§4.1 随机变量的数学期望

在随机变量的研究中，常常需要去研究某些与随机变量有关的，能反映随机变量重要特征的“数”，我们把这种“数”称作随机变量的数字特征。

这些数字特征中最常用的是数学期望、方差、协方差和相关系数等.

一、数学期望的概念

（分赌本问题）17世纪中叶，一位赌徒向法国数学家帕斯卡提出一个使他苦恼长久的分赌本问题：甲乙两赌徒赌技不相上下，各出赌注50法郎，每局中无平局。他们约定，谁先赢三局，则得全部赌本100法郎。当甲赢了两局、乙赢了一局时，因故要中止赌博。现问这100法郎如何分才算公平？

帕斯卡提出的分法：设想再赌下去，则甲最终所得X是一个随机变量，其可能取值为0或100。

再赌两局必可结束，结果可能为

甲甲 、甲乙、乙甲、乙乙

只有“乙乙”这种情况下甲获0法郎

X	0	100
P	0.25	0.75

甲的“期望”所得应为：

0*0.25+100*0.75=75(法郎)

一、离散型随机变量的数学期望　　Expection 期望

定义1：设离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k \qquad k = 1,2,\cdots,$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量X的数学期望，简称期望或均值，

记作

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

若级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| p_k$ 不收敛，则称X的数学期望不存在

(1) X是随机变量，而期望 E(X) 是一个实数，它由概率分布唯一确定；

(2) E(X) 可以看作是一种“加权平均值”

(3) 要求级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变；

(4) 并非所有随机变量的期望都存在。

常见分布的期望

1. 二项分布 设 $X \sim B(n,p)$

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,2,\cdots n$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}\cdot p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

令 $k'=k-1$

$$=np\sum_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'} p^{k'}(1-p)^{(n-1)-k'}=np(p+1-p)^{n-1}=np$$

2.两点分布

设X服从参数为 p 的两点分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k} \qquad k=0,1 \qquad 0<p<1$$

$$\therefore\ E(X)=o\times(1-p)+1\times p=p$$

3、泊松分布

X服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，其分布律为:

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{\lambda^{\mathrm{k}-1}}{(\mathrm{k}-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

例1 按规定,某车站每天8:00~9:00,9:00~10:00都恰有一辆客车到站,但到站时刻是随机的,且两者到站的时间相互独立。其规律为:

到站时刻	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概率	1/6	3/6	2/6

一旅客8:20到车站,求他候车时间的数学期望.

解：设旅客的候车时间为X(以分计),其分布率为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

上表中例如

$$P\{X=70\}=P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$$

其中A为事件"第一班车8:10到站",B为事件"第二班车9:30到站".候车时间X的数学期望为

$$E(X)=10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{36}+70\times\frac{3}{36}+90\times\frac{2}{36}=27.22\text{分}$$

数学期望的应用

例2: 在一个人数很多(N)的团体中普查肝炎病毒,若每个人的血样分别化验, 则一个人耗费一份化验费 ,需验N次. 现采用以下改进方案:

先将每个人的血样各取出一部分,按 k 个人一组进行分组，即把 k 个人的血混在一起检验。

(1) 如呈阴性反应，说明 k 个人的血都呈阴性反应，这样这 k 个人的血就只需验一次;

(2) 若呈阳性，则再对这k 个人的血液分别化验，这样， k 个人的血共化验了k+1 次,

假设每个人化验呈阳性的概率 p，且这些人试验反应相互独立，试说明当 p 较小时，选取适当的 k，按改进方案可以减少化验次数,并说明 k 取什么值时最适宜。

解：各人的血呈阴性反应的概率为 $q = 1 - p$

故 k个人混合血呈阴性反应的概率为 q^k

k个人混合血呈阳性反应的概率为 $1 - q^k$

设以 k 个人为一组时，组内每人化验次数为X，则X是一个随机变量其分布律为:

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X的数学期望为：

$$E(X)=\frac{1}{k}q^k+(1+\frac{1}{k})(1-q^k)$$

$$=1-q^k+\frac{1}{k}$$

N个人平均需化验的次数为：$N\left(1-q^{k}+\frac{1}{k}\right)$

由此可知，只要选择 k，使 $1-q^{k}+\frac{1}{k}<1$

则N个人平均需化验次数 < N

当 p 固定时，我们选取 k 使得

$L=1-q^{k}+\frac{1}{k}$ 小于1且取到最小值，

这时，就能得到最好的分组方法。

例如 p=0.1 则 q=0.9 当 k=4 时，

$L = 1 - q^k + \frac{1}{k}$ 取得最小值，此时，

得到最好的分组方法。

若 N=1000，此时以 k=4 分组

则按第二方平均只需化验

$$1000(1 - 0.9^4 + \frac{1}{4}) = 594$$ 次

这样平均起来，可以减少40%的工作量

二、连续型随机变量的数学期望

定义2.设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望。记为 E(X)

即
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

注意 不是所有的 r.v.都有数学期望

例如：柯西(Cauchy)分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<+\infty$$

但$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx$发散

它的数学期望不存在!

常见分布的期望

4、均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$$E(X)=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$$

5. 指数分布

设X服从参数为λ (λ>0 为常数)的指数分布

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

6. 正态分布　　　　设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

令 $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$　　　$dx=\sigma dt$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sigma t+\mu)}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma t e^{-\frac{t^2}{2}} dt+\int_{-\infty}^{+\infty} \mu e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[0+\mu\sqrt{2\pi}]=\mu$$

三、随机变量函数的数学期望

1. 问题的提出：

设已知随机变量X的分布，我们需要计算的不是X的期望，而是X的某个函数的期望，比如说$g(X)$的期望. 那么应该如何计算呢？

例3 已知随机变量的分布列如下

X	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.2	0.1	0.2	0.3

求 $Y = X^2$ 的数学期望.

解

X^2	$(-2)^2$	$(-1)^2$	0^2	1^2	2^2
P	0.2	0.2	0.1	0.2	0.3

$\longrightarrow$

X^2	0	1	4
P	0.1	0.4	0.5

$$E(X^2) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 4 \times 0.5 = 2.4$$

也可得$E(X^2) = (-2)^2 \times 0.2 + (-1)^2 \times 0.2$

$$+ 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.3 = 2.4$$

定理1 r.v.X函数 $Y=g(X)$ 的数学期望

- 设离散 r.v. X 的概率分布为

$$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots$$

若无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则

$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

- 设连续 r.v. X的密度函数为$f(x)$

若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

例4: 假定国际市场每年对我国某种商品的需求量是一个随机变量 X (单位:吨), 它服从 U[2000,4000] 的均匀分布. 已知每售出一吨该商品就可赚得外汇 3万美元, 但若销售不出, 则每吨需仓储费用 1万美元, 那么，外贸部门每年应组织多少货源才能使收益最大?

解: 以 k记为组的货源数量，收益是 X 的函数，且也是一个随机变量，记为 Y， 则

$$Y = g(X) = \begin{cases} 3k & \text{当} X \geq k \text{ 时} \\ 3X - (k - X) & \text{当} X < k \text{ 时} \end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \quad =\frac{1}{2000}\int_{2000}^{4000} g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2000}\int_{2000}^{k} g(x)dx+\frac{1}{2000}\int_{k}^{4000} g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2000}\int_{2000}^{k}(4x-k)dx+\frac{1}{2000}\int_{k}^{4000} 3kdx$$

$$=\frac{1}{1000}(-k^2+7000k-2\times 10^6)$$

显然在 k=3500 时达到最大值，因此外贸部门应组织3500吨该种商品。

四、二维随机变量函数的数学期望

设随机变量 (X,Y) 的函数 Z=g(X,Y)

(1) 当 (X,Y) 是离散型随机变量时

$$P\{X=x_i, Y=y_i\}=p_{ij}, \qquad i,j=1,2\cdots$$

则 $E(Z)=\sum_{j}\sum_{i} g(x_i, y_j) p_{ij}$

(2) 当 (X,Y)是连续型随机变量时，联合密度函数为 $f(x,y)$ ，则

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\cdot \mathrm{f}(x,y)dxdy$$

五、二维随机变量的数学期望

设二维R.V(X， Y)，联合分布已知 ,E(X),E(Y)都存在，则(X， Y) 的数学期望定义(E(X),E(Y))。

1) (X， Y)为离散型随机变量，则

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_{i\cdot}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}$$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{\cdot j}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}y_j p_{ij}$$

2) (X， Y)为连续型随机变量，则

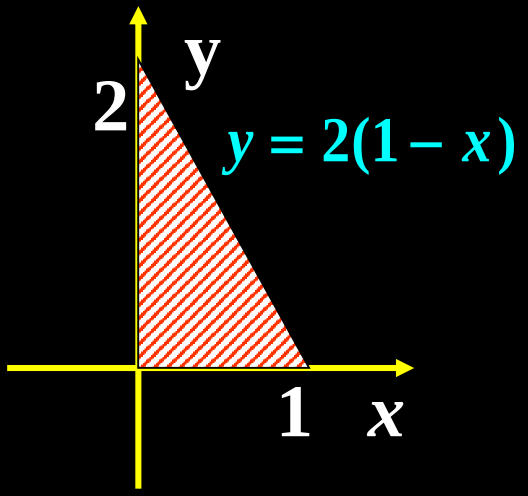
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{f}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\mathrm{f}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$$

例5: 已知 (X，Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6xy & 0<x<1 \\ & 0<y<2(1-x) \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 E(X) , E(Y) ,



解:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}6x^2ydy$$

$$=6\int_0^1 x^2dx\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^{2(1-x)}$$

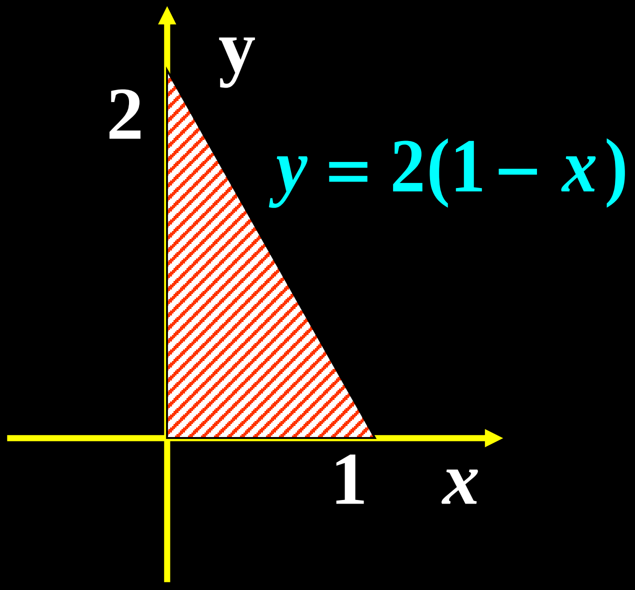
$$=12\int_0^1 x^2(1-x)^2dx \quad =\frac{2}{5}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_0^2 dy\int_0^{1-\frac{y}{2}} 6xy^2\,dx$$

$$=6\int_0^2 y^2 dy\cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{1-\frac{y}{2}}$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^2 y^2(2-y)^2\,dy \;=\frac{4}{5}$$



例6：设X， Y相互独立，同分布都服从 $N(0,1)$ ，

求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的期望。

解:

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

则 $$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\gamma^2}{2\pi}e^{-\frac{\gamma^2}{2}}d\gamma d\theta=\int_0^{+\infty}\gamma^2 e^{-\frac{\gamma^2}{2}}d\gamma=-\int_0^{+\infty}\gamma de^{-\frac{\gamma^2}{2}}$$

$$=-\gamma e^{-\frac{\gamma^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\gamma^2}{2}}dr$$

$$=0+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\gamma^2}{2}}d\gamma=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

六、数学期望的性质

1) $E(c)=c$ ，其中 c 是常数

2) $E(cX)=cE(X)$， c 为常数，X为随机变量

3) 设X，Y是任意两个随机变量，则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

推论：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是n个任意的随机变量，

$E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n)$ 都存在，则

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

4) 设X，Y为两相互独立的随机变量，

$E(X),E(Y)$ 都存在，则

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

注意:反过来不一定成立.

推论： 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是n个相互独立的随机变量，

$E(X_1),E(X_2),\cdots,E(X_n)$ 都存在，

则 $$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$