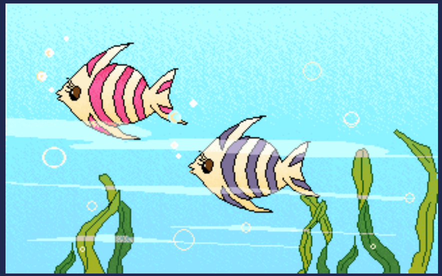
第三节　　区间估计

- 置信区间定义
- 置信区间的求法
- 正态总体均值与方差的区间估计
- 单侧置信区间
- 小结　布置作业

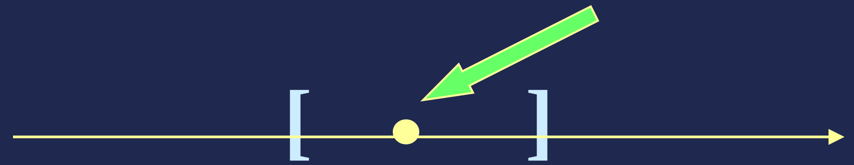
譬如，在估计湖中鱼数的问题中，若我们根据一个实际样本，得到鱼数N的极大似然估计为1000条.

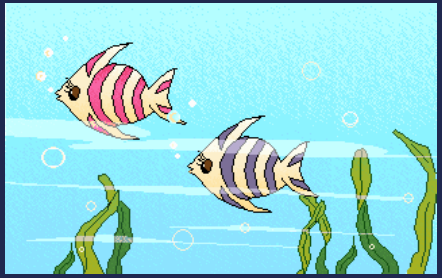
实际上，N 的真值可能大于1000条，也可能小于1000条.



也就是说，我们希望确定一个区间，使我们能以比较高的可靠程度相信它包含真参数值.

湖中鱼数的真值





这里所说的“可靠程度”是用概率来度量的，称为置信概率，置信度或置信水平.

习惯上把置信水平记作$1-\alpha$，这里α是一个很小的正数.

一、置信区间定义：

设 θ 是一个待估参数，给定 $\alpha > 0$，若由样本$X_1,X_2,\ldots X_n$确定的两个统计量

$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$(\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2)$ 满足

$$P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha$$

则称区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$是 θ 的置信水平（置信度、置信概率）为 $1-\alpha$ 的置信区间.

$\hat{\theta}_1$和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为置信下限和置信上限.

对参数 θ 作区间估计，就是要设法找出两个只依赖于样本的界限(构造统计量)

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, \ldots X_n)$$
$$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, \ldots X_n)$$

$$(\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2)$$

一旦有了样本，就把 θ 估计在区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 内. 这里有两个要求:

1. 要求 θ 以很大的可能被包含在区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 内，就是说，概率 $P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\}$ 要尽可能大. 即要求估计尽量可靠.

2. 估计的精度要尽可能的高. 如要求区间长度 $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 尽可能短，或能体现该要求的其它准则.

可靠度与精度是一对矛盾，
一般是在保证可靠度的条件下
尽可能提高精度.

寻找置信区间的方法,一般是从确定误差限入手.

我们选取未知参数的某个估计量 $\hat{\theta}$，根据置信水平 $1-\alpha$，可以找到一个正数 δ，

使得 $$P\{|\hat{\theta}-\theta|\le\delta\}=1-\alpha$$

称 δ 为 $\hat{\theta}$ 与 θ 之间的误差限.

只要知道 $\hat{\theta}$ 的概率分布，确定误差限并不难.

由不等式 $|\hat{\theta}-\theta|\le\delta$ 可以解出 θ ：

$$\hat{\theta}-\delta\le\theta\le\hat{\theta}+\delta$$

二、置信区间的求法

在求置信区间时，要查表求分位点.

定义　设 $0<\alpha<1$，对随机变量X，称满足

$$\boxed{P(X>x_\alpha)=\alpha} \Leftrightarrow P(X\le x_\alpha)=1-\alpha$$

的点 x_α 为X的概率分布的上 α 分位点.

$$P(a<X<b)=1-\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$P(X<b)-P(X<a)=1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$P(X<b)=1-\alpha/2,\ P(X<a)=\alpha/2$$

若 X 为连续型随机变量，则有

$$a = x_{1-\alpha/2}\,, \quad b = x_{\alpha/2}\,.$$

所求区间为 $(x_{1-\alpha/2}\,, x_{\alpha/2})$

$$P(a < X < b) = 1 - \alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$P(X < b) - P(X < a) = 1 - \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$P(X < b) = 1 - \alpha/3\,, P(X < a) = 2\alpha/3$$

$$a = x_{1-2\alpha/3}\,, \; b = x_{\alpha/3}\,.$$

所求区间为 $(x_{1-2\alpha/3}\,, x_{\alpha/3})$

例1 设$X_1,\ldots X_n$是取自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2已知，求参数μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

解 选 μ 的点估计为 $\overline{X}$，

取 $$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

明确问题,是求什么参数的置信区间?置信水平是多少?

寻找未知参数的一个良好估计.

寻找一个待估参数和统计量的函数，要求其分布为已知.

有了分布，就可以求出U取值于任意区间的概率.

对于给定的置信水平，根据U的分布，确定一个区间，使得U取值于该区间的概率为置信水平.

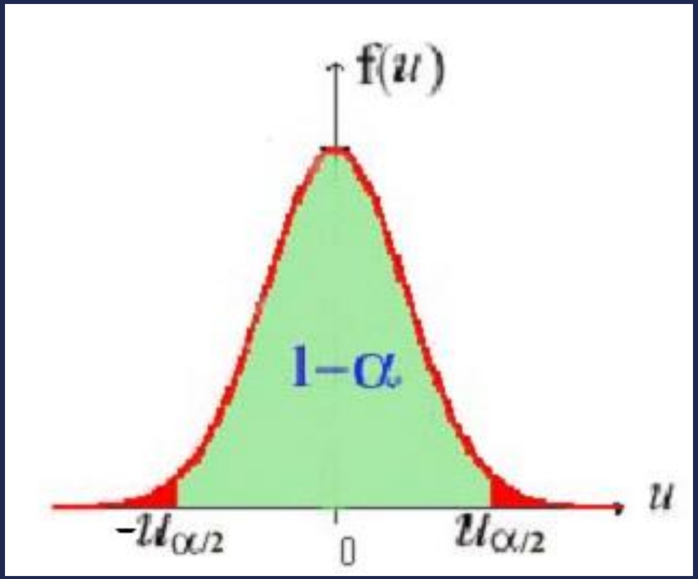
对给定的置信水平 $1-\alpha$,

查正态分布表得 $u_{\alpha/2}$,

使 $$P\{|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

对给定的置信水平 $1-\alpha$,

查正态分布表得 $u_{\alpha/2}$, 使



$$P\{|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

从中解得

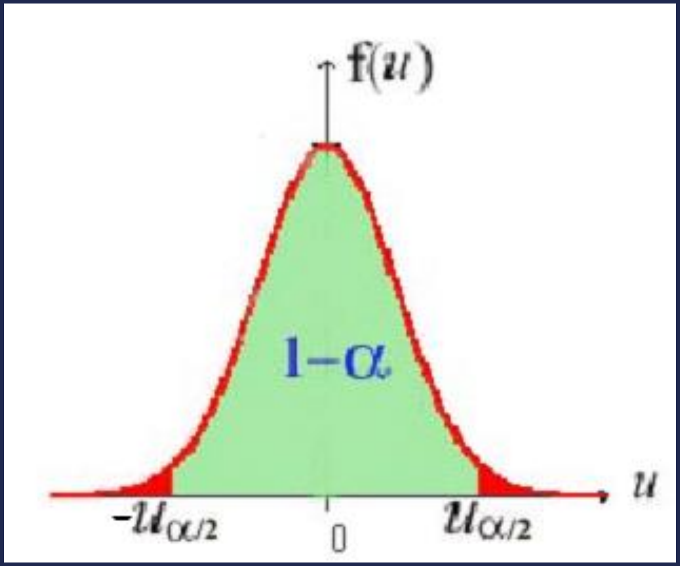
$$P\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\le\mu\le\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

$$P\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\le\mu\le\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\}$$

$$=1-\alpha$$

于是所求μ 的 置信区间为

$$[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$$



也可简记为

$$(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2})$$

求置信区间的一般步骤:

1. 寻找参数θ的一个良好的点估计 $T(X_1,X_2,\dots X_n)$

2. 寻找一个待估参数 θ和估计量T的函数 $S(T,\theta)$, 且其分布为已知. 称$S(T,\theta)$为枢轴量.

3. 对于给定的置信水平$1-\alpha$，根据$S(T,\theta)$的分布，确定常数a, b，使得 $P(a\le S(T,\theta)\le b)=1-\alpha$

4. 对 “$a\le S(T,\theta)\le b$”作等价变形,得

$$P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\} = 1-\alpha$$

则 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$就是 θ 的 $1-\alpha$ 的置信区间.

我们主要讨论以下几种情形:

1.单个正态总体均值 μ 和方差 σ^2 的区间估计.

2. 两个正态总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 和方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计.

单个正态总体样本均值和样本方差的分布

定理1、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差，则有

1)、$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$; 2)、$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;

3)、$\bar{X}$ 与 S^2 相互独立； 4)、$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$;

两个正态总体样本均差值和样本方差比的分布

定理2、设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是来自总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 与 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且这两个样本相互独立，$\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 分别是这两个样本的样本均值，S_1^2 和 S_2^2 分别是这两个样本的样本方差，则有

1)、$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

2)、当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时，$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2).$$

3)、$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1);$$

（一）单个正态总体均值μ和方差σ^2的区间估计

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,并设 $X_1,\dots,X_n$为来自总体X的样本，$\bar{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差.

1. 均值 μ 的置信区间

1° σ^2 为已知

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

可得到μ的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right) \text{或} \left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$$

2° σ^2 为未知 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

此分布不依赖于任何未知参数

由 $P\{|\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}| < t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$

可得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

或 $$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

例2 有一大批糖果.现从中随机地取 16 袋 , 称得重量(以克计)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布,试求总体均值 μ 的置信水平0.95为的置信区间.

解: σ^2 未知 $\quad \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

由 $\quad P\{|\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}| < t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$

可得 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

这里

$$1-\alpha=0.95, \alpha/2=0.025, n-1=15,\ t_{0.025}(15)=2.1315.$$

$$\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=503.75,$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=6.2022.$$

所以 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=(500.4,507.1)$$

注:

给定样本，给定置信水平，置信区间也不是唯一的.

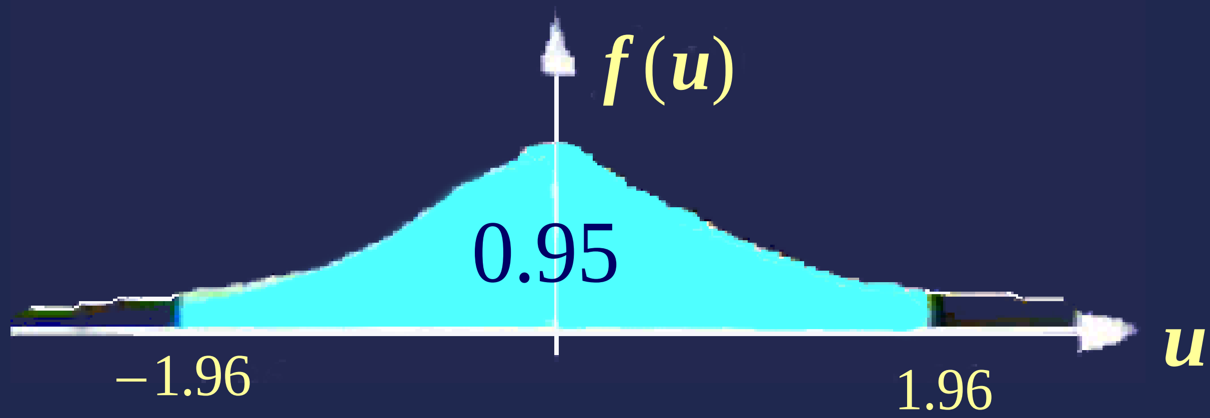
例如，设$X_1,\dots X_n$是取自$N(\mu,\sigma^2)$的样本，σ^2已知，求参数μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

取枢轴量 $$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

由标准正态分布表，对任意a、b，我们可以求得$P(a<U<b)$.

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

例如，由 $P(-1.96\le U\le 1.96)=0.95$

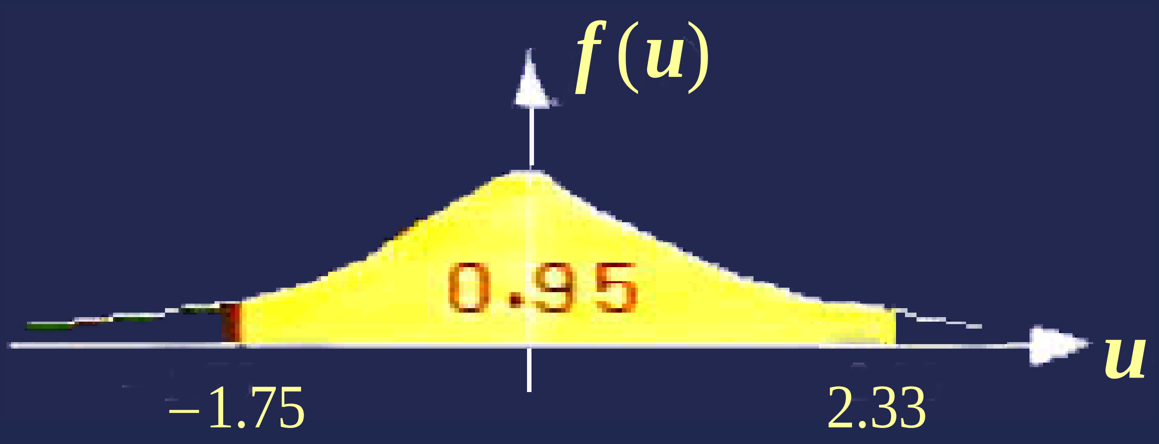


得均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha=0.95$ 的

置信区间为

$$[\overline{X}-1.96\sigma/\sqrt{n},\ \overline{X}+1.96\sigma/\sqrt{n}]$$

由 $P(-1.75 \le U \le 2.33) = 0.95$



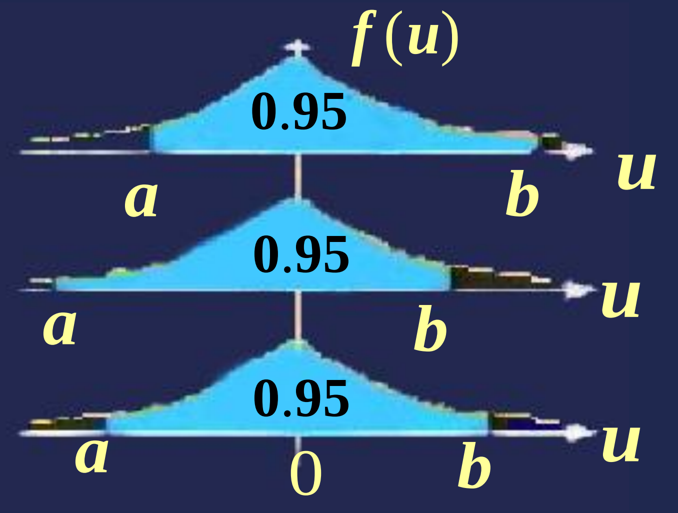
得均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha=0.95$ 的

置信区间为 $[\bar{X} - 1.75\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 2.33\sigma/\sqrt{n}]$

这个区间比前面一个要长一些.

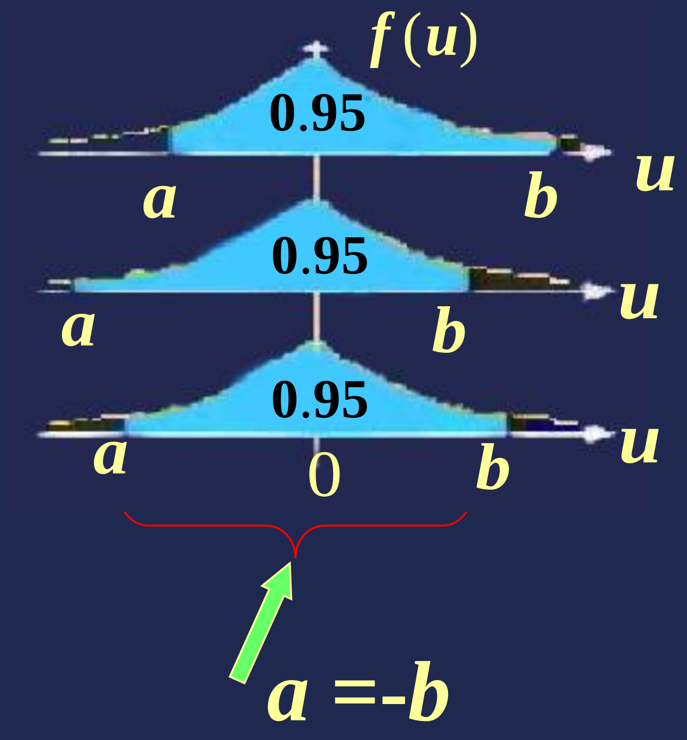
类似地，我们可得到若干个不同的置信区间.

任意两个数a和b，只要它们的纵标包含$f(u)$下95%的面积，就确定一个95%的置信区间.

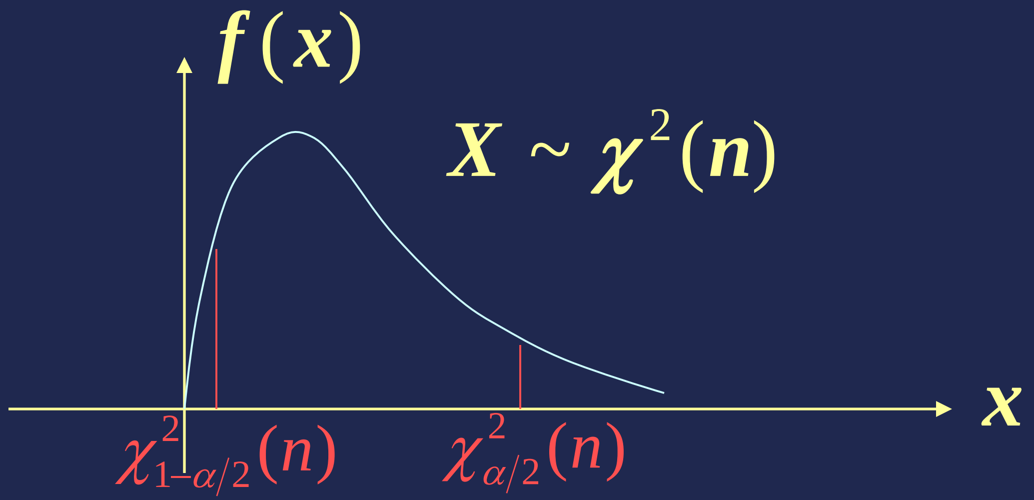


我们总是希望置信区间尽可能短.

在概率密度为单峰且对称的情形，当$a=-b$时求得的置信区间的长度为最短.

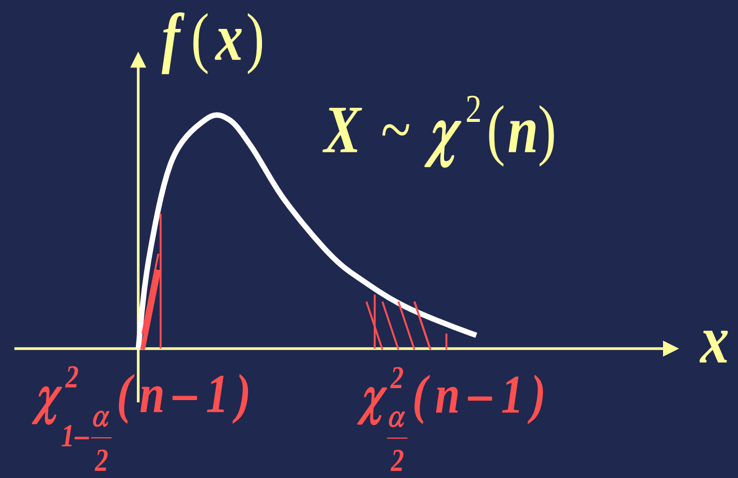


即使在概率密度不对称的情形，如 χ^2 分布，F分布，习惯上仍取对称的百分位点来计算未知参数的置信区间.



2. 方差 σ^2 的置信区间

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



由 $$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

可得 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

由

$$P\{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \frac{\sqrt{n-1}S}{\sigma} < \sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\} = 1-\alpha$$

得标准差 σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

例3 有一大批糖果.现从中随机地取 16 袋，称得重量(以克计)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布,试求总体标准差 σ 的置信水平0.95为的置信区间.

解 $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

由 $$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

得 σ 的置信水平为 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

这里 $\alpha/2=0.025, 1-\alpha/2=0.975$, $n-1=15$,

$\chi^2_{0.025}(15)=27.488$, $\chi^2_{0.975}(15)=6.262$.

$$\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=503.75,$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=6.2022.$$

于是得到 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)=(4.58,9.60)$$

（二）两个正态总体均值差和方差比的区间估计

两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2),\ N(\mu_2,\sigma_2^2)$

设已给定置信水平为 $1-\alpha$，并设 $X_1,X_2,\dots,X_{n_1}$ 是来自第一个总体的样本，$Y_1,Y_2,\dots,Y_{n_2}$ 是来自第二个总体的样本，这两个样本相互独立．且设 $\bar{X},\bar{Y}$ 分别为第一、二个总体的样本均值，S_1^2,S_2^2 为第一、二个总体的样本方差．

1. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

1° σ_1^2,σ_2^2 为已知

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

于是得到 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

2° $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, σ^2为未知

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}$, $S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

于是得到 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

例4　为比较 I，II 两种型号步枪子弹的枪口速度，随机地取 I 型子弹 10 发，得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_1}=500(m/s)$，标准差 $s_1=1.10(m/s)$，随机地取 II 型子弹 20 发，得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_2}=496(m/s)$，标准差 $s_2=1.20(m/s)$. 假设两总体都可认为近似地服从正态分布.且生产过程可认为方差相等.求两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解　依题意，可认为分别来自两总体的样本是相互独立的.又因为由假设两总体的方差相等，但数值未知，故两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)s_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

其中 $s_\omega=\sqrt{s_\omega^2}$，$s_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$.

这里 $\alpha/2=0.025, n_1=10, n_2=20, n_1+n_2-2=28,$

$t_{0.025}(28)=2.048.$ $\overline{x_1}=500,$ $\overline{x_2}=496,$ $s_\omega=1.1688.$

故两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)s_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)=(4\pm 0.93)$$

即 (3.07, 4.93) .

2. 两个总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

由 $$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1-\alpha$$

即

$$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right\} = 1-\alpha$$

可得到 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

例5　研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径，随机地抽取机器 A生产的钢管18只，测得样本方差 $s_1^2=0.34(mm^2)$；随机地取机器 B 生产的钢管13只，测得样本方差 $s_2^2=0.29(mm^2)$. 设两样本相互独立，且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径分别服从正态分布 $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，这里 μ_i,σ_i^2 $(i=1,2)$ 均未知. 试求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 0.90 的置信区间.

解：由题意及前面的分析知，σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

这里 $\alpha = 0.10,\ \alpha/2 = 0.05, 1-\alpha/2 = 0.95,$

$n_1 = 18, s_1^2 = 0.34, n_2 = 13, s_2^2 = 0.29.$ $F_{0.05}(17,12) = 2.59,$

$$F_{0.95}(17,12) = \frac{1}{F_{0.05}(12,17)} = \frac{1}{2.38}.$$

故两总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为0.90 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)=(0.45, 2.79)$$

三、单侧置信区间

设 θ 是一个待估参数，给定 $\alpha > 0$, 若由样本$X_1,X_2,\ldots X_n$确定的统计量 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$$P\{\theta \geq \hat{\theta}_1\} = 1 - \alpha$$

则称区间 $[\hat{\theta}_1, \infty)$是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间. $\hat{\theta}_1$ 称为单侧置信下限.

又若统计量 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$$P\{\theta \le \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha$$

则称区间 $(-\infty, \hat{\theta}_2]$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间. $\hat{\theta}_2$ 称为单侧置信上限.

例6 从一批灯泡中随机抽取5只作寿命试验，测得寿命X（单位：小时）如下：

1050，1100，1120，1250，1280

设灯泡寿命服从正态分布. 求灯泡寿命均值 μ 的置信水平为0.95的单侧置信下限.

解：μ 的点估计取为样本均值 $\overline{X}$

由于方差σ^2未知，取枢轴量

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

对给定的置信水平$1-\alpha$，确定分位数$t_\alpha(n-1)$

使 $$P\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_\alpha(n-1)\} = 1-\alpha$$

即 $$P\{\mu \ge \bar{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\} = 1-\alpha$$

于是得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$[\bar{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \infty]$$

即μ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限为

$$\overline{X}-t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

将样本值代入得

μ的置信水平为0.95的单侧置信下限是

1065小时

作业

1、自己画一张表，将各种情况下的区间估计(双侧、单侧)加以总结.

2.练习册　练习3