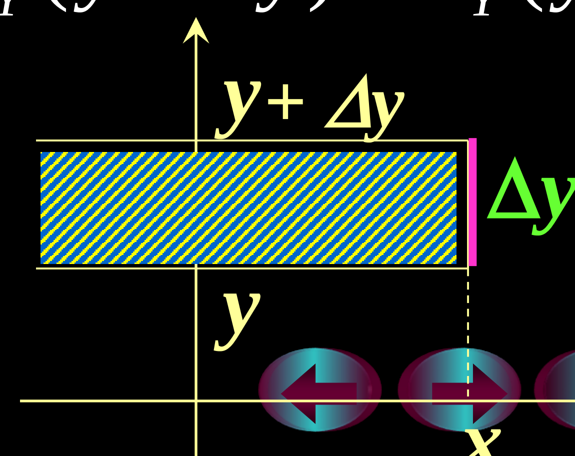
因为$P(Y = y) = 0$,考虑

$P(X \le x \mid y \le Y \le y + \Delta y)$当$\Delta y \to 0$的极限

则设$\Delta y > 0$ 可知 $P(X \le x \mid y \le Y \le y + \Delta y)$

$$= \frac{P(X \le x, y < Y \le y + \Delta y)}{P(y < Y \le y + \Delta y)} = \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{F_Y(y + \Delta y) - F_Y(y)}$$

$$= \frac{[F(x, y + \Delta y) - F(x, y)]/\Delta y}{[F_Y(y + \Delta y) - F_Y(y)]/\Delta y}$$



$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[F(x,y+\Delta y)-F(x,y)]/\Delta y}{[F_Y(y+\Delta y)-F_Y(y)]/\Delta y}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{dF_Y(y)}{dy}}=\frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,du}{f_Y(y)}$$

$$\overset{\text{def.}}{=} P(X\le x \mid Y=y)$$

$f(x,y)$连续

$f_Y(y)\neq 0$, 连续

定义3 若 $f_Y(y) > 0$, 则称 $F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$

为给定 $Y = y$ 的条件下 X 的条件分布函数.

称 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

为给定 $Y = y$ 的条件下 X 的条件概率密度函数.

类似地, 称 $F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)} dv$

为给定 $X = x$ 的条件下 Y 的条件分布函数;

称 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

为给定 $X = x$ 的条件下 Y 的条件概率密度函数.

注意

- $F_{X|Y}(x|y)$, $f_{X|Y}(x|y)$ 仅是 x 的函数, y是常数, 对每一 $p_Y(y)>0$ 的 y 处, 只要符合定义的条件, 都能定义相应的函数.

  $F_{Y|X}(y|x)$, $f_{Y|X}(y|x)$ 相仿论述.

- 类似于乘法公式:

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \qquad f_X(x)>0$$

$$=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \qquad f_Y(y)>0$$

类似于全概率公式

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)\,dy$$

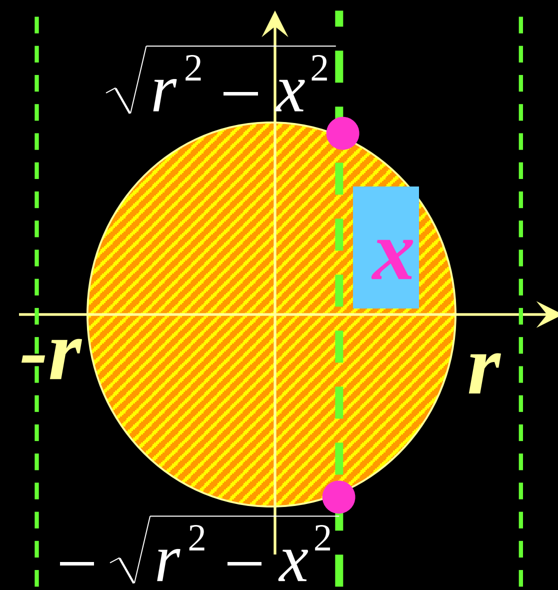
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)\,dx$$

类似于**Bayes**公式

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)\,dx}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)\,dy}$$

例2 已知(X,Y)服从圆域 $x^2+y^2\le r^2$ 上的均匀分布,求$f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$



解

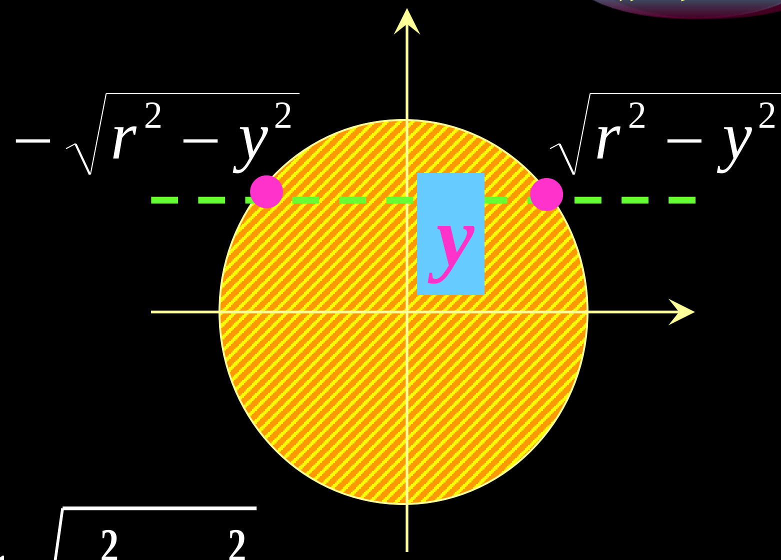
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2<r^2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy, & -r<x<r\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & -r<x<r\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

同理 $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & -r<y<r\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $-r<y<r$ 时，

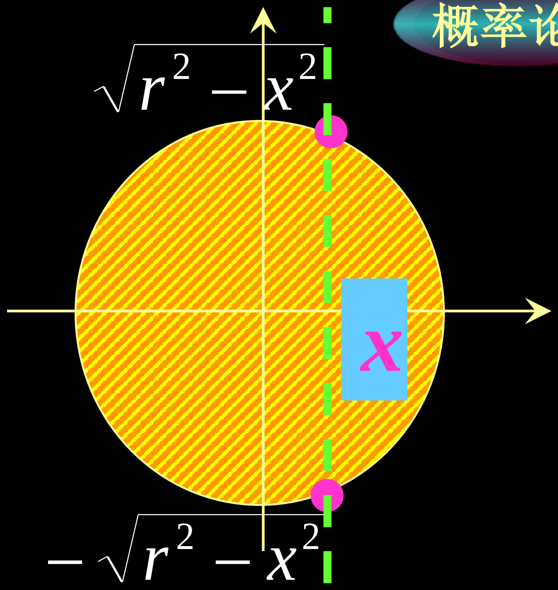


$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & -\sqrt{r^2-y^2}<x<\sqrt{r^2-y^2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

—这里 y 是常数，当 $Y=y$ 时，

$$X\sim U\left(-\sqrt{r^2-y^2},\sqrt{r^2-y^2}\right)$$



当 $-r < x < r$ 时，

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}, & -\sqrt{r^2 - x^2} < y < \sqrt{r^2 - x^2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

— 这里 x 是常数，当 $X = x$ 时，

$$Y \sim U\left(-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\right)$$

例3 已知$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$

求$f_{X|Y}(x|y)$

解 $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\dfrac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}exp\left\{-\dfrac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[(x-\mu_1)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\underbrace{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}_{\sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x-\underbrace{\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)}_{\mu}\right]^2\right\}$$

$$f_{X|Y}(x|y) \quad N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

同理，

$$f_{Y|X}(y|x) \quad N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

例4 已知 $X \sim N\left(\mu,\sigma_1^2\right), Y \mid X = x \sim N\left(x,\sigma_2^2\right)$

求 $f_Y(y)$

解 $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} exp\left\{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$

$$f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f(y \mid x) dx$$

$$Y \sim N\left(\mu,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$$

§3.5 两个随机变量的函数的分布

- 多维离散 R.V 函数的分布
- 多维连续 R.V 函数的分布——分布函数法
- $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$ 的分布
- $Z=X+Y$ 的分布

问题 已知n维r.v. $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率分布，

$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为已知的n元函数，

求 $Z = g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率分布

方法 转化为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的事件

当随机变量 X, Y 的联合分布已知时，如何求出它们的函数

$$Z = g(X, Y)$$

的分布?

方法 将与Z 有关的事件转化成与(X, Y)有关 的事件

一. 离散型随机变量函数的分布

设随机变量 (X,Y) 的分布列为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \qquad i, j=1,2,\cdots$$

由已知函数 $g(x,y)$ 可求出随机变量 Z 的所有可能取值，则 Z 的概率分布为

$$P(Z=z_k)=\sum_{i,j:\, g(x_i,y_j)=z_k} p_{ij}, \qquad k=1,2,\cdots$$

例1 设二维 r.v. (X,Y)的概率分布为

$Y \backslash X$	-1	1	2
-1	$1/4$	$1/6$	$1/8$
0	$1/4$	$1/8$	$1/12$

求 $Z_1 = X + Y$

$Z_2 = XY$

$Z_3 = Y/X$

$Z_4 = \max\{X, Y\}$

的概率分布

解

P	$1/4$	$1/4$	$1/6$	$1/8$	$1/8$	$1/12$
(X,Y)	(-1,-1)	(-1,0)	(1,-1)	(1,0)	(2,-1)	(2,0)
$Z_1 = X + Y$	-2	-1	0	1	1	2
$Z_2 = XY$	1	0	-1	0	-2	0
$Z_3 = Y/X$	1	0	-1	0	-1/2	0
$Z_4 = \max\{X, Y\}$	-1	0	1	1	2	2

故得

$X+Y$	-2	-1	0	1	2
P	$1/4$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/12$

XY	-2	-1	0	1
P	$1/8$	$1/6$	$11/24$	$1/4$

Y/X	-1	-1/2	0	1
P	$1/6$	$1/8$	$11/24$	$1/4$

$\max\{X,Y\}$	-1	0	1	2
P	$1/4$	$1/4$	$7/24$	$5/24$

例2 若 X、Y 独立，$P(X=k)=a_k$, $k=0,1,2,\ldots$, $P(Y=k)=b_k$, $k=0,1,2,\ldots$，求 $Z=X+Y$ 的分布列.

解 $P(Z=k)=P(X+Y=k)$

$$=\sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$$

由独立性

$$=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\ldots+a_kb_0 \quad k=0,1,2,\ldots$$

例3 若 X 和 Y 相互独立,它们分别服从参数为 λ_1, λ_2 的泊松分布, 证明Z=X+Y服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

解 依题意

$$P(X=i)=\frac{\lambda_1^{\,i}}{i!}e^{-\lambda_1} \quad i=0,1,2,\ldots$$

$$P(Y=j)=\frac{\lambda_2^{\,j}}{j!}e^{-\lambda_2} \quad j=0,1,2,\ldots$$

于是

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$

$$P(Z=\mathrm{k})=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{\mathrm{k}}\frac{\lambda_1^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{\mathrm{k-i}}}{(\mathrm{k-i})!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{\mathrm{k}!}\sum_{i=0}^{k}\frac{\mathrm{k}!}{\mathrm{i}!(\mathrm{k-i})!}\lambda_1^{\mathrm{i}}\lambda_2^{\mathrm{k-i}}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{\mathrm{k}!}(\lambda_1+\lambda_2)^k,\quad k=0,1,\ldots$$

$$Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

具有可加性的两个离散分布

- 设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 且独立,

  则 $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

- 设 $X \sim b(n_1, p)$, $Y \sim b(n_2, p)$, 且独立,

  则 $X + Y \sim b(n_1 + n_2, p)$

关于二项分布可加性的证明

设$X \sim b(n,p)$, $Y \sim b(m,p)$, 且X与Y独立，则

$Z = X + Y$ 的可能取值为 0,1,2, …, $n+m$

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

- 当$i > n$时，$\{X = i\}$是不可能事件；
- 当$k-i > m$时，$\{Y = k-i\}$是不可能事件；

考虑$k - m \le i \le n$

记 $a = \max\{0, k-m\}$, $b = \min\{n,k\}$

记 $a=\max\{0,k-m\},\quad b=\min\{n,k\}$

$$P(Z=k)=\sum_{i=a}^{b}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=a}^{b}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}\cdot\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)}$$

$$=p^{k}(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=a}^{b}\binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i}$$

$$=\binom{n+m}{k}p^{k}(1-p)^{n+m-k}.$$

$$\boxed{\sum_{i=a}^{b}\binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}}$$

$\Rightarrow$ $Z=X+Y\sim b(n+m,p)$

推广 $X_1 \sim b(n_1,p)$ $X_2 \sim b(n_2,p)$ $\cdots$ $X_k \sim b(n_k,p)$

则 $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim b(n_1 + n_2 + \cdots + n_k, p)$

特别当 $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$时

则 $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim b(k,p)$

二. 连续型随机变量函数的分布

$(X,Y) \sim f(x,y)$, $Z = g(X,Y)$, 求 $f_Z(z)$

1. 分布函数法

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(g(X,Y) \le z)$$

$$= \iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,dxdy$$

例4：设X、Y相互独立，且都服从相同的分布 N(0,1)，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布密度 $f_Z(z)$

解：由题意 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty$$

$\therefore$ (X,Y)的联合分布密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad (x,y)\in R^2$$

当 $z \le 0$ 时， $F_Z(z) = 0$

当 $z > 0$ 时，

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \le z\}$$

$$= \iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le z} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

$$F_Z(z) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} ze^{-\frac{z^2}{2}} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

称之为瑞利(Ray Leigh)分布

1. 设二维连续随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y & x^2\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求条件密度函数 $f(y|x)$；

(2) 求条件概率 $p(Y\ge 0.75|X=0.5)$.

2.已知当 $y>0$ 时，在条件 $Y=y$ 下 X 的条件密度函数为 $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 0<x<y\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，

Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求(1)(X, Y)的联合密度函数 $f(x,y)$；　(2)随机变量 X 的概率密度函数 $f_X(x)$；

(3)条件概率 $P(X>4|X>1)$.