一、方差的定义

$$D(X)=Var(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ X的标准差或均方差。

二、方差的性质

① $D(c)=0$ ② $D(cX)=c^2D(X)$

③ 设X和Y是两个随机变量， $D(X),D(Y)$ 存在，则有

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right)$$

若X和Y相互独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

$$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$

④ $D(X)=0$ 的充要条件是：X依概率 1 取常数 c，即

$$P\{X=c\}=1$$

标准化变量

设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu$ ，方差

$$D(X)=\sigma^2 \neq 0$$

记 $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 则 $E(X^*)=E\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)=0$

$$\mathrm{D}(\mathrm{X}^*)=\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{D}(\mathrm{X}-\mu)=\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{D}(\mathrm{X})=1$$

即 $E(X^*)=0,\ D(X^*)=1$

称 X^* 为X的标准化变量

三、切比雪夫不等式

定理 **设随机变量X具有数学期望** $E(X)=\mu$ **，方差** $D(X)=\sigma^2<\infty$ 则对 $\forall\varepsilon>0$

$$P\left(|X-E(X)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

或

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

事件"$|X-E(X)|\geq\varepsilon$"称为大偏差，

P（$|X-E(X)|\geq\varepsilon$）称为大偏差发生的概率。

§ 3.4 多维随机变量的特征数

1、协方差

2、相关系数

3、随机向量的期望和协方差矩阵

一、 协方差

问题 对于二维 r.v. (X, Y):

$$\boxed{\text{已知联合分布}} \;\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}\; \boxed{\text{边际分布}}$$

由方差的性质

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

如果X与Y独立,则 $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = 0$

这意味着

当 $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \neq 0$ 时，X与Y必不独立

1、 协方差的定义

Covariance 协方差

对于二维随机变量(X,Y), 如果 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在，则称它为X与Y的协方差，记为 $Cov(X,Y)$

即:

$$Cov(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

当 $Y=X$ 时， $\mathrm{Cov}(X,X)=E(X-EX)^2=\mathrm{Var}(X)$

2、 协方差的常用计算公式:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

★ 3、 协方差的基本性质:

性质1: 对任意两个随机变量X，Y

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X,Y)$$

推论 若X，Y独立，则

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

推广: 对任意n个随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} Cov(X_i, X_j)$$

性质2: 对任意两个随机变量X，Y，

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$$

性质3: 对任意随机变量X和常数a,有

$$\mathrm{Cov}(X,a)=0$$

性质4: 对任意常数a,b,有

$$\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

性质5: 对任意两个随机变量X，Y,Z,有

$$\mathrm{Cov}(X+Y,Z)=\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(Y,Z)$$

标准化变量

设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu$ ，方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$ 记 $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$

则 $E(X^*)=0,\ \ D(X^*)=1$

称 X^* 为X的标准化变量

$$(kX)^*=\frac{kX-k\mu}{\sqrt{k^2}\sigma}=\frac{k}{|k|}X^*$$

将随机变量标准化，即令

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \qquad Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$$

$$(aX)^* = \frac{a}{|a|} X^*, (bY)^* = \frac{b}{|b|} Y^* \quad Cov((aX)^*, (bY)^*) = \frac{ab}{|ab|} Cov(X^*, Y^*)$$

则 $E(X^*) = E(Y^*) = 0 \qquad D(X^*) = D(Y^*) = 1$

故 $Cov(X^* Y^*) = E(X^* Y^*) - E(X^*) E(Y^*)$

$$= E(X^* Y^*) = E\left[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \cdot \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right]$$

$$= \frac{E[(X - E(X)(Y - E(Y)]}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho_{XY}$$

二、相关系数（Correlation coefficient）

若$D(X)>0, D(Y)>0$，称

$$\boxed{\rho_{XY}=E\left(\frac{(X-E(X))(Y-E(Y))}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}\right)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}}$$

为X,Y的(线性)相关系数.

事实上， $\rho_{XY}=Cov(X^*,Y^*)$

$$X^*=\frac{X-EX}{\sqrt{D(X)}}\qquad Y^*=\frac{Y-EY}{\sqrt{D(Y)}}$$

无量纲的量

1）ρ_{XY} 描述随机变量X和Y间有无线性相关关系

2）ρ_{XY}是一个无量纲的量。

相关系数的性质

性质1 $-1 \le \rho_{XY} \le 1$

证 $\because \quad E(X^*) = E(Y^*) = 0,$

$$D(X^* \pm Y^*) = D(X^*) + D(Y^*) \pm 2\operatorname{cov}(X^*, Y^*)$$

$$\therefore \quad D(X^* \pm Y^*) = 2\left[1 \pm \rho_{XY}\right]$$

$\because \quad D(X^* \pm Y^*) \ge 0, \quad \therefore \quad 1 \pm \rho_{XY} \ge 0$

$$\therefore \quad |\rho_{XY}| \le 1$$

性质2 $\boxed{\rho_{XY} = \pm 1}$ $\Longleftrightarrow$

X与Y几乎处处有线性关系,即存在$a(a \neq 0), b$,使得
$$P(Y = aX + b) = 1$$

其中当 $\rho_{XY} = 1$ 时,有 $a > 0$, 当 $\rho_{XY} = -1$ 时,有 $a < 0$.

强相关定理 $\left|\rho_{XY}\right|=1 \iff p(Y=a+bX)=1,$

并且 $\rho_{XY}=\begin{cases}1, & b>0;\\ -1, & b<0.\end{cases}$

$\boxed{证}$ “$\Leftarrow$” $Y=a+bX,$

$\because E(Y)=a+bE(X),\quad D(Y)=b^2D(X),\quad \sigma(Y)=|b|\sigma(X),$

$$\therefore \operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E\{[X-E(X)][a+bX-E(a+bX)]\}$$

$$=E\{[X-E(X)][a+bX-a-bE(X)]\}$$

$$=bE\{[X-E(X)]^2\}=bD(X)=b\sigma^2(X)$$

于是

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{b\sigma^2(X)}{|b|\sigma^2(X)}=\frac{b}{|b|}=\begin{cases}1, & b>0;\\ -1, & b<0.\end{cases}$$

设 $|\rho_{XY}|=1$ $\because D(X^*\pm Y^*)=2[1\pm\rho_{XY}]$

$\therefore$ $when \quad \rho_{XY}=\pm 1,$

$$D(X^*\mp Y^*)=E\left\{\left[\left(X^*\mp Y^*\right)-E\left(X^*\mp Y^*\right)\right]^2\right\}=0$$

$$p(X^*\mp Y^*=c)=1,$$

$$P\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}\mp\frac{Y-E(Y)}{\sigma(Y)}=c\right)=1$$

$$P\left(Y=\left[E(Y)\mp\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}E(X)+c\sigma(X)\sigma(Y)\right]+\left[\mp\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\right]X\right)=1$$

即 $Y=a+bX.$

有线性关系是一个极端，另一极端是 $\rho_{XY}=0$ 的场合。

若X与Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$ 则称X与Y 不相关。

对X、Y，下列事实是等价的：

1) X与Y 不相关

若X与Y独立 $\Rightarrow$ X与Y不相关，

反之不成立.

2) $\rho_{XY}=0$

3) $Cov(X,Y)=0$

4) $E(XY)=E(X)E(Y)$

5) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

例1：设X, Y服从同一分布，其分布律为：

X	−1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

已知 $P(|X| = |Y|)=0$, 判断X和Y是否不相关？是否不独立？

解：先求X,Y的联合分布率：

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	0	$1/4$	0	$1/4$
0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$	0	$1/4$
$p_{i\cdot}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

$$E(X)=(-1)\times 1/4+0\times 1/2+1\times 1/4=0$$

$$E(\mathrm{Y})=(-1)\times 1/4+0\times 1/2+1\times 1/4=0$$

$$E(XY)=(-1)\times(-1)\times 0+(-1)\times 1\times 0$$

$$+1\times(-1)\times 0+1\times 1\times 0+(-1)\times 0\times 1+1\times 0\times 1=0$$

所以，$COV(X,Y)=0$,即X与Y不相关.

$$P(X=-1,Y=-1)=0,$$

$$P(X=-1)P(Y=-1)=1/4\times 1/4$$

$$P(X=-1,Y=-1)\neq P(X=-1)P(Y=-1)$$

所以，X与Y不独立。

例2 设$V \sim U(0,2\pi)$, $X=\cos V$, $Y=\cos(V+\alpha)$,

α 是给定的常数，求 ρ_{XY}

解

$$p_V(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<t<2\pi, \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\frac{1}{2\pi}dt=0,$$

$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\cos(t+\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi}dt=0,$$

$$E(XY)=\int_0^{2\pi}\cos(t)\cos(t+\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi}dt=\frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{Cov}(X,Y)=\frac{1}{2}\cos\alpha}$$

$$E(X^2)=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\cdot\frac{1}{2\pi}dt=\frac{1}{2},\qquad \mathbf{Var}(X)=\frac{1}{2},$$

$$E(Y^2)=\int_0^{2\pi}\cos^2(t+\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi}dt=\frac{1}{2},\qquad \mathbf{Var}(Y)=\frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_{\mathrm{XY}}=\cos\alpha}$$

$$\boxed{\rho_{XY} = \cos\alpha}$$

若 $\alpha = 0,\ \rho_{XY} = 1 \longrightarrow Y = X$

若 $\alpha = \pi,\ \rho_{XY} = -1 \longrightarrow Y = -X$

$$\left.\begin{array}{l} Y = X \\ Y = -X \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$|\rho_{XY}| = 1 \longrightarrow X,Y$ 有线性关系

若 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2},\quad \rho_{XY} = 0$　　X,Y 不相关，

但 X,Y 不独立，

X,Y 没有线性关系，但有函数关系

$$X^2 + Y^2 = 1$$

X, Y 相互独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ X, Y 不相关

特例 若 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则

$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$Cov(X,Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$ $\rho_{XY} = \rho$

X, Y 相互独立 $\longleftrightarrow$ X, Y 不相关

命题 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

X与Y相互独立 $\longleftrightarrow$ $\rho = 0$

例3：设X, Y相互独立服从同一分布，记U=X−Y, V=X+Y, 则随机变量U与V是否一定不相关，是否一定独立？

解： $COV(U,V)=COV(X-Y,X+Y)=D(X)-D(Y)=0$

所以，U与V一定不相关。

(1) 设X, Y独立, 服从正态分布，则（U, V）服从正态分布。

对于二维正态分布，独立与不相关等价，从而U与V独立

（2） $X\sim b(1,\quad 1/2)$　$P(U=1,V=0)=P(X-Y=1,X+Y=0)=0$

$P(U=1)=P(X-Y=1)=P(X=1,Y=0)=1/4,$

$P(V=0)=P(X+Y=0)=P(X=0,Y=0)=1/4,$

$\therefore P(U=1,V=0)\neq P(U=1)P(V=0)$　所以 U与V不独立

例4　随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\qquad -\infty<x<+\infty$$

(1) X与$|X|$是否不相关？

(2) X与$|X|$是否独立？

(1) $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$$

$$E(X\cdot|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot|x|\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$$

$$\therefore Cov(X,|X|)=E(X\cdot|X|)-E(X)E(|X|)=0$$

$\therefore$ X与$|X|$不相关.

例4　随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

(1) X 与 $|X|$ 是否不相关？

(2) X 与 $|X|$ 是否独立？

$$(2)\ \forall x>0,\ P(X\le x,|X|\le x)=P(|X|\le x)$$

$$P(X\le 1,|X|\le 1)=P(|X|\le 1)$$

$$P(X\le 1)<1$$

$$\therefore\ P(X\le 1,|X|\le 1)\ne P(X\le 1)P(|X|\le 1)$$

$\therefore$ X 与 $|X|$ 不独立.

2.7 矩、协方差矩阵

一、矩的概念

最常用的矩 有三种：原点矩、中心矩、混合矩。

定义：设X和Y是随机变量，若以下数学期望都存在，则称

$\mu_k = E(X^k) \quad k = 1, 2, \cdots$ 为X的 k 阶原点矩;

$\upsilon_k = E\{[X - E(X)]^k\} \quad k = 1, 2, \cdots$ 为X的 k 阶中心矩;

$E(X^k Y^l) \quad k, l = 1,2,\cdots$ 为X 和Y 的 $k+l$ 阶混合矩。

$E[(X - E(X))^k (Y - E(Y))^l] \quad k, l = 1,2,\cdots$

为X 和Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩。

中心矩和原点矩的关系

$$\nu_k = E(X - EX)^k = E(X - \mu_1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_i (-\mu_1)^{k-i}$$

常用中心矩用原点矩表示

$$\nu_1 = 0$$

$$\nu_2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

$$\nu_3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3$$

$$\nu_4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 6\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_1^4$$

例1 设随机变量$X \sim N(0, \sigma^2)$，求μ_k

解：$\mu_k = E(X^k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \exp\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\}dx$

$$\underline{\underline{\text{令}u = \frac{x}{\sigma}}} \quad \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u^k \exp\{-\frac{u^2}{2}\}du$$

a. 若k为奇数时，$\mu_k = 0$.

b. 若k为偶数时，

$$\mu_k = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u^k \exp\{-\frac{u^2}{2}\}du = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\int_{0}^{+\infty} u^k \exp\{-\frac{u^2}{2}\}du$$

$$\underline{\underline{\text{令}z = \frac{u^2}{2}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k 2^{(k-1)/2}\int_0^{+\infty} z^{(k-1)/2}e^{-z}dz$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k 2^{(k-1)/2}\Gamma(\frac{k+1}{2}) = \sigma^k (k-1)(k-3)\cdots 1. \qquad k = 2,4,6,\cdots$$

二、随机向量的数学期望与协方差阵

定义 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$, $EX_1,EX_2,\cdots,EX_n$ 都存在,

则称 $EX=(EX_1,EX_2,\cdots,EX_n)'$ 为 X 的数学期望.

称 $E\left[(X-EX)(X-EX)'\right]=\mathrm{Cov}(X)$

$$=\begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n,X_1) & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) & \cdots & \mathrm{Var}(X_n) \end{pmatrix}$$

为 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$ 协方差矩阵.

可以证明 协方差矩阵 为 半正定矩阵

定理2 n维随机向量的协方差阵是一个对称的非负定矩阵.

证明：对任意n维实向量$c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)'$

$$c'\mathrm{Cov}(X)c$$

$$=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1,X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Cov}(X_2,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n,X_1) & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_n,X_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_i c_j \mathrm{Cov}(X_i X_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \mathrm{Cov}(X_i X_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left\{\left[c_i\left(X_i - EX_i\right)\right]\left[c_j\left(X_j - EX_j\right)\right]\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[c_i\left(X_i - EX_i\right)\right]\left[c_j\left(X_j - EX_j\right)\right]\right\}$$

$$=E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\left(X_i - EX_i\right)\right]\left[\sum_{j=1}^{n} c_j\left(X_j - EX_j\right)\right]\right\}$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\left(X_i - EX_i\right)\right]^2 \geq 0$$

$\longrightarrow$ $\mathrm{Cov}(X)$是非负定的.

二维正态随机变量的概率密度为:

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}$$

$$[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$$\left(\begin{matrix}-\infty<x_1<+\infty\\ -\infty<x_2<+\infty\end{matrix}\right)$$

$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\ \mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}$ (X_1,X_2) 协方差矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

它的行列式: $|C| = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$

C的逆阵为: $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$

$$(X-\mu)' C^{-1}(X-\mu) =$$

$$\frac{1}{|C|}(x_1-\mu_1 \quad x_2-\mu_2)\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

于是的概率密度可写成:

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{2/2}|C|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)\}$$

引入列矩阵

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}\qquad \mu=\begin{pmatrix}E(X_1)\\E(X_2)\\\vdots\\E(X_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}$$

n维正态随机变量 $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ **的概率密度为:**

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)\}$$

其中 C 是 $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 的协方差阵。

三、n维正态变量的重要性质：

1) n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots X_n)$服从n维正态分布的充要条件是 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 的任意的线性组合

$$l_1X_1+l_2X_2+\cdots+l_nX_n$$ 服从一维正态分布。

2) 若$(X_1,X_2,\cdots X_n)$服从n维正态分布，设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 是 $X_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的线性函数，则 $(Y_1,Y_2,\cdots Y_k)$也服从多维正态分布 .

这性质称为正态变量的线性变换不变性

3) 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从n维正态分布，则“$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立”与“$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 两两不相关”是等价的。

n维正态分布在随机过程和数理统计中常会遇到.

注：关于正态分布的一个重要结论:

设X,Y相互独立,且都服从正态分布 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，则X,Y的任一线性组合:

$Z = aX + bY + c$ 仍服从正态分布

$$Z \sim N(a\mu_1 + b\mu_2 + c, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

例：(1)设X与Y独立, 且服从均值为1、标准差为$\sqrt{2}$ 的正态分布,而Y服从标准正态方布, 试求 Z=2X-Y+3 的概率密度函数.

(2) 已知X,Y相互独立同服从 $N(0,\frac{1}{2})$ 分布, 求 $E(|X-Y|)$

解: (1) 由题意知, $X \sim N(1,2), Y \sim N(0,1)$

且X与Y相互独立，故 Z=2X-Y+3 仍服从正态分布,

且 $Z \sim N(E(Z), D(Z))$

$$E(Z) = E(2X - Y + 3)$$
$$= 2E(X) - E(Y) + 3$$
$$= 2\times 1 - 0 + 3 = 5$$

$$D(Z) = D(2X - Y + 3)$$
$$= 4D(X) + D(Y)$$
$$= 4\times 2 + 1 = 9$$

故 $Z \sim N(5,3^2)$ 于是Z的概率密度函数为：

$$f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(z-5)^2}{18}\right\} \quad -\infty < z < +\infty$$

(2) 因为X与Y相互独立,且同服从 $N(0,\frac{1}{2})$ **分布 ,故 X-Y 也服从正态分布。**

又 $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0$

$D(X-Y) = D(X) + D(Y) = 1$

因此 $X - Y \sim N(0,1)$

故 $E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(-e^{-\frac{x^2}{2}})\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$