自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分								

一、填空题（共42分，每空3分）

得 分

1. 从标有数字 1~10 的 10 张卡片中任取 2 张，每次取一张，取后不放回，则第二次取到标号为偶数的卡片的概率为 1/2

2. 设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.3$，则 $P(A\cup B)=$ 0.9

3. 设随机变量 X 服从参数为 1/2 的指数分布，则 $E(e^{-X})=$ 1/3，

$P(X>D(X)\mid X>E(X))=e^{-1}$

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim t(10), Y\sim U(-1,1)$，则 $E(X+2Y+1)=$ 1

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且均服从 $N(0,\ 1)$，则 $X^2/Y^2\sim$ F(1,1)，

$P(\max\{X,Y\}\le 0)=$ 1/4 且由切比雪夫不等式知 $P(|X|\ge 3)\le$ 1/9

6. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,-1,4,9,0.5)$，则 $Cov(X,Y)=$3

7. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $X\sim\pi(\lambda)$ 的一个简单随机样本，且统计量

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且均服从 $N(0,\ 1)$，则 $X^2/Y^2 \sim$ F(1,1)，

$P(\max\{X,Y\}\le 0)=$ 1/4 且由切比雪夫不等式知 $P(|X|\ge 3)\le$ 1/9

6. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,-1,4,9,0.5)$，则 $Cov(X,Y)$=3

7. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $X\sim\pi(\lambda)$ 的一个简单随机样本，且统计量

$(X_1+2X_2+X_3)/4+kX_4$ 为参数 λ 的一个无偏估计量，则常数 k=0

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布且 $E(X_k)=0,D(X_k)=\sigma^2,k=1,2,\cdots$，则 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2$

依概率收敛于 __ σ^2 __

9. 设随机变量 $X \sim F(n,n)$ 且 $P(X>\alpha)=0.1$，则 $P\left(\frac{1}{X}>\alpha\right)=$<u>0.1</u>

10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 为来自总体 $X \sim N\left(0, 0.5^2\right)$ 的一个简单随机样本，若已知

$\chi_{0.01}^2(16) = 32.0$，则 $P\left(\sum_{i=1}^{16} X_i^2 \geq 8\right) = \underline{0.01}$

11. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 和 σ^2 都未知，样本容量为 n，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方

差，若总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\bar{X} - \lambda, \bar{X} + \lambda\right)$，则 $\lambda = \underline{\frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)}$

得 分

二、设某段公路上经过的货车与客车数量之比为 1：2，已知货车中途停车修理的概率为 3/20，客车为 3/40. 今有一辆车中途停车修理，求它是货车的概率是多少？(8 分)

解. 记 A={有一辆车中途停车修理}，B_1={经过的是货车}，B_2={经过的是客车}，则 B_1 和 B_2 构成样本空间的一个划分，且 $P(B_1)=1/3$, $P(B_2)=2/3$.

由全概率公式知，

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{20}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{40}=\frac{1}{10};$$ ----5'

又由贝叶斯公式知，所求 $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{20}}{\frac{1}{10}}=\dfrac{1}{2}.$ ----3'

得 分

三、已知随机变量 (X,Y) 服从区域 $D: 0<x<1, 0<y<2x$ 上的均匀分布

(1)求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$；(2)判断 X 和 Y 是否相互独立；

(3) 求 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$。(10 分)

解. (1) $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x \\ 0, & otherwise\end{cases}$ ---2'

(2) 二维随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x} 1dy=2x, & 0<x<1, \\ 0, & otherwise\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

(3) 在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 0<y<2x,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$ ----3'

得 分

四、设总体 $X \sim B(10,p)$, 未知参数 $p\in(0,1)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为其样本值. 求分别参数 p 的矩估计量

得 分

四、设总体 $X \sim B(10,p)$，未知参数 $p \in (0,1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为其样本值．求分别参数 p 的矩估计量和最大似然估计量．(10 分)

解．(1)矩估计：

$$E(X)=10p，故 p=\frac{E(X)}{10}.$$

用样本矩 $\overline{X}$ 近似总体矩 $E(X)$，得参数 p 的矩估计量 $\hat{p}_{矩}=\dfrac{\overline{X}}{10}$.　　---4'

(2) 最大似然估计：

似然函数

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}\left[C_{10}^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{10-x_i}\right]=\left(\prod_{i=1}^{n}C_{10}^{x_i}\right)p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{10n-\sum_{i=1}^{n}x_i},x_i=0,1,\cdots,10,i=1,2,\cdots,n.$$

对数似然函数

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}\ln C_{10}^{x_i}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(10n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p)$$

令 $\dfrac{d\ln L(p)}{dp}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\dfrac{10n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$，得 $\hat{p}_L=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{10n}=\dfrac{\bar{x}}{10}$，从而参数 p 的最大似然

估计量为 $\hat{p}_L=\dfrac{\bar{X}}{10}$. ----6'

得 分

五、设某种元件的寿命 X 长期以来服从方差为 5000（小时 ^{2}）的正态分布. 现有一批这种元件，其寿命的波动性有所改变. 现随机抽取一容量为 26 的样本，测得其寿命的方差 $s^2=2800$（小时 ^{2}）. 在显著性水平 $\alpha=0.1$ ，可否认为寿命的波动性较以往有显著变化?

（已知 $\chi^2_{0.05}(25)=37.652$，$\chi^2_{0.95}(25)=14.611$）（10 分）

$\therefore k=0$

$\therefore P(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 > 8) = P(4\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \geq 32)$

$= 0.01$

$(X-2Y+1) = EX + 2EY + 1$

$= 0+0+1 = 1$

$X^2 \sim \chi^2(1) \quad Y^2 \sim \chi^2(1)$

$\frac{X^2}{Y^2} = \frac{X^2/1}{Y^2/1} \sim F(1,1)$

$(X,Y \leq 0) = \Phi^2(0) = \frac{1}{4}$

8. $E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2) = E(X_k^2)$

$= D(X_k) + E^2(X_k)$

$= \sigma^2$

9. $P(X > t) = 0.1$ $\quad F(n,n)$

$\frac{1}{X} \sim F(n,n)$

$\therefore P\left(\boxed{-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$

区时 μ 2节

$\int \frac{1}{k} dx, \ 0<k<2$

$\therefore k = e$

三: $H_0: \sigma^2 = 5000 \quad H_1: \sigma^2 \neq 5000$.

$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{5000} \sim \chi^2(n-1)$

拒绝域: $\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

(4) 计算实测值：$\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{25\times 2800}{5000}=14$；

判断：因为$14\in W$，落入了拒绝域，故拒绝 H_0，接受 H_1，即在显著性水平$\alpha=0.1$ 下，可以认为寿命的波动性较以往有了显著变化. ----4'

得 分

六、（1）设随机变量$X\sim U\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，求$Y=\sin X$的概率密度函数.

（2）设随机变量 $X\sim N(1,9)$, $Y\sim N(-1,4)$ 且 X 与 Y 相互独立，求 $P(X-2Y>3)$. (12 分)

解. （1） $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & otherwise.\end{cases}$

随机变量 Y 的分布函数为

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y)$

1. $\frac{C_5^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_5^1}{C_9^1}+\frac{C_5^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_9^1}=\frac{25}{90}+\frac{20}{90}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$

2. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$\because AB=\phi$

$\therefore P(A\cup B)=0.6+0.3=0.9$

3. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$\therefore E(e^{-X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx=\frac{1}{3}$

$EX=2,\ DX=4$

$P(X>4|X>2)=\frac{P(X>2,X>4)}{P(X>2)}=\frac{P(X>4)}{P(X>2)}$

$=\frac{1-P(X\le 4)}{1-P(X\le 2)}=\frac{1-F(4)}{1-F(2)}$

$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$\therefore P(X>4|X>2)=\frac{e^{-2}}{e^{-1}}=e^{-1}$

4. $E(X-2Y+1)=EX-2EY+1$

$=0+0+1=1$

5. $\because X^2\sim\chi^2(1)\quad Y^2\sim\chi^2(1)$

$\therefore \frac{X^2}{Y^2}=\frac{X^2/1}{Y^2/1}\sim F(1,1)$

$P\{\max(X,Y)\le 0\}=\Phi^2(0)=\frac{1}{4}$

$P(|X|\ge 3)=P(|X-0|\ge 3)\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$

$P(|X-EX|\ge\varepsilon)\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$

7. $E(\frac{1}{4}(X_1+2X_2+X_3)+kX_4)=\lambda$

$\therefore \frac{1}{4}(1+2+1)\lambda+k\lambda=\lambda$

$\therefore k=0$

8. $E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2)=E(X_k^2)$

$=D(X_k)+E^2(X_k)$

$=\sigma^2$

9. $P(X>t)=0.1$, $t=F_{0.1}(n,n)$

$\frac{1}{X}\sim F(n,n)$

$\therefore P(\frac{1}{X}>\frac{1}{t})=P(\frac{1}{X}>F_{0.1}(n,n))$

$=0.1$

10. $X_i\sim N(0,0.5^2)$

$\therefore \frac{X_i}{0.5}\sim N(0,1)$

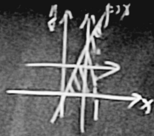
$\therefore 4\sum_{i=1}^{16}X_i^2\sim\chi^2(16)\qquad \chi^2_{0.01}(16)$

$\therefore P(\sum_{i=1}^{16}X_i^2\ge 8)=P(4\sum_{i=1}^{16}X_i^2\ge 32)$

$=0.01$

11. $P(-t_{\alpha/2}(n-1)\le\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\le t_{\alpha/2}(n-1))=1-\alpha$

[illegible] μ [illegible]



$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}1dy, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}1dx, & 0<y<2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x} & 0<y<2x\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

四: $\mu_1=EX=10p\Rightarrow p=\frac{\mu_1}{10}\quad\therefore\hat{p}=\frac{\bar{X}}{10}$

五: $H_0:\sigma^2=5000\quad H_1:\sigma^2\ne 5000$

$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{5000}\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域: $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cup\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$\in D$.

$\int_0^{2x} 1 dy \quad , 0<x<1$

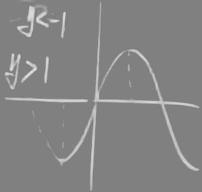
$0 \quad , else$

$\int_{\frac{y}{2}}^{1} 1 dx \quad , 0<y<2$

$0 \quad , else$

六：$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\sin X \le y) = \begin{cases} P(X \le \arcsin y), & -1 \le y \le 1 \\ 0, & y<-1 \\ 1, & y>1 \end{cases}$

$= \begin{cases} F_X(\arcsin y), & -1 \le y \le 1 \\ 0, & y<-1 \\ 1, & y>1 \end{cases}$



$\therefore f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} f_X(\arcsin y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1 \\ 0, & else \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1 \\ 0, & else \end{cases}$

$$
= \begin{cases} 0, & y \le -1, \\ P\left(-\frac{\pi}{2} < X \le \arcsin y\right) = F_X(\arcsin y) - F_X\left(-\frac{\pi}{2}\right), & -1 < y < 1, \\ 1, & y \ge 1. \end{cases}
$$

从而可得 Y 的密度函数为

$$
f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \qquad \text{----6'}
$$

（2）因为 X 与 Y 相互独立，$X \sim N(1,9),\ Y \sim N(-1,4)$，故 $X-2Y \sim N(3,25)$，从而所求

$$P(X-2Y>3)=1-P(X-2Y\le 3)=1-P\left(\frac{X-2Y-3}{5}\le\frac{3-3}{5}\right)=1-\Phi(0)=1/2.$$

----6'

得 分

七、某学校有 400 名住校学生，每人以 80%的概率去图书馆自习．由中心极限定理估计，该馆应至少设多少个座位，才能以 95%以上的概率保证去上自习的学生都有座位？假设每名学生是否去图书馆自习可以认为是相互独立的，且已知 $\Phi(1.645)=0.95$．（8 分）

解. 设去图书馆自习的人数为 X, 图书馆座位数为 n，由题意知 $X \sim B(400,0.8)$.

由中心极限定理知， $X \overset{\text{近似}}{\sim} N(320,64)$. ----3'

若要以 95%以上的概率保证去上自习的学生都有座位，则 $P(0 \le X \le n) \ge 0.95$. 从而

$$P(0 \le X \le n) = P\left(\frac{0-320}{8} \le \frac{X-320}{8} \le \frac{n-320}{8}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{n-320}{8}\right) - \Phi(-40) \approx \Phi\left(\frac{n-320}{8}\right) \ge 0.95,$$

于是， $\dfrac{n-320}{8} \ge 1.645$, 即 $n \ge 333.16$, 故该馆应至少设 334 个座位，才能以 95%以上的概率保证去上自习的学生都有座位. ----5'