1. 数学期望的定义

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

2．一、二维随机变量函数的数学期望：

$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$$

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

$$E(Z)=E(g(X,Y))=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{i,j}$$

$$E(Z)=E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

3．二维随机变量(X,Y)的数学期望：(E(X),E(Y))

$$Z=g(X,Y)=X,\quad Z=g(X,Y)=Y$$

$$E(Z)=E(g(X,Y))=E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_ip_{i,j}$$

$$E(Z)=E(g(X,Y))=E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

4、数学期望的性质

1) $E(c)=c$ ，其中 c 是常数

2) $E(cX)=cE(X)$， c 为常数，X为随机变量

3) 设X，Y是任意两个随机变量，则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

证: 3) 设二维 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$ ， 则

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=E(X)+E(Y)$$

数学期望是线性函数

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$$

4、数学期望的性质

3) 设X，Y是任意两个随机变量，则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

推论：设 $X_1, X_2, \ldots X_n$是n个任意的随机变量，

$E(X_1), E(X_2), \ldots E(X_n)$ 都存在，则

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

4) 设X，Y为两相互独立的随机变量，$E(X),E(Y)$ 都存在，

则 $$E(XY)=E(X)E(Y)$$

注意:反过来不一定成立.

证: 4) $\because$ X，Y相互独立，

$$\therefore \ f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)\cdot f_Y(y)dxdy$$

$$= [\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx][\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy]$$

$$= E(X)E(Y)$$

推论：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是n个相互独立的随机变量，

$E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n)$ 都存在，

则 $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$ 注意:反过来不一定成立.

例1：设X, Y服从同一分布，其分布律为：

X	-1	0	1
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

已知 $P(|X| = |Y|)=0$，求X和Y的联合分布，E（XY），并判断X和Y是否独立？

解：先求X,Y的联合分布率：

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	0	$1/4$	0	$1/4$
0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$	0	$1/4$
$p_{i\cdot}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

X,Y的联合分布率：

$X \quad Y$	-1	0	1	$p_{.j}$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$p_{i.}$	1/4	1/2	1/4	

$$E(X)=(-1)\times 1/4+0\times 1/2+1\times 1/4=0$$

$$E(\mathrm{Y})=(-1)\times 1/4+0\times 1/2+1\times 1/4=0$$

$$E(XY)=(-1)\times(-1)\times 0+(-1)\times 1\times 0$$

$$+1\times(-1)\times 0+1\times 1\times 0+(-1)\times 0\times 1+1\times 0\times 1=0$$

$$P(X=-1,Y=-1)=0,$$

$$P(X=-1)P(Y=-1)=1/4\times 1/4$$

$$\mathrm{E(XY)=E(X)E(Y)}$$

$$P(X=-1,Y=-1)\neq P(X=-1)P(Y=-1)$$

所以，X与Y不独立。

设 $X \sim B(n,p)$ $P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,\cdots n$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np(p+1-p)^{n-1} = np$$

若引进随机变量

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{第i次事件A不发生} \\ 1, & \text{第i次事件A发生} \end{cases}$$

则 X_i 服从两点分布

因此 $E(X_i) = p$, $D(X_i) = p(1-p)$ 而 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

所以 $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$

§ 4.2 随机变量的方差与标准差

如果有甲乙两种牌号的手表，它们的日走时误差分别为 X_1 和 X_2 ，各具有如下的分布列：

$$\begin{pmatrix} X_1 & -1 & 0 & 1 \\ p_k & 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X_2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ p_k & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$E(X_1)=E(X_2)=0$ 问题：如何比较两种手表的优劣？

是否可以用一个指标来衡量一个随机变量离开它的期望值E(X)的偏离程度？

一、方差的定义

设X是随机变量，若期望 $E[X-E(X)]^2$ 存在，则称它为随机变量X的方差，记为

$$D(X)=Var(X)=E[X-E(X)]^2$$

又取 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 称为X的标准差或均方差。

difference 差，差分;

variance 方差，偏差

关于方差的定义和计算作如下的说明：

1、方差表达了随机变量X的取值与其数学期望的偏离程度。是刻画X取值分散程度的一个量。

2、由定义知，方差实际上就是随机变量X的函数

$$g(X)=[X-E(X)]^2$$ 的数学期望。

对于离散型随机变量，设其分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k \qquad k=1,2,\cdots$$

则 $$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k$$

对连续型随机变量，设X的概率密度函数为 $f(x)$

则 $$D(X)=Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$$

3、常用的计算方差之公式

$$\boxed{D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2}$$

证： $D(X)=E[X-E(X)]^2$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\} \quad =E(X^2)-[E(X)]^2$$

4) 函数 $f(x)=E[X-x]^2$， 当 $x=E(X)$ 时，

f(x) 取最小值 $D(X)$ ，即

$$D(X)\le E(X-x)^2$$

证： $\mathrm{f}(x)=E(X-x)^2 \;=E(X-\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(X)-x)^2$

$$=E(X-\mathrm{E}(X))^2+[E(X)-x]^2+\underbrace{2E(X-\mathrm{E}(X))(E(X)-x)}_{=0}$$

$$=E(X-\mathrm{E}(X))^2+[E(X)-x]^2$$

$$\ge \mathrm{D}(X)$$

当 $x=E(X)$ 时，等号成立。

二、方差的性质

① $D(c)=0$ c为常数

$$D(kX+b)=k^2D(X)$$

② $D(cX)=c^2D(X)$ c为常数

③ 设X和Y是两个随机变量，$D(X),D(Y)$ 存在，则有

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$$

特别地，若X和Y相互独立，则有

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

④ $D(X)=0$ 的充要条件是：X依概率 1 取常数 c，即

$$P\{X=c\}=1$$

注：仅知 r.v. 的期望与方差，并不能确定其分布

例如

X	-1	0	1
P	0.1	0.8	0.1

$$E(X)=0,\ \mathrm{Var}(X)=0.2$$

与

Y	-2	0	2
P	0.025	0.95	0.025

$$E(Y)=0,\ \mathrm{Var}(Y)=0.2$$

有相同的期望方差但是分布却不相同

三、常见分布的期望方差

1.两点分布

设X服从参数为 p 的两点分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k} \qquad k=0,1 \qquad 0<p<1$$

$$\therefore \quad E(X)=o\times(1-p)+1\times p=p$$

$$E(X^2)=o^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

$$\therefore \quad D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=p-p^2=p(1-p)=pq$$

2. 二项分布

设 $X \sim B(n,p)$ $P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots n$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np(p+1-p)^{n-1} = np$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X] = E[X(X-1)]+E(X)$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!} p^{k-2} (1-p)^{[(n-2)-(k-2)]}$$

$$= n(n-1)p^2$$

$$\therefore \quad D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2$$

$$= np(1-p) = npq$$

若引进随机变量

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{第i次事件A不发生}\\1, & \text{第i次事件A发生}\end{cases}$$

则 X_i 服从两点分布

因此 $E(X_i)=p$, $D(X_i)=p(1-p)$ 而 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$

所以 $E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$

且 $X_i(i=1,2\cdots n)$ 相互独立

$$D(X)=D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=np(1-p)$$

3、泊松分布

X服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，

其分布律为：

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

参照二次分布的计算法可推得： $D(X)=\lambda$

4、均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$ $\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$$E(X)=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx \quad =\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx \;=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$$

$$\therefore \quad D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)-(\frac{a+b}{2})^2$$

$$=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

5. 指数分布

设X服从参数为λ（λ >0 为常数)的指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$\therefore\quad D(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

5. 指数分布

设X服从参数为θ (θ>0 为常数)的指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$$

$$\therefore\quad D(X)=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$$

6. 正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$$

令 $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^2 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -t\, d e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-t e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} [0 + \sqrt{2\pi}] = \sigma^2$$

关于正态分布的一个重要结论:

设X,Y相互独立,且都服从正态分布, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ **, 则X,Y的任一线性组合:**

$$Z = aX + bY + c \quad \text{仍服从正态分布}$$

$$Z \sim N(a\mu_1 + b\mu_2 + c, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

如: $X \sim N(1,3)$, $Y \sim N(2,4)$且X,Y相互独立,

则 $Z = 2X - 3Y \sim N(-4, 48)$

独立的n个正态变量的线性组合仍服从正态分布：

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i = 1, 2, \cdots n$ 且它们相互独立

则它们的线性组合：

$$\boxed{\begin{aligned} & C_0 + C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_n X_n \\ & \sim N(C_0 + C_1\mu_1 + \cdots + C_n\mu_n, C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \cdots + C_n^2\sigma_n^2) \end{aligned}}$$

$C_1, C_2 \cdots C_n$是不全为0的常数

例1　某人有一笔资金，可投入两个项目：房产和商业，其收益都与市场状态有关。若把未来市场划分为好中差三个等级，其发生的概率分别为0.2，0.7，0.1. 通过调查，该投资者认为投资于房产的收益*X*（万元）和投资于商业的收益*Y*（万元）的分布分别为

X	11	3	-3
P	0.2	0.7	0.1

Y	6	4	-1
P	0.2	0.7	0.1

问：该投资者如何投资为好?

解：平均收益　$EX = 4.0$(万元)　$EY = 3.9$(万元)

从平均收益看，投资房产收益大

方差　$D(X) = 15.4$　$D(Y) = 3.29$

标准差　$\sqrt{D(X)} = 3.92$　$\sqrt{D(Y)} = 1.81$

从方差看，投资房产的风险大。

例2：设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu$ ，方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$

记 $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 则 $E(X^*)=E\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)=0$

$$D(X^*)=D\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}D(X-\mu)=\frac{1}{\sigma^2}D(X)=1$$

即 $E(X^*)=0,\ D(X^*)=1$

称 X^* 为X的标准化变量

四、切比雪夫不等式

定理 设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu$ ，方差

$D(X)=\sigma^2<\infty$ 则对 $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(|X-E(X)|\geq \varepsilon\right)\leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

或

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

事件"$|X-E(X)|\geq \varepsilon$"称为大偏差，

P（$|X-E(X)|\geq \varepsilon$）称为大偏差发生的概率。

证：设X是连续型随机变量，它的分布密度为: $f(x)$

则 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-E(X)|\geq\varepsilon} f(x)dx$

$$\leq \int_{|x-E(X)|\geq\varepsilon} \frac{[x-E(X)]^2}{\varepsilon^2} f(x)dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[x-E(X)]^2}{\varepsilon^2} f(x)dx = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

用对立事件的计算公式:

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

当方差已知时，切比雪夫不等式给出了***r.v X***与它的期望的偏差不小于 ε 的概率的估计式．如取$\varepsilon=3\sigma$

$$P\{|X-E(X)|\geq 3\sigma\}\leq\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}\approx 0.111$$

可见，对任给的分布，只要期望和方差σ^2存在，则 ***r.v X***取值偏离$E(X)$超过 3σ的概率小于**0.111**．

例5 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是7300，均方差是700 . 利用切比雪夫不等式估计每毫升白细胞数在5200~9400之间的概率 .

解：设每毫升白细胞数为X

依题意，$E(X)=7300, D(X)=700^2$

所求为 $P(5200 \le X \le 9400)$

$$P(5200 \le X \le 9400)$$

$$= P(-2100 \le X-E(X) \le 2100)$$

$$= P\{ |X-E(X)| \le 2100\}$$

由切比雪夫不等式

$$\boldsymbol{P\{\,|X\text{-}E(X)|\leq 2100\}}\ \geq 1-\frac{\boldsymbol{D(X)}}{(2100)^2}$$

$$=1-\left(\frac{700}{2100}\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

即估计每毫升白细胞数在**5200~9400**之间的概率不小于**8/9 .**