（参数）假设检验的基本思想

对总体分布中的某个参数θ 提出某种假设

H_0: $\theta \in \Theta_0$　　　　H_1: $\theta \notin \Theta_0$

如果原假设H_0成立，参数θ的一个良好的估计量T的观测值t和真实值θ_0 应该相差不大，二者之间相差比较大是个小概率事件，

根据实践经验，小概率事件在一次试验中基本上不会发生，所以小概率事件一旦发生，就可以认为前提条件，即原假设H_0是不正确的，从而做出决策，拒绝原假设H_0。

1、原假设、备择假设 2、检验统计量3、显著性水平4、拒绝域

假设检验的两类错误

	实际情况	
决定	H_0为真	H_0不真
拒绝H_0	第一类错误	正确
接受H_0	正确	第二类错误

犯两类错误的概率:

$\alpha = P\{拒绝H_0|H_0为真\} = P_\theta(X \in W),\quad \theta \in \Theta_0$

$\beta = P\{接受H_0|H_0不真\} = P_\theta(X \in \overline{W}),\quad \theta \in \Theta_1$

显著性水平α为犯第一类错误的概率.

假设检验的一般步骤（四步曲）

第一步：根据实际问题提出原假设 H_0 和备择假设 H_1

第二步：选取适当的检验统计量，并在 H_0 为真的条件下该统计量的分布已知，并能衡量差异的大小。

第三步：根据显著性水平 α ，求拒绝域。

第四步：计算检验统计量的观测值，检验其是否落入拒绝域，从而作出决策，是接受 H_0 ，还是拒绝 H_0

§2 正态总体均值的假设检验

一、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 的检验

1° σ^2 已知，关于 μ 的检验 U /Z检验

利用统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 确定拒绝域

$$|U|>u_{\alpha/2}$$

2° σ^2 未知，关于 μ 的检验 t 检验

利用统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 确定拒绝域

$$|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

U检验法 (σ^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$	$\lvert U \rvert \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$U \leq -u_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$U \geq u_{\alpha}$

T检验法 (σ^2 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$	$\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$T\leq -t_{\alpha}(n-1)$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$T\geq t_{\alpha}(n-1)$

例1 某厂生产小型马达，说明书上写着：这种小型马达在正常负载下平均消耗电流不会超过0.8 安培.

现随机抽取16台马达试验，求得平均消耗电流为0.92安培，消耗电流的标准差为0.32安培.

假设马达所消耗的电流服从正态分布，取显著性水平为$\alpha = 0.05$，问根据这个样本，能否否定厂方的断言？

解 根据题意待检假设可设为

$$H_0: \mu \le 0.8 ; \qquad H_1: \mu > 0.8$$

$H_0: \mu \le 0.8$; $H_1: \mu > 0.8$

σ未知, 故选检验统计量:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{16}} \sim t(15)$$

查表得 $t_{0.05}(15) = 1.753$, 故拒绝域为

$$\frac{\overline{x} - 0.8}{s/\sqrt{n}} > 1.753 \quad \Rightarrow \quad \overline{x} > 0.8 + 1.753\,\frac{0.32}{4} = 0.94$$

现 $\overline{x} = 0.92 < 0.94$

故接受原假设, 即不能否定厂方断言.

解二 $H_0: \mu \geq 0.8$； $H_1: \mu < 0.8$

选用统计量:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{16}} \sim T(15)$$

查表得 $t_{0.05}(15) = 1.753$, 故拒绝域

$$\frac{\bar{x} - 0.8}{s / \sqrt{n}} < -1.753 \Rightarrow \bar{x} < 0.8 - 1.753 \frac{0.32}{4} = 0.66$$

现 $\bar{x} = 0.92 > 0.66$

故接受原假设, 即否定厂方断言.

二、两个正态总体均值差的检验 （t 检验）

总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，求检验问题

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta，\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

（δ 为已知常数）的拒绝域。取显著性水平 α

统计量 $t = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta}{S_\omega \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

拒绝域 $|t| = \dfrac{\left|(\overline{x} - \overline{y}) - \delta\right|}{s_\omega \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

(1) 关于均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu_1 - \mu_2 = \delta$	$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$U = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$ (σ_1^2，σ_2^2 已知)	$\lvert U \rvert \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1 - \mu_2 \geq \delta$	$\mu_1 - \mu_2 < \delta$		$U \leq -u_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \leq \delta$	$\mu_1 - \mu_2 > \delta$		$U \geq u_\alpha$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}S_w}\sim t(n+m-2)$	$\lvert T \rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1-\mu_2\geq\delta$	$\mu_1-\mu_2<\delta$		$T\leq -t_\alpha$
$\mu_1-\mu_2\leq\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$	(σ_1^2,σ_2^2未知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$)	$T\geq t_\alpha$

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}$

例3 在平炉进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率，试验是在同一只平炉上进行的。每炼一炉钢时除操作作方法外，其它条件都尽可能做到相同。先用标准方法炼一炉，然后用建议的新方法炼一炉，以后交替进行，各炼了10炉，其得率分别为

标准方法 78.1 72.4 76.2 74.3 77.4 78.4 76.0 75.5 76.7 77.3

新方法 79.1 81.0 77.3 79.1 80.0 79.1 79.1 77.3 80.2 82.1

设这两个样本相互独立，且分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$，μ_1,μ_2,σ^2 均未知。问建议的新操作方法能否提高得率？（取 $\alpha=0.05$ ）

解： $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0, H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0.$

统计量 $$\mathrm{t} = \frac{\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}}}{\mathrm{S}_{\omega}\sqrt{1/\mathrm{n}_1 + 1/\mathrm{n}_2}} \sim \mathrm{t}(\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 - 2)$$

拒绝域 $$\mathrm{t} = \frac{\overline{\mathrm{x}} - \overline{\mathrm{y}}}{\mathrm{s}_{\omega}\sqrt{1/\mathrm{n}_1 + 1/\mathrm{n}_2}} < -\mathrm{t}_{\alpha}(\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 - 2)$$

$$n_1 = 10, \bar{x} = 76.23, s_1^2 = 3.325,$$

$$n_2 = 10, \bar{y} = 79.43, s_2^2 = 2.225.$$

$$s_w^2 = \frac{(10-1)s_1^2 + (10-1)s_2^2}{10+10-2} = 2.775, t_{0.05}(18) = 1.7341,$$

故拒绝域为

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}\le -t_{0.05}(18)=-1.7341,$$

样本观察值t＝-4.295<-1.7341,落入拒绝域，拒绝 H_0，

即认为建议的新操作方法较原来的方法为优。

§3 正态总体方差的假设检验

一、单个总体的情况

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均未知, $X_1, X_2 \cdots X_n$ 是来自X的样本。求检验假设（显著性水平α）

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

（σ_0^2 为已知常数）

当 H_0 为真时

统计量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

拒绝域

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

2 求单边检验问题（显著性水平 α）

H_0： $\sigma^2 \le \sigma_0^2$，H_1： $\sigma^2 > \sigma_0^2$.（σ_0^2 为已知）

的拒绝域。

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi_\alpha^2(n-1)$$

（2）关于 σ^2 的检验 χ^2检验法

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ （μ 未知）	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

例4 某厂生产的某种型号的电池，其寿命长期以来服从方差 $\sigma^2=5000$ (小时 ^{2})的正态分布，现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变，现随机取26只电池，测出其寿命的样本方差 $s^2=9200$小时 ^{2}）。问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化

（取 $\alpha=0.02$）？

解： $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \quad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

$$\text{统计量}\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

拒绝域 $$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=11.524$$

或 $$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)=44.314$$

由观察值 $s^2 = 9200$ 得 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 46 > 44.314$

落入拒绝域，拒绝 H_0 ，

认为这批电池寿命波动性较以往的有显著的变化。

二、两个总体的情况

总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ 求检验问题

$$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2, \ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

统计量 $F = \dfrac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

拒绝域

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \ge F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

F检验法

(2) 关于方差比σ_1^2/σ_2^2的检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$ μ_1,μ_2均未知	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$ 或 $F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$
$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$F\le F_{1-\alpha}(n-1,m-1)$
$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$F\ge F_{\alpha}(n-1,m-1)$

例5 为比较两台自动机床的精度，分别取容量为10和8的两个样本，测量某个指标的尺寸(假定服从正态分布)，得到下列结果：

车床甲：1.08, 1.10, 1.12, 1.14, 1.15, 1.25,
1.36, 1.38,1.40,1.42

车床乙：1.11, 1.12, 1.18, 1.22, 1.33, 1.35, 1.36, 1.38

在 α =0.1时，问这两台机床是否有同样的精度?

解:设两台自动机床的方差分别为σ_1^2,σ_2^2,在α=0.1下检验假设:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \Leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

取统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(9,7)$

其中S_1^2,S_2^2为两样本的样本方差

否定域为 W: $F\leq F_{1-\alpha/2}(9,7)$ 或

$F\geq F_{\alpha/2}(9,7)$

否定域为 W: $F \le F_{1-\alpha/2}(9,7)$ 或 $F \ge F_{\alpha/2}(9,7)$

由样本值可计算得F的实测值为:

$F=1.51$

查表得 $F_{\alpha/2}(9,7) = F_{0.05}(9,7) = 3.68$

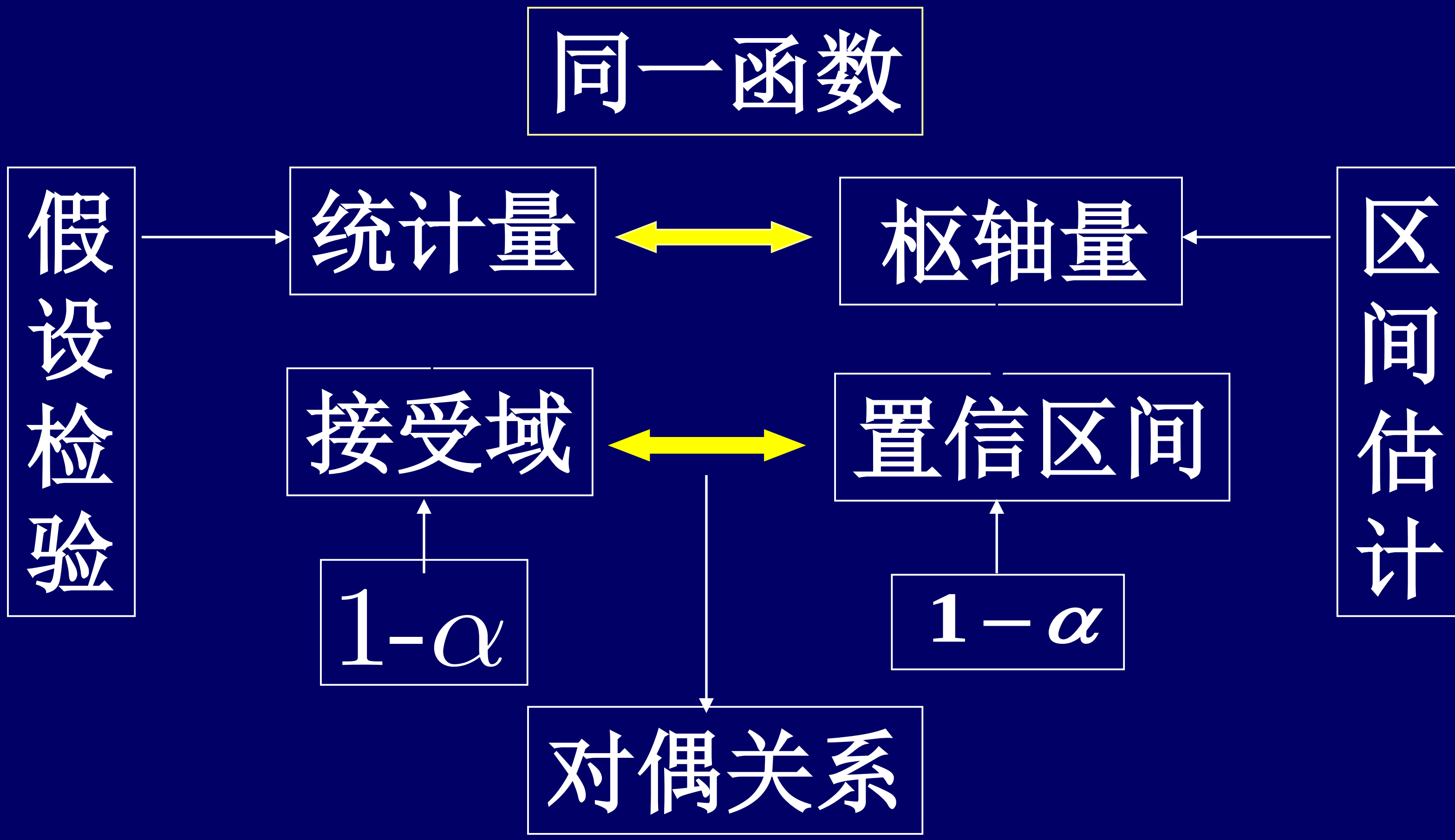
$$F_{1-\alpha/2}(9,7) = F_{0.95}(9,7) = 1/F_{0.05}(7,9)$$

$$= 1/3.29 = 0.304$$

由于 $0.304<1.51<3.68$， 故接受H_0 .

这时可能犯第二类错误.

假设检验与区间估计的联系



假设检验与置信区间对照

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	接受域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left\lvert\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\rvert\le u_{\frac{\alpha}{2}}$

待估参数	枢轴量及其分布	置信区间
μ	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$(\overline{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	接受域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ （σ^2未知）	$\left\| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right\| \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

待估参数	枢轴量及其分布	置信区间
μ	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ （σ^2未知）	$\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \right)$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0 为真时的分布	接受域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\le\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$

待估参数	枢轴量及其分布	置信区间
σ^2	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

一般说来，按照检验所用的统计量的分布，分为

U 检验　　用正态分布

T检验　　用 t 分布

χ^2 检验　　用 χ^2 分布

F 检验　　用 F分布

在大样本的条件下，若能求得检验统计量的极限分布，依据它去决定临界值C.

课堂测试题

设某次考试的学生成绩服从正态分布，从中随机的抽取36位考生的成绩，算得平均成绩为66.5，标准差为15分 .

(1) 问在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分？

(2) 问在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，是否可以认为这次考试考生的成绩的方差为 16^2 ？

$t_{0.025}(35) = 2.0301$ $\chi^2_{0.025}(35)=$**53.203** $\chi^2_{0.975}(35)=20.569$

解:(1) $H_0: \mu = 70 \Leftrightarrow H_1: \mu \neq 70$

取检验统计量 $t = \dfrac{\bar{X} - 70}{S/\sqrt{36}} \sim t(35)$

对给定的显著性水平 α =0.05，由 $t_{\alpha/2}(35) = t_{0.025}(35) = 2.0301$

$$P\{|t| > t_{\alpha/2}(35)\} = \alpha$$

得拒绝域 W: $|t| > 2.0301$

算出统计量 t 的实测值, $|t| = 1.4 < 2.0301$

没有落入拒绝域，故接受 H_0, 即可以认为全体考试的平均成绩为70分。

(2) $H_0: \sigma^2 = 16^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq 16^2$

取检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{35S^2}{16^2} \sim \chi^2(35)$

拒绝域为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \boldsymbol{20.569}$

或 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \boldsymbol{53.203}$

由观察值 $s^2 = 15^2$ 得 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 30.76$

$20.569 < \chi^2 < 53.203$ 没有落入拒绝域，故接受$\boldsymbol{H_0}$

即可以认为全体考试成绩的方差为 16^2。