概率论主要知识点

ch 1

1．事件之间的关系与运算，掌握事件的表述；

2．概率的公理化定义，灵活应用概率的性质；

3．古典概型的定义和概率的计算；

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{中包含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}$$

4．条件概率和三大公式应用；

（1）乘法公式 $P(AB)=P(B)P(A|B)$；

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

（2）全概率公式 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$；

（3）贝叶斯公式 $P(B_j|A)=\dfrac{P(AB_j)}{P(A)}=\dfrac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$；

5．独立性

6．贝努利试验和二项概率。

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

Ch2

1． 随机变量；

2． 离散型随机变量及其分布律；

$$P(X=x_k)=p_k \quad k=0,1,2,\cdots$$

分布律的性质：a. $0\le p_i\le 1$

b． $\sum p_i=1$

3. 分布函数及其性质

$$F(x)=P(X\le x) \quad (x\in R)$$

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

4. 连续型随机变量的密度函数及其性质：

$$(1)\ f(x)\ge 0;(2)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$$

$$3)F'(x)=f(x);\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$$

$$4)\ P(a<X<b)=\int_{a}^{b}f(x)dx$$

5. 常用分布：

1） 二项分布 $B(n,p)$：

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}\ k=0,1,2,\cdots n\ (q=1-p)$$ n

=1 时即为(0—1)分布

2） 泊松分布 $\pi(\lambda)$：

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad k=0,1,2,\cdots(\lambda>0)$$

(3)均匀分布 U(a,b)：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(4)指数分布：$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

(5)正态分布N(μ,σ^2)：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(x\in R)$

标准正态分布N(0, 1)：$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(x\in R)$

图形特点

关于标准正态分布的结论：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$ **(2)** $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$

(3) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)\quad (x>0)$

(4) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $P(X\le x)=\Phi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$

$$P(a<X<b)=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

6. 一维随机变量的函数的分布 $Y=g(X)$

（1）分布函数法：

1° $F(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$，

2° $f(y)=F'(y)$

（2）公式法： $X\sim f_X(x)$，设 $g(x)$ 处处可导且 $g'(x)>0$ 或 $g'(x)<0$，则 $Y=g(X)$ 的密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

Ch3

1. 二维随机变量、联合分布函数
2. 二维离散型随机变量及其分布律、分布函数；
3. 二维连续型随机变量、概率密度函数及其性质；

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

$$P\{(x,y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$$

其中:

1）二维均匀分布（会求密度函数）

2）二维正态分布

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

4．边缘分布

1)离散型

关于 X 的边缘分布： $P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}=P_{i\bullet}$；

关于 Y 的边缘分布为 $P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P_{ij}=P_{\bullet j}$

2)连续型

关于 X 的边缘密度函数： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

关于 Y 的边缘密度函数： $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

（主要是含参变量分段函数的积分）

5．条件分布

离散： $P(X=x_i\,|\,Y=y_j)=\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$ $P(Y=y_j\,|\,X=x_i)=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$

连续： $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

6．独立性：

设(X,Y)是二维离散型随机变量，则 X 和 Y 相互独立的充分必要条件是 $p_{ij} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}$

设（X，Y）的概率密度函数为 f(x,y)，X 和 Y 的边缘密度函数分别为 $f_x(x), f_y(y)$，则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是

$$f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

7．二维随机变量函数的分布

1）二维连续型随机变量函数和 X+Y 的分布

密度函数为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy \end{aligned}$$

当 X,Y 相互独立时，卷积公式 $f_X * f_Y$

2）泊松分布和二项分布的可加性

3）$M = \max(X,Y)$ 及 $N = \min(X,Y)$ 的分布（X,Y 相互独立）

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z)$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

ch4

1. 数学期望的定义：$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k \quad E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

2. 数学期望的性质：

(1) $EC=C$ (2) $E(CX)=CE(X)$

(3) $E(X_1+X_2)=EX_1+EX_2$

(4) X与Y独立时，$E(XY)=E(X)\times E(Y)$

3. 二维随机变量的数学期望：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij} \qquad E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

4. 随机变量函数的数学期望：

一维离散型随机变量函数的期望：

$$Eg(X)=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$$

一维连续型随机变量函数的期望：

$$Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

二维离散型随机变量函数的期望：

$$Eg(X,Y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

二维连续型随机变量函数的期望：

$$Eg(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

5．方差的定义：$DX = E\{[X - E(X)]^2\}$

计算方法：$D(X) = EX^2 - (EX)^2$

6．方差的性质：

（1）$D(kX + a) = k^2 DX$

（2）$D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2\mathrm{cov}(X, Y)$

当 X 与 Y 独立时，$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

7．几种常见分布的期望和方差：

随机变量	分布	期望	方差
二项分布	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	npq
泊松分布	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
均匀分布	$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & x \in (a,b) \\ 0 & 其它 \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2

8. 会求相互独立的正态随机变量线性组合的期望、方差

9．协方差：$\mathbf{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

相关系数：$\rho_{XY}=\dfrac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

10. 协方差的性质

（1）$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$；

（2）$Cov(ax,bY)=abCov(X,Y)$式中 a, b 为常数

（3）$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

11. 相关系数的性质

1) $|\rho_{XY}|\le 1$

2) $\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow E(XY)=E(X)\cdot E(Y) \Leftrightarrow$ $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

12. 协方差矩阵

$$C=\begin{pmatrix} D(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}$$

ch5

1. 切比雪夫不等式

设随机变量X存在数学期望EX=μ和方差DX=σ^2，则对于任意正数ε，有如下不等式:

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

2. 依概率收敛的定义: $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1$

3. 切比雪夫大数定律、贝努利大数定律和辛钦大数定律;

大数定律

- 切比雪夫大数定律：$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i|<\varepsilon\}=1$　独立方差一致有界
- 伯努利大数定律：$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{n_A}{n}-p|<\varepsilon\}=1$　$n_A\sim B(n,p)$
- 辛钦大数定律：$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$　独立同分布 $E(X_k)=\mu$

4. 中心极限定理

中心极限定理

独立同分布中心极限定理

$$\begin{cases} E(X_k)=\mu,\quad D(X_k)=\sigma^2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} P\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\} = \Phi(x) \end{cases}$$

德莫弗－拉普拉斯中心极限定理

$$N_A \sim b(n,p)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a < \frac{N_A - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right\} = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{a < N_A \le b\} = \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}})$$

$$P\{a < N_A \le b\} \approx \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}})$$