“概率论”部分

测验题

参考答案

《概率论》部分测验题一 参考答案

一、填空题

1. $A\overline{B}\,\overline{C}$　　2. 0.3　　3. $\frac{9}{100}$　　4. $\frac{1}{20}$

5. $\frac{1}{2}$, $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{1}{6}, & -1\le x<0 \\ \frac{1}{2}, & 0\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$

6. $e^{-1}-e^{-2}$ 7. 0.3 8. $\pi(7)$ 9. 9

10. $\frac{1}{3}$ 11. 0.5 12. 0

二、解: 记电源电压为随机变量X,

事件$A=\{$电子元件损坏$\}$. 则 $X\sim N(220,25^2)$.

（1） $P\{X<200\}=P\{X\le 200\}=\Phi\left(\frac{200-220}{25}\right)$

$$=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=0.2119$$

$$P\{200 \le X \le 240\} = P\left\{\frac{200-220}{25} \le \frac{X-220}{25} \le \frac{240-220}{25}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{240-220}{25}\right) - \Phi\left(\frac{200-220}{25}\right)$$

$$= \Phi(0.8) - \Phi(-0.8) = 2\Phi(0.8) - 1 = 0.5762$$

$$P\{X > 240\} = 1 - \Phi\left(\frac{240-220}{25}\right) = 1 - \Phi(0.8) = 0.2199$$

故由全概率公式知:

$$P(A) = P\{A \mid X < 200\}P\{X < 200\}$$
$$+ P\{A \mid 200 \le X \le 240\}P\{200 \le X \le 240\}$$
$$+ P\{A \mid X > 240\}P\{X > 240\}$$

即 $P(A) = 0.1 \times 0.2199 + 0.01 \times 0.5762 + 0.1 \times 0.2199$

$$= 0.048142$$

（2） $P\{200 \le X \le 240 \mid A\}$

$$= \frac{P\{A \mid 200 \le X \le 240\} P\{200 \le X \le 240\}}{P(A)}$$

$$= \frac{0.01 \times 0.5762}{0.048142} = 0.1197$$

三、计算

1. 解: 因 $X \sim N(1,2), Y \sim N(-1,14)$, 且$X$与$Y$相互独立,

故 $Z = X - Y$ 仍服从正态分布, 且

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = 1 - (-1) = 2$$

$$D(Z) = F(X) + F(Y) = 2 + 14 = 16$$

即 $Z \sim N(2,4^2)$, 从而概率密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4} e^{-\frac{(z-2)^2}{32}}, \quad z \in R$$

2. 解: 方程有实根 $\Leftrightarrow \Delta=(2X)^2-4\times1\times(5X-4)\geq 0$

$\Leftrightarrow X\geq 4$ 或 $X\leq 1$

$P\{$方程有实根$\}=P\{X\geq 4$ 或 $X\leq 1\}$

$$= P\{X\geq 4\}+P\{X\leq 1\}$$

$$= P\{4\leq X\leq 6\}+P0< X\leq 1\}$$

$$= \frac{2}{6}+\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

四、解: 由卷积公式知, $Z = X + Y$的概率密度函数为

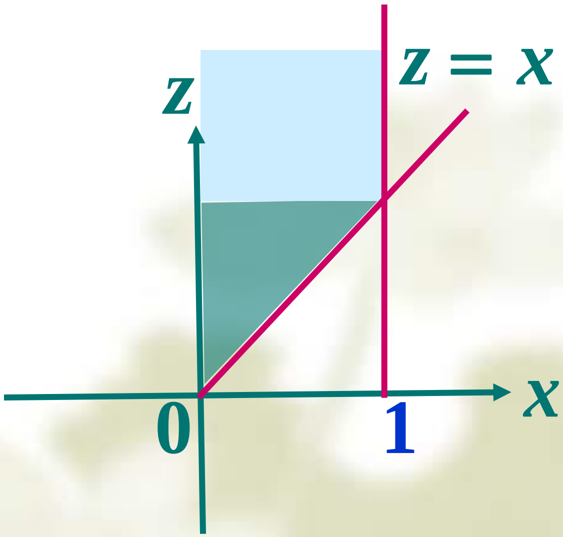
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

由题意知当且仅当 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ z - x > 0 \end{cases}$, 即$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ z > x \end{cases}$时,

被积函数才不为零.

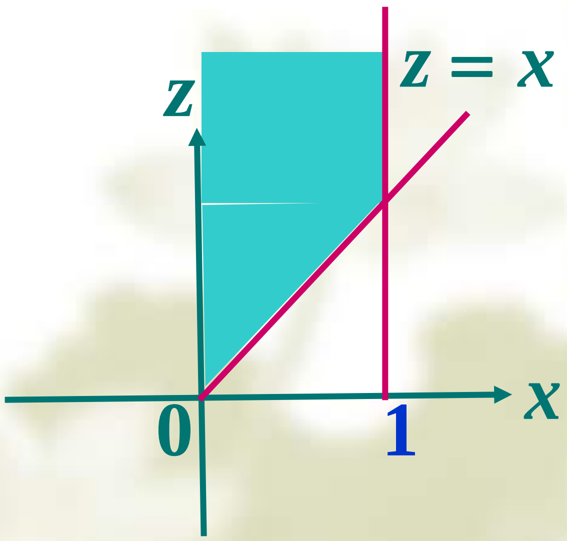
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x, & 0 < z < 1 \\ \int_0^1 f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x, & z \ge 1 \end{cases}$$



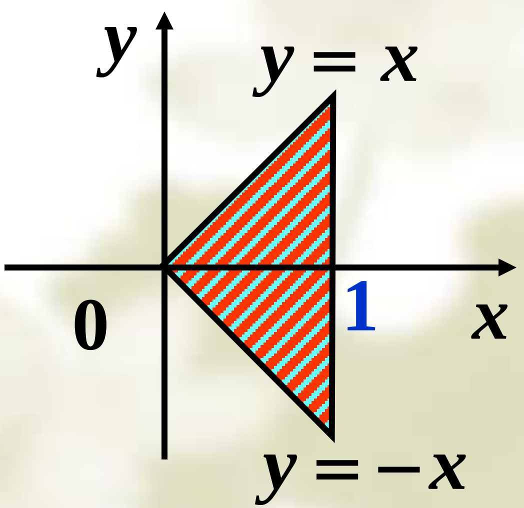
$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \int_0^z 1\times e^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x, & 0<z<1\\ \int_0^1 1\times e^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x, & z\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1\\ e^{-z}(e-1), & z\ge 1\end{cases}$$



五、解 (1) $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-y}^{1}1dx=1+y, & -1<y<0,\\ \int_{y}^{1}1dx=1-y, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



(2) $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx=\int_0^1 x\times 2x\,dx=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx=\int_0^1 x^2\times 2x\,dx=\frac{1}{2}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dx=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dx=0$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

六、解 $p = P\left\{X > \frac{\pi}{3}\right\} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

由题意知 $Y \sim b(n, p)$, 其中 $n = 4,\ p = \frac{1}{2}$.

从而 $E(Y) = np = 4 \times \frac{1}{2} = 2,$

$$D(Y) = np(1 - p) = 1.$$

故有 $E(Y^2) = D(Y) + [E(Y)]^2 = 5.$

七、解

(1) $Cov(X,Y)=\frac{1}{2}[D(X)+D(Y)-D(X-Y)]=-2$

(2) $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{1}{3}$

(3) $Cov(X-2Y,X+Y)$

$=D(X)+Cov(X,Y)-2Cov(Y,X)-2D(Y)$

$=-12$

《概率论》部分测验题二 参考答案

一、填空题

1. $\bar{A}BC,\ \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

2. {1,6}, {2,5,7}

3. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

4. $\dfrac{25}{2}e^{-5}$

5. 24

6. 0.3

7. $\dfrac{4}{5}, \dfrac{4}{5}$

8. $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

9. 7

10. 0, 25

11. $\frac{1}{9}$

12. 1

二、（1）0.17；（2）$\dfrac{6}{17}$

三、（1）e^{-1}；（2）e^{-4}

四、1. $A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2. $$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}, & -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

3. $P\{0<X<\dfrac{\pi}{4}\}=\dfrac{1}{2}.$

五、

1. $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, $f_Y(y)\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$.

2. $E(X)=\frac{1}{2}$, $E(Y)=1$, $E(XY)=\frac{1}{2}$,

$Cov(X,Y)=0$, $D(X)=\frac{1}{4}$, $D(Y)=1$.

3. X与Y相互独立, 因为$f_{X,Y}(X,Y)=f_X(X)f_Y(Y)$;

X与Y不相关, 因为$Cov(X,Y)=0$. (或独立性可得)

六、

$V \backslash U$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$

七、 $P\{|Y| \le 10\} = 2\Phi(1) - 1$

$$P\{|Y| > 10\} = 1 - P\{|Y| \le 10\} = 2 - 2\Phi(1)$$

《概率论》部分测验题三参考答案

一、填空题

1. $\frac{2}{3}$　　2. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3}e^{-\frac{z^2}{18}}, z\in R$　　3. 3　　4. 0.6

5. $\frac{1}{2}$, $F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$

6. 0.2　　7. $\frac{17}{648}$　　8. $(0.9)^9$, 1.9

9. $a = 0.3, \quad b = 0.2$

10. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}$

11. $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

12. $F_{\max}(z) = F_x(z)F_Y(z)$

13. $\frac{1}{3\varepsilon^2}$

14. 1

15. 0.5

二、计算与证明题

1. (1) 0.22696; (2) 0.3008

2. $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

3. $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geq 0\\ 0, & z<0\end{cases}$$

4. (1) $$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(2) X和Y不独立. 因为

$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 当$|x|\le 1,|y|\le 1$时.

(3) $E(X)=0$, $E(XY)=0$, 故$Cov(X,Y)=0$.

从而 $\rho_{XY}=0$.

5. (1) $E(Z)=1,\ \ D(Z)=7$

(2) $\rho_{XZ}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

6. (1) 利润函数

$$S=\begin{cases}1000X, & X\le Y\\ 1000Y-200(X-Y), & X>Y\end{cases}$$

(2) 应生产： $900\cdot\ln 6\approx 1613$ (件)