16.^元

《概率论与数理统计》

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分								

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

试卷备用数据：$\Phi(2)=0.977, \Phi(1)=0.841, \chi^2_{0.025}(19)=32.85, \chi^2_{0.975}(19)=8.91$

一、填空题（共45分，每空3分）

1. 设A、B、C是三个事件，则事件"A、B、C至少有一个发生"可表示为 $A\cup B\cup C$

2. 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一枚骰子接连抛掷两次先后出现的点数，则该方程有重根的概率为 $\frac{1}{18}$

$B^2-4C=0$ $B^2=4C$ $B=2\sqrt{C}$

3. 设A、B相互独立，且 $P(A)=0.5, P(A-B)=0.3$，则 $P(A\cup B)=$ 0.7

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ $=P(A)+P(B)-P(AB)$ $P(A-B)=P(A)-P(AB)$ $P(AB)=0.2$ $A=0.5$ $B=0.4$

4. 已知 $Y\sim\pi(3.72)$，要使得 $P(Y=k)$ 最大，则 $k=$ 3

$Y\sim\pi(\lambda)$ $k=[\lambda]$ $P(Y=k)$最大

5. 设 X 是服从参数为1的指数分布，a 为大于零的常数，则 $P(X\le a+1\mid X>a)=$ $1-e^{-1}$

$\frac{P(a<X\le a+1)}{P(X>a)}$ $\frac{\int_a^{a+1}e^{-x}dx}{\int_a^{+\infty}e^{-x}dx}$ $\frac{-e^{-x}\big|_a^{a+1}}{-e^{-x}\big|_a^{+\infty}}$

6. 设 $X\sim B(2,0.2), Y\sim B(3,0.2)$，且 X、Y 相互独立，则 $P(X+Y=1)=$ 0.8^4

$Y+X\sim B(5,0.2)$

7. 设 $X\sim U(0,2)$，记 $Y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，则 $E(Y)=$ 0.2385

$E(Y)=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx$ $=\frac{1}{2}[\Phi(2)-\Phi(0)]$

8. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim\chi^2(3)$，$Y\sim U(-3,3)$，则 $E(X-2Y+1)=$ 4

$E(X)=3, D(X)=6$ $E(X)=\frac{3+3}{2}$ $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

$E(X)-2E(Y)+1=3$ $=3-2\times\frac{3+(-3)}{2}+1=4$

又由切比雪夫不等式知：$P(|X-3|\ge12)\le$ $\frac{1}{24}$

$P\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ $\frac{6}{144}$ $\frac{2\times3}{12^2}=\frac{1}{24}$

9. 设 n_A 表示 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\ge\varepsilon\}=$ 0

10. 已知 $X\sim F(1,9)$，则 $\frac{1}{X}\sim$ $F(9,1)$；又若 $Y\sim t(9), P(Y>c)=0.2$，其中 c 为一常数，则 $P(X>c^2)=$ 0.4

$P(Y>c)=P(Y<-c)=0.2$

$P(X>c^2)=P(Y^2>c^2)$
$=P(Y>c)+P(Y<-c)$
$=0.2+0.2$
$=0.4$

1

P $P(1-P)$

11. 设总体 $X \sim B(1,p)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是取自 X 的样本，则 $E(\overline{X})=$ ___ $E(S^2)=$ ___

12. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，则参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为（ $\overline{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$ ）

$P(A|B$

得分

二（8分）、设有200件相同的产品，其中120件是甲厂生产的；60件是乙厂生产的；20件是丙厂生产的，已知这三个厂的产品不合格率依次为0.1,0.2,0.3，现从中任取一件，(1) 问取到不合格品的概率是多少？

$P(A|B_3)=\frac{P(AB_3)}{P(B_3)}$

(2) 设取到的是不合格品，问它是由丙厂生产的概率是多少？

1、(1) 设 A 不合格产品

$P(B_1)=0.6$ B_1 甲，B_2 乙，B_3 丙

$P(B_2)=0.3$

$P(B_3)=0.1$ $P(A|B_1)=0.1$ $P(A|B_2)=0.2$

$P(A|B_3)=0.3$

$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+\cdots$
$=0.1\times0.6+0.2\times0.3+0.1\times0.3$
$=0.15$

0.15 0.2

(2) $P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}$
$=\frac{0.1\times0.3}{0.15}=0.2$

得分

三（10分）、(1) 已知 $X \sim N(0,1)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度；

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是取自正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，求 $P(0<\overline{X}<\frac{1}{4})$。

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$

1′ $y\le0$ $F_Y(y)=0$

2′ $y>0$ $F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$
$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

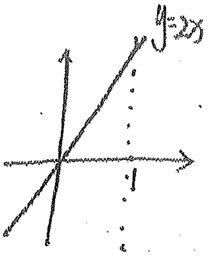
$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})-(-\frac{1}{2\sqrt{y}})f_X(-\sqrt{y})$
$=\frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y}))$

$y>0$

(2) $\overline{X}\sim N(0,\frac{1}{16})$

$P(0<\overline{X}<\frac{1}{4})$
$=\Phi\left(\frac{\frac{1}{4}-0}{\frac{1}{4}}\right)-\Phi(0)$
$=\Phi(1)-\Phi(0)$
$=0.341$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})) & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$



得分

四(10分)、设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

1) 求$f_X(x), f_Y(y)$；2) 试说明X,Y是否独立？ 3) 求在$X=x\ (0<x<1)$条件下的$f_{Y|X}(y|x)$.

$f(x|y)\ (x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$f(y|x)\ (y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

(1) $f(x)=\int_0^{2x} 1\,dy = y\Big|_0^{2x} = 2x \quad 0<x<1$

~~$f(x)=$~~

$f(y)=\int_{\frac{y}{2}}^{1} 1\,dx = 1-\frac{y}{2} \quad 0<y<2x$

$=\begin{cases}\frac{1}{2x} & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

(2) $f_X(x)\cdot f_Y(y)=2x(1-\frac{y}{2})\neq f(x,y)=1$

$\therefore$ 不独立

$E(X)=\mu \quad D(X)=\sigma^2$

$\mu\ \sigma^2$

得分

五(10分)、已知$X\sim N(1,9), Y\sim N(0,16)$，且$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，记$Z=X+\frac{Y}{2}$.

1) 求$E(Z),D(Z)$；2) 求$Cov(X,Z)$.

$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DY}\sqrt{DX}}$

$D(X)=E[(X-E(X))]^2$ (2)

$E(Z)=E(X+\frac{Y}{2})=EX+\frac{1}{2}EY=1$

$Cov(X,Y)=\sqrt{DX}\sqrt{DY}\cdot\rho_{XY}$

$=-6$

$E(X)=1 \quad E(Y)=0$

$D(X)=9 \quad D(Y)=16$

$D(Z)=D(X+\frac{Y}{2})=DX+\frac{1}{4}DY+Cov(X,Y)$

$=9+4+(-6)$

$=7$

$Cov(X,Z)$

$=Cov(X, X+\frac{Y}{2})=\cancel{Cov(X,X)}+\cancel{Cov(X,Y)}$

$=Cov(X,X)+Cov(X,\frac{Y}{2})$

$=D(X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$

$=9-3$

$=6$

得 分

六(10 分)、设总体 $X \sim U(\theta,1)$，其中参数 θ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本。求 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

解: $\frac{1}{(1-\theta)^n}$ $\theta\uparrow$

$\hat{\theta} = \min_{1\le i\le n} x_i$

① $x \sim U(\theta,1)$

$E(x) = \frac{\theta+1}{2}$

$E(x) = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\hat{\theta} = 2\bar{X} - 1$

② $f_x = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta} & \theta < x < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$L(\theta) = \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^n \le \frac{1}{(x_{max} - x_{min})^n}$

$\theta \le \min_{1\le i\le n} x_i$

$L(\theta)$ 在 $\theta = x_{min}$ 时, $x_{max} = 1$ 取最大

$\hat{\theta} = \min x \quad 1 \le i \le n$

得 分

七(7 分)、测定某种溶液中的某种元素的含量，由它的 20 个测定值计算出 $s^2 = 0.09^2$，设测定值总体服从正态分布，总体方差 σ^2 未知，试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验 $H_0: \sigma^2 = 0.11^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \ne 0.11^2$。

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(20-1)\times 0.09^2}{0.11^2} = 12.719 < \chi^2_{0.025}(19)$$

∴ 接受原假设

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

《 概率论与数理统计 》

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

得 分

一、填空题（每空 3 分，共 42 分）

1. 设 A,B,C 为三个事件，则 A,B,C 都不发生可以表示为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

2、设 A，B，C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=0.25$，$P(BC)=0$，

$P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$P(AB)=P(AC)=0.125$，则 $P(A\cup B\cup C)=$ ~~0.25~~ 0.5

$P(ABC)=0$

3. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$ 正态，则 $Y=4X+1$ 的概率密度函数 $f_Y(y)=$ $\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}$

$E(Y)=0\times4+1=1$ $D(Y)=16$ $Y(1,16)$

4. 已知 X 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，则 $P(X\geq EX)=$ e^{-1}

指数 $E(X)=\frac{1}{\lambda}$ 二项 $P(X\geq1)=1-P(X<1)$ $E(X)-2E(Y)+1$

5. 设 $X\sim U(1,13)$，$Y\sim B(100,0.1)$，且 X、Y 相互独立，则 $E(X-2Y+1)=$ -12

$D(X-2Y+1)=$ 48 $D(X)+4D(Y)-2\mathrm{COV}(X,Y)=48$

$E(X)=\frac{1+13}{2}=7$

$D(X)=\frac{(13-1)^2}{12}=12$

$E(Y)=10$

$D(Y)=10(1-0.1)=9$

6. 已知 $X\sim\pi(1)$，$Y\sim\pi(2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $P(X+Y=0)=$ e^{-3}

$X+Y\sim\pi(3)$ $\lambda=3$ $\frac{3^0e^{-3}}{0!}$

7. 设 X,Y 为相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则 $Z=\max(X,Y)$

的分布函数 $F_Z(z)=$ ~~$1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$~~ $F_X(z)F_Y(z)$

8. 设随机变量 $X\sim\chi^2(3)$，则 $P(|X-3|\geq12)\leq$ $\frac{1}{24}$ $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=\frac{6}{12^2}=\frac{1}{12\times2}$

$E(X)=3$ $D(X)=6$

9. 设 n_A 表示 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生

的概率，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\}=$ 0

10. 已知 $X\sim t(5)$，则 $X^2\sim$ $F(1,5)$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

5

11、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2 已知，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，则均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为（ $\overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$ ）

12、设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是来自总体 $X \sim B(10, 0.2)$ 的一个简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，则 $D(\overline{X}) =$ 0.1，$E(S^2) =$ 1.6

得 分

二、设有 100 件相同的产品，其中 50 件是甲厂生产的；30 件是乙厂生产的；20 件是丙厂生产的。已知这三个厂的产品不合格率依次为 0.2,0.3,0.1，现从中任取一件，（1）问取到不合格品的概率是多少？（2）如果取到的是不合格品，则它是由丙厂生产的概率是多少？（10 分）

(1) $P = \frac{50\times0.2+30\times0.3+20\times0.1}{100} = 0.21$

(1) $PA = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)(A|B_3)$

$= 0.5\times0.2 + 0.3\times0.3 + 0.1\times0.2$

$= 0.21$

(2) 设A是不合格，B是丙生产

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.21} = \ldots$

(2) $P(B_3|A) = \frac{P(AB_3)}{P(A)} = \frac{P(B_3)\cdot P(A|B_3)}{0.21} = \ldots$

得 分

三、1）设随机变量 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，求 $Y = e^X$ 的概率密度。

2）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0 \le x \le \pi \\ 0 & 其它 \end{cases}$，对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求随机变量 Y^2 的数学期望。（10 分）

$x \sim U(0,1)$

$f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$F_Y(y) = P(Y\le y)$

$= P(e^x \le y)$

$= P(x \le \ln y)$

$= F(\ln y)$

$F_Y(y) = P(Y\le y) = P\{e^x \le y\}$

$F_Y(y) = 0$

$F_Y(y) = 1$

$F_Y(y) = \{$

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 1<y<e \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$y \in (1, e)$

(2) $P(X > \frac{\pi}{3}) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

$= \sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$= \frac{1}{2}$

$EY = 4E = \frac{1}{2}\times4 = 2$

$Y \sim B(4, \frac{1}{2})$

$DY = 4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 1$

$DY = E(Y^2) - (EY)^2$

$1 = E(Y^2) - 4$

$E(Y^2) = 5$

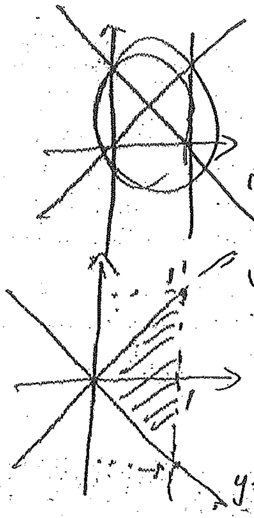
$f_Y(y)=\int_0^1 1\,dx \quad x<y<x$

$=1$

得 分

四、已知随机变量(X,Y)在区域D: $0<x<1, -x<y<x$内服从均匀分布.

1）求$f_X(x)$；2）计算EX；3)求$Cov(X,Y)$，并判断X与Y是否相关？



(1) $f(x,y)=\begin{cases}1\\0\end{cases}$

$y=x$

$f_X(x)=\int_{-x}^{x}1\,dy=2x$

$f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\0 & 其他\end{cases}$

$y=-x$ (2) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx\,dy$

$=\int_0^1 2x^2\,dx\int_{-1}^{1}dy$

$\frac{2}{3}x^3$

$=\frac{2}{3}$

$E(Y)=\int_{-x}^{x}y\,dy=\int_0^1 dx=0$

(3) $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$E(XY)=\iint xyf(x,y)\,dx\,dy$

$\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}xy\,dy$

$\frac{1}{2}\int_0^1 dx\; xy^2\Big|_{-x}^{x}=0$

$cov(X,Y)=0-0=0$

得 分

五、设$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是来自正态总体$X\sim N(0,0.3^2)$的一个简单随机样本，

1）求$P(\bar{X}\ge 0)$；2）求$P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}$.　　$(\chi^2_{0.1}(10)=16)$　（10分）

(1) $\bar{x}\sim N(0,\frac{0.3^2}{10})$

$P(\bar{X}\ge 0)$

$=P(x<0)$

$=0.5$

$x\sim N(0,0.3^2)$

$\frac{x_i}{0.3}\sim N(0,1)$

$\chi^2=\sum_{i=1}^{10}(\frac{x_i}{0.3})^2\sim\chi^2(n$

$\sum_{i=1}^{10}(\frac{x_i}{0.3})^2\cdot 0.3^2>1.44$

$0.09\chi^2(10)>1.44$

$P\{\sum_{i=1}^{10}x_i^2>1.44\}=P\{\sum_{i=1}^{10}(\frac{x_i}{0.3})^2>16\}$

$=P\{\chi^2(10)\ge 16\}=0.1$

得 分

六、测定某种溶液中的某种元素的含量，它的 23 个测定值给出 $s^2=0.09^2$，设测定值总体服从正态分布，总体方差 σ^2 未知，试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验方差是否是 0.11^2。（$\chi^2_{0.025}(22)=36.781$ $\chi^2_{0.975}(22)=10.982$） （8 分）

得 分

七、设总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta\, x^{-(\theta+1)}, & x>1\\ 0\,, & 其它\end{cases}$，其中未知参数 $\theta>1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量. （10 分）

$\hat{\theta}_{矩}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$

$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

$EX=\int$

装订线内不要答题

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

《概率论与数理统计》

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分								

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

试卷备用数据：$\Phi(1)=0.84$，$\chi^2_{0.1}(10)=16$，$t_{0.025}(15)=2.13$

得分

一、填空题（共45分，每空3分）

1. 设A、B、C是三个事件，则事件"A发生，而B、C不发生"可表示为 $A\bar{B}\bar{C}$

2. 设 $P(\bar{A})=0.4, P(B)=0.3$，且A、B有包含关系，则 $P(A\bar{B})=$ 0.3

把10本不同的书任意放在书架上，则其中指定的3本书放在一起的概率是 $\frac{1}{15}$

$k=[(n+1)p]$ 时

4. 已知 $X\sim B(10,0.32)$，要使得 $P(X=k)$ 最大，则 $k=$ 3

5. 设 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim\pi(1)$，$Y\sim\pi(2)$，$Z=X+Y$，则 $P(X+Y=1)=$ $3e^{-3}$

6. 设随机变量 X 服从参数为2的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$ e^{-1}

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布，已知 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)=$ $[F(z)]^2$

8. 设 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,5)$，则 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)=$ $N(-1,9)$ $=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z+1)^2}{18}}$

9. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，$Y\sim U(-2,2)$，则 $E(2X-\sqrt{3}Y+3)=$ 5，又由切比雪夫不等式知：$P(|X-1|<3)\geq$ $\frac{8}{9}$

10. 设 $X\sim B(100,0.2)$，则由中心极限定理 $P(X\leq 16)\approx$ 0.16

$X\sim N(np, np(1-p))=N(20,16)$

11. 设 X_1,X_2,X_3 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的随机样本，则统计量 $S=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ ~ $t(1)$

$\Phi(-1)=1-\Phi(1)$

$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$

$P(X\leq 16)$

$=P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq\frac{16-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$

$=\Phi\left(\frac{16-100\times 0.2}{}\right)$

12. 设总体 $X \sim \chi^2(5)$，$X_1, X_2 \cdots, X_{10}$ 是取自 X 的样本，则 $E(\overline{X}) =$ 5，$D(\overline{X}) =$ 1

13. 设总体 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$，μ 未知，样本容量为 n，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则总体方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$。

得 分

二(8 分)、已知男子有 5%是色盲患者，女子有 0.25%是色盲患者，今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，(1) 求此人是色盲患者的概率；(2) 若此人恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解 设此人是男人为事件 B_1 为女人是事件 B_2，$B_1 B_2$ 构成一个划分
是色盲为事件A

$P(A|B_1)=0.05$ $P(A|B_2)=0.0025$，$P(B_1)=P(B_2)=0.5$

(1) $P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)=0.5\times0.05+0.5\times0.0025$
$=0.02625$

(2) $P(A)\cdot P(B_1|A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)$ $P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.05\times0.5}{0.02625}$
$=0.952$

得 分

三(12 分)、(1) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度；

(2) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自正态总体 $X \sim N(0, 0.3^2)$ 的一个简单随机样本，求概率 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\}$。

解 (1) $X \sim N(0,1)$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ① $y\le0$ $F_Y(y)=0$

② $y>0$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)$
$=\Phi(y)-\Phi(-y)$
$=2\Phi(y)-1$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=2\varphi(y)$
$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le0\\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} & y>0\end{cases}$

(2) $\frac{X-0}{0.3}\sim N(0,1)$

$\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i-0}{0.3}\right)^2\sim\chi^2(10)$

$P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}$
$=P\{\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i-0}{0.3}\right)^2>\frac{1.44}{0.3^2}\}=P\{\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i-0}{0.3}\right)^2>16\}=0.1$

得 分

四(10 分)、设二维连续型随机变量 (X,Y) 在区域 D：$0<x<1, -x<y<x$ 内服从均匀分布. (1) 求 $f_X(x)$？ (2) 试判断 X 与 Y 是否相关？

解：(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}=1 & 0<x<1, -x<y<x \\ 0 & 其他\end{cases}$

$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{x} 1\,dy = 2x & 0<x<1 \\ 0 & 其他\end{cases}$

(2) $f_Y(y)=\begin{cases}\int_{|y|}^{1} 1\cdot dx = 1-|y| & (-1<y<1) \\ 0 & 其他\end{cases}$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$E(XY)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xy\,dy$

$=0$

$E(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\frac{2}{3}$

$E(Y)=\int_{-1}^{1}(1-|y|)\,y\,dy$

$=\int_{-1}^{0}(1+y)\,y\,dy+\int_0^1(1-y)\,y\,dy$

$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$=0-0=0$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=0$

得 分

五(8 分)、已知 $D(X)=4, D(Y)=9, D(X-Y)=17$，试求：

(1) 相关系数 ρ_{XY}；(2) 协方差 $Cov(X-Y, X+2Y)$.

解：(1) $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y)=\frac{D(X)+D(Y)-D(X-Y)}{2}$

$=\frac{4+9-17}{2}=-2$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-2}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{1}{3}$

(2) $Cov(X-Y, X+2Y)=D(X)+Cov(X,Y)-2D(Y)$

$=4+(-2)-2\times 9=-16$

$$\begin{cases} E(X)=\overline{X}=A_1 \\ E(X^2)=A_2 \\ =D(X)+E(X)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_1= \\ \hat{\theta}_2= \end{cases}$$

$\theta^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{\theta}x_1^{\sqrt{\theta}-1}\cdot\sqrt{\theta}x_2^{\sqrt{\theta}-1}\cdots\sqrt{\theta}$

得 分

六(10 分)、设总体 X 的概率密度是 $f(x,\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$，设来自总体 X 的简单随机样本为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$．（1）求参数 θ 的矩估计量；（2）求参数 θ 的最大似然估计量．

$\prod_{i=1}^{n}x_i = x_1x_2\cdots x_i$

解：1，

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}x^{\sqrt{\theta}+1}\Big|_0^1$

$\hat{\theta}=\left(\frac{1}{\frac{1}{\overline{X}}-1}\right)^2=\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$ 　　$=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\overline{X}$

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}\theta^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x_i<1 \\ 0 & 其他\end{cases}$

当 $0<x_i<1$ 时：$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2}\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\theta^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)=0$

$\hat{\theta}=\frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊　装订线内不要答题

得 分

七(7 分)、设矿石中某种元素含量服从正态分布，但均值和方差均未知．现测定容量为 16 的样本，计算得 $\bar{x}=0.4, s^2=0.18^2$，试在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，检验 $H_0:\mu=0.49$．

解：① 提出假设：$H_0: \mu=0.49$　　$H_1: \mu\neq0.49$

② 检验统计量：$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

③ 拒绝域　$|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.13$

④ 观测量：$|t|=\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}}=\frac{|0.4-0.49|}{0.18/\sqrt{16}}=2$

⑤ 判断 $2<2.13$，未落入拒绝域，接受 H_0 即：$\mu=0.49$
原假设

《 概率论与数理统计 》

院(系)__　　　　____ 班级___　　　_ 学号_　　　_ 姓名_

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分	12	12	8	12	12	14	14	12	96

得分
12

一..某商店收进甲厂生产的产品 30 箱，乙厂生产的同种产品 20 箱，甲厂生产的产品每箱装 100 个，废品率为 0.06，乙厂生产的产品每箱装 120 个，废品率为 0.05，求：

1.任取一箱，从中任取一件为废品的概率；

2.若将所有的产品开箱混放，从中任取一件为废品的概率。（12 分）

解：(1) B_1 = "取到甲箱"

B_2 = "取到乙箱"

A = "取到废品"

则 $P(B_1)=0.6 \quad P(B_2)=0.4$

$P(A|B_1)=0.06 \quad P(A|B_2)=0.05$

$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.6\times0.06+0.4\times0.05=0.056$

(2) $P(A)=\dfrac{30\times100\times0.06+20\times120\times0.05}{30\times100+20\times120}=0.056$

得分
12

二.设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

。

1.求随机变量 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

2.判断随机变量 X,Y 是否相互独立，并说明理由？ （12 分）

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy, & x>0 \\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}e^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y}e^{-y}dx, & y>0 \\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0 \\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) 显然 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

故 X、Y 不相互独立。

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

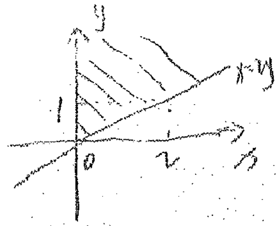
装订线内不要答题

得 分
8

三.设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}axye^{-(x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（1） 求常数a；（2）求概率$P(X\le 2Y)$。（12 分）



解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} axye^{-(x+y)}dxdy=1$

$\Rightarrow a=1$

(2) $P(X\le 2Y)=\iint\limits_{X\le 2Y} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} xye^{-(x+y)}dxdy=\frac{7}{9}$

-4

得 分
12

四.设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，且 X 与 Y 的概率密度分别为

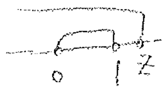
$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$

$0<x<1$

$z-x>0$

$x<z$



求随机变量$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$（12 分）。

解： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}dy$； $\begin{cases}0<z-y<1\\ y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y>0\\ z-1<y<z\end{cases}$

当 $z\le 0$时，$f_Z(z)=0$

当 $0<z<1$时，$f_Z(z)=\int_0^z e^{-y}dy=1-e^{-z}$.

当 $z\ge 1$时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z} e^{-y}dy=e^{1-z}-e^{-z}$.

综上，$f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1\\ e^{1-z}-e^{-z}, & z\ge 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

2

得 分
12

五、一台设备由三大部件构成，在设备运转过程中各部件需要调整的概率相应为0.1，0.2，0.3，假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，求 X 的数学期望 EX 和方差 DX（12分）

解：$P(X=0)=0.9\times0.8\times0.7=0.504$

$P(X=1)=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398$

$P(X=2)=0.1\times0.2\times0.7+0.9\times0.2\times0.3+0.1\times0.8\times0.3=0.092$

$P(X=3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006$

$\therefore EX=0\times0.504+1\times0.398+2\times0.092+3\times0.006=0.6$

$EX^2=1\times0.398+4\times0.092+9\times0.006=0.82$

$DX=EX^2-(EX)^2=0.82-0.6^2=\cancel{0.22}\ 0.46$

得 分
14

六、设随机变量 X 和 Y 各只有 $-1,0,1$ 等三个可能值，且同分布并满足条件：

$$P\{X=-1\}=P\{X=1\}=\frac{1}{4}.$$

假设满足条件，(1) $P\{XY=0\}=1$；(2) $P\{X+Y=0\}=1$.

试求 X 和 Y 的联合分布律及其边缘分布律（14分）

解：(1) ∵ $P\{XY=0\}=1$. 故X、Y必有一个或两个为0.

即其他情况概率为0.

又有 $P\{X=-1\}=P_{-1\cdot}=\frac{1}{4}$，

$P\{X=1\}=P_{1\cdot}=\frac{1}{4}$，

X、Y同分布.

则：

X \ Y	-1	0	1	$P_{i\cdot}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

(2) 同理：

X \ Y	-1	0	1	$P_{i\cdot}$
-1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

得 分
14

七设二维连续型随机变量(X,Y)在区域$D:0<x<1, -x<y<x$内服从均匀分布。

（1）写出随机变量(X,Y)的概率密度函数；

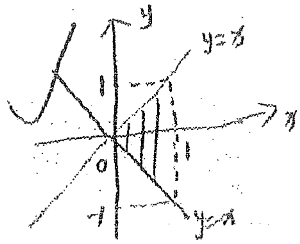
（2）求随机变量$Z=2X+Y$的数学期望及方差（14 分）。

解：(1) $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, -x<y<x \\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) $EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(2x+y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}(2x+y)\,dy=\frac{4}{3}$

$EZ^2=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}(4x^2+y^2+4xy)\,dy=\frac{13}{6}$

$DZ=EZ^2-(EZ)^2=\frac{13}{6}-\frac{16}{9}=\frac{7}{18}$.



得 分
12

八.设随机变量X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求随机变量$Y=X^2$的概率密度（12 分）。

解：当$y<0$时，$F(y)=P(Y\le y)=0$

当$y\geq 0$时，$F(y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

$f_Y(y)=F'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}-[-\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y})]=\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}$

综上：$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y\geq 0 \\ 0, & 其他\end{cases}$.

《概率论与数理统计》

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分											

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

一、填空题（共42分，每格3分）

1. 设A、B、C是三个事件，则事件"A、B发生而C不发生"可表示为 $AB\overline{C}$

2. 把10本不同的书任意放在书架上，则其中指定的3本书在一起的概率为 $\frac{1}{15}$

3. 已知 $P(A)=0.8, P(B)=0.2$，且 A, B 有包含关系，则 $P(A\overline{B})=$ 0.6

4. 设随机变量 X 服从参数 $\lambda=3$ 的指数分布，则 $P(X\geq1)=$ e^{-3}；又已知 $Y\sim U(-1,3)$，则 $E(3X-2Y+2)=$ 1

5. 设随机变量 (X,Y)，X、Y 相互独立，X 的概率密度为 $f_X(x)$，Y 的概率密度为 $f_Y(y)$，对某固定的 y 有 $f_Y(y)>0$，则在条件 $Y=y$ 下 X 的条件概率密度为 $f_X(x)$

6. 设 $X\sim\pi(2), Y\sim\pi(3)$，且 X、Y 相互独立，则 $X+Y\sim$ $\pi(5)$

7. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(5,7), Y\sim N(3,9)$，则 $P(X-Y\leq2)=$ 0.5

8. 设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，则由契比雪夫不等式有：$P(|X-\mu|<5\sigma)\geq$ $\frac{24}{25}$

9. 设 $X\sim B(500,0.02)$，则由中心极限定理可得 $P(X\geq10)\approx$ 0.5

10. 已知 $X\sim F(2,6)$，则 $\frac{1}{X}\sim$ $F(6,2)$；已知 $Y\sim t(4)$，则 $Y^2\sim$ $F(1,4)$

11. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，已知 $\overline{X}^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计量，则 $c=$ $\frac{1}{n}$

12. 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ 未知，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，则方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

得 分

二、已知男性有5%是色盲患者，女性有0.25%是色盲患者．今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人．（1）求此人是色盲患者的概率；（2）若此人恰好是色盲患者，求此人是女性的概率．（8分）

得 分

三、(1) 已知 $X\sim U(0,2)$，求 $Y=e^X$ 的概率密度；

（2）在总体 $X\sim N(80,20^2)$ 中随机地抽取一容量为100的简单随机样本，求概率 $P\{|\overline{X}-80|<3\}$．（$\Phi(1.5)=0.9332$）（12分）

解：1) ① $y\le 0$ 时 $f_Y(y)=0$

② $y>0$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)$

$$=\begin{cases}0 & (\ln y\le 0 \text{ 即 } 0<y\le 1)\\ \frac{\ln y-0}{2} & (0<\ln y\le 2 \text{ 即 } 1<y\le e^2)\\ 1 & (\ln y>2 \text{ 即 } y>e^2)\end{cases}$$

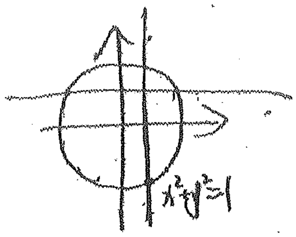
$$\therefore f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}0 & (0<y\le 1 \text{ 或 } y>e^2)\\ \frac{1}{2y} & (1<y\le e^2)\end{cases}$$

综上：$f_Y(y)=\begin{cases}0 & (y\le 1 \text{ 或 } y>e^2)\\ \frac{1}{2y} & (1<y<e^2)\end{cases}$

(2) $P\{|\overline{X}-80|<3\}=P\{-3<\overline{X}-80<3\}=P\{\frac{-3}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{\overline{X}-80}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{3}{\sigma/\sqrt{n}}\}$

$=\Phi(\frac{3}{20/\sqrt{100}})-\Phi(\frac{-3}{20/\sqrt{100}})=\Phi(\frac{3}{2})-\Phi(-\frac{3}{2})=2\Phi(\frac{3}{2})-1$

$=0.8664$.



$x = \sqrt{1-y^2}$

得 分

四、设随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

(1) 求 $f_X(x)$, $f_Y(y)$； (2) 求 ρ_{XY}，并判断X与Y是否相关？ (10 分)

解：(1) $f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy & (-1\le x\le 1)\\ 0 & 其他\end{cases} = \begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & (-1\le x\le 1)\\ 0 & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx & (-1\le y\le 1)\\ 0 & \end{cases} = \begin{cases}2\sqrt{1-y^2}\,\frac{1}{\pi} & (-1\le y\le 1)\\ 0 & 其他\end{cases}$

(2) $E(X)=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2}\,dx = 0$ ∵ $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

$E(Y)=0$ $E(XY)=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}xy\,dy = 0$ ∴ $\rho_{XY}=0$ ∴不相关

得 分

五、设某台设备由 3 个元器件组成，在设备运转中，这 3 个元器件需要调整的概率分别为 0.1，0.3，0.5．假设各个元器件是否需要调整相互独立，以 X 表示同时需要调整的元件数，试求 X 的数学期望和方差。 (10 分)

$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$E(X)=np=20p=\overline{X}$ $\quad \hat{p}=\frac{\overline{X}}{20}$

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n} C_{20}^{x_i} p^{\sum x_i}\cdot(1-p)^{20n-\sum x_i}$

$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln C_{20}^{x_i}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(20n-\sum x_i\right)\ln(1-p)$

得 分

六、设总体 $X\sim B(20,p)$，其中参数 p 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本。求 p 的矩估计量和最大似然估计量.（10 分）

解：(1) $E(X)=np=20p=\overline{X}$

$p=\frac{\overline{X}}{20}$

(2) $L(\theta)=p(X_1=x_1)\cdot p(X_2=x_2)\,p(X_3=x_3)\cdots p(X_n=x_n)$

$\frac{d L(p)}{d p}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}-\frac{20n-\sum x_i}{1-p}=0$

$\Rightarrow \hat{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{20n}=\frac{\overline{X}}{20}$

装 订 线 内 不 要 答 题

学生遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

得 分

七、根据以往的材料知：某厂的铁水含碳量服从正态分布 $N(4.55,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知. 现在测定了 16 炉铁水，经计算得 $\bar{x}=4.51$，$s^2=0.04^2$. 试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验 $H_0:\mu=4.55$？（$t_{0.025}(15)=2.1315$）（8 分）

解：①提出假设：$H_0:\mu_0=4.55$ $\quad H_1:\mu_0\neq 4.55$

② 检验统计量：$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

③ 拒绝域：$|t|>t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.1315$

④ 实测量：$|t|=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{4.51-4.55}{0.04/\sqrt{16}}=4$

⑤ 判断：$4>2.1315$

落入拒绝域，拒绝原假设 $H_0:\mu=4.55$，接受备择假设 $H_1:\mu\neq 4.55$

即认为 $\mu\neq 4.55$

《概率论与数理统计》

院(系)__________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

一、填空题（共 42 分，每格 3 分）

1. 设 A,B,C 为三个事件，则“A与B发生而C不发生”可表示为 $AB\overline{C}$

2. 设 A，B 是两个事件，且 $P(A)=0.3, P(B)=0.2$．若 A，B 互不相容，则 $P(A\overline{B})=$ 0.3；若 A，B 有包含关系，则 $P(A\overline{B})=$ 0.1．

3. 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码，则最大号码为 5 的概率为 $\frac{1}{20}$

4. 设 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim\pi(1), Y\sim\pi(2)$，则 $P(X+Y=1)=$ $3e^{-3}$

5. 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，则 $E(e^{-3X})=$ $\frac{1}{4}$

6. 设 X 与 Y 独立，$X\sim N(-1,4), Y\sim B(10,0.2)$，则 $D(X+Y)=$ 5.6

7. 设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，则由契比雪夫不等式有：$P(|X-\mu|<3\sigma)\geq$ $\frac{8}{9}$

8. 设 n_A 表示 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\}=$ 1

9、设总体 $X\sim B(4,0.5)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，则 $E(\overline{X})=$ 2，$E(S^2)=$ 1，$D(\overline{X})=$ $\frac{1}{n}$

10、设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自均值为 θ 的指数分布总体 X 的简单随机样本，其中 θ 为未知．若估计量 $a(X_1+X_2+X_3+X_4)$ 是 θ 的无偏估计量，则 $a=$ $\frac{1}{4}$

$E[a(x_1+x_2+\cdots x_n)]$

$=a[E(x_1)+E(x_2)+\cdots E(x_n)]$

$\Rightarrow 4a\theta=\theta$

$4a=1\Rightarrow a=\frac{1}{4}$

11、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2 已知，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，则总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \ \overline{X}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

得 分

二、已知男性有 5%是色盲患者，女性有 0.25%是色盲患者．今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人．（1）求此人是色盲患者的概率；（2）若此人恰好是色盲患者，求此人是女性的概率．（10 分）

得 分

三、设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求随机变量 $Y = |X|$ 的概率密度．（10 分）

解：① $y \le 0$ 时　$f_Y(y)=0$　　$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

② $y>0$ 时　$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)$

$=\Phi(y)-\Phi(-y)=\Phi(y)-[1-\Phi(y)]=2\Phi(y)-1$

$f_Y(y)=F'_Y(y)=2\varphi(y)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases} 0 & (y\le 0) \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} & (y>0) \end{cases}$　　$=\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

得 分

四、设某台设备由3个元器件组成．在设备运转中，这3个元器件需要调整的概率分别为0.1，0.2，0.3．假设各个元器件是否需要调整相互独立，以X表示同时需要调整的元件数，试求X的数学期望和方差．（10分）

解：$P(X=0)=0.9\times0.8\times0.7=0.504$

$P(X=1)=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398$

$P(X=2)=0.1\times0.2\times0.7+0.1\times0.3\times0.8+0.9\times0.2\times0.3=0.092$

$P(X=3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006$

$E(X)=0\cdot P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3)=0.6$

$\cancel{D(X)}=E(X^2)=0^2P(X=0)+1^2\times P(X=1)+2^2\times P(X=2)+3^2\cdot P(X=3)=0.82$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=0.22$

得 分

五、已知$D(X)=4,D(Y)=9,D(X-Y)=17$，试求：（1）协方差$Cov(X,Y)$；（2）相关系数ρ_{XY}；（3）互协方差$Cov(X-2Y,X+Y)$．（10分）

解：$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$

$\Rightarrow Cov(X,Y)=-2$

$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{-2}{2\times3}=-\dfrac{1}{3}$

$Cov(X-2Y,X+Y)$

$=D(X)-Cov(X,Y)-2D(Y)$

~~$=4-(-\frac{1}{3})$~~

$=4-(-2)-2\times9=-12$

得分

六、已知总体 X 的概率分布为 $\begin{array}{c|ccc} X & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{array}$，其中

$\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数. 利用总体 X 的如下样本值: 2, 3, 1, 2. 求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.（10 分）

解: (1) $\mu_1 = E(X) = 1\cdot\theta^2 + 2\cdot 2\theta(1-\theta) + 3(1-\theta)^2$

$= \theta^2 + 4\theta - 4\theta^2 + 3(1 - 2\theta + \theta^2)$

$= 3 - 2\theta = A_1 = \bar{X}$ $\Rightarrow \bar{x} = \frac{2+3+1+2}{4} = 2$

$\therefore \theta = \frac{1}{2}(3-\bar{X})$ —— 矩估计 $\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{2}\times(3-2) = \frac{1}{2}$

(2) $L(\theta) = P(X=2)P(X=3)P(X=1)P(X=2)$

$= 2\theta(1-\theta)\cdot(1-\theta)^2\cdot\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)$

$= 4\theta^4(1-\theta)^4$

$\ln L(\theta) = \ln 4 + 4\ln\theta + 4\ln(1-\theta)$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{4}{\theta} - \frac{4}{1-\theta}$

$= \frac{4-8\theta}{\theta(1-\theta)} = 0$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{2}$

得分

七、设矿石中的碳元素含量服从正态分布，但均值、方差未知。现测定容量为 16 的样本，计算得 $\bar{x}=0.4, s^2=0.12^2$，试在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，检验总体的均值是否为 0.49？（已知 $t_{0.025}(15)=2.1315$）（8 分）

① 提出假设 $H_0: \mu_0 = 0.49$ $H_1: \mu_0 \neq 0.49$

② 检验统计量: $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

③ 拒绝域: $|t| > t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(15) = 2.1315$

④ 实测量: $|t| = \frac{|\bar{x}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}} = \frac{|0.4-0.49|}{0.12\div\sqrt{16}} = 3$

⑤ 判断 $3 > 2.1315$ 落入拒绝域. 拒绝原假设 H_0

接受备择假设 $\mu_0 \neq 0.49$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

《 概率论与数理统计 》

院(系)____________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

装订线内不要答题

得分

一、填空题（每空 3 分，共 42 分）

1. 设 A,B,C 为三个事件，则 A,B,C 至少有一个发生可以表示为________

2. 设随机事件 A、B 相互独立，且 $P(B)=0.5$, $P(A-B)=0.3$，则 $P(AB)=$ __；

$P(B-A)=$ __

3. 设随机变量 X 在 $[2,5]$ 上服从均匀分布，现在对 X 进行 3 次独立观测，则至少有一次观测值大于 3 的概率为______

4. 设随机变量 $X\sim N(3,2^2)$，如果 $P(X>c)=P(X\le c)$，则 $c=$ ___

5. 已知 $X\sim\pi(2)$，则 $P(X=DX)=$ ____________

6. 设 X 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，$Y\sim B(100,0.1)$，且 X 与 Y 相互独立，

则 $E(e^{-3X})=$ ___；$D(2X-Y+1)=$ ______

7. 设随机变量 X 的均值为 μ，方差为 σ^2，则 $P(|X-\mu|<7\sigma)\ge$ ______

8. 设 n_A 表示 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生

的概率，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\le\varepsilon\}=$ _____

9. 已知 $X\sim\pi(2), Y\sim\pi(3)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $X+Y\sim$ _____；又若 $F\sim F(9,5)$，

则 $\frac{1}{F}\sim$ _______；

25

10. 设 X_1, X_2, Λ, X_n 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，则均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为（________________）

11. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1, X_2, X_3 为其样本，则当常数 $a=$ ______ 时，$\hat{\mu}=X_1/3+X_2/2+aX_3$ 是未知参数 μ 的无偏估计量.

得 分

二、设某工厂生产的每台仪器以概率 0.70 可以直接出厂；以概率 0.30 需要进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂，以概率 0.20 定为不合格品不能出厂．现在该厂生产了 $n\,(n \geq 2)$ 台仪器，求所有仪器都能出厂的概率．

（8 分）

得 分

三、1）设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度．

）设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X \sim N(11,7), Y \sim N(7,9)$．试求概率 $P(X<Y)$．（已知 $\Phi(1)=0.8413$）

（12 分）

得 分

四、设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为：

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

1) 求$Cov(X,Y)$，并判断X与Y是否相关？ 2) 判断X与Y是否相互独立？ (10分)

得 分

五、设$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$是来自正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个简单随机样本，这里μ,σ^2均为未知，$\overline{X}$与S^2分别为样本均值与样本方差.（1）求$P(\frac{S^2}{\sigma^2}\leq 2.04)$；（2）若$\sigma^2=1$，求$D(S^2)$.　($\chi^2_{0.01}(15)=30.6$)　（10分）

27

得 分

六、设矿石中某种元素含量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，但参数均未知。现测定容量为25的样本，计算得 $\bar{x}=0.4, s^2=0.17^2$，试在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，检验 $H_0:\mu=0.44$．（$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.05}(24)=1.7109$）（8分）

得 分

七、已知总体 X 的概率分布为 $\begin{array}{c|ccc} X & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{array}$，其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数．利用总体 X 的如下样本值：2，3，1，2，1，3．求 θ 的矩估计值和最大似然估计值．（10分）

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

《 概率论与数理统计 》

参考答案

一、填空题（每空 3 分，共 42 分）

1、$AYBYC$； 2、0.3；0.2； 3. $\dfrac{26}{27}$； 4、3； 5、$2e^{-2}$； 6、$\dfrac{1}{4}$,13；

7、$\dfrac{48}{49}$； 8、1； 9、 $\pi(5)$, $F(5,9)$； 10、$(\overline{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$； 11、$\dfrac{1}{6}$

二、解：设 $A=\{$仪器能出厂$\}$,

$B_1=\{$仪器能直接出厂$\}$, $B_2=\{$仪器需经调试后能出厂$\}$

则一台仪器能出厂的概率为

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)$$

$$=0.7\times1+0.3\times0.8=0.94$$ 6 分

所以，n台仪器能出厂的概率为 0.94^n 8 分

三、解：(1) $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)$

当 $y\le0$ 时，$F_Y(y)=0$； 2 分

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(-y\le X\le y)=F_X(y)-F_X(-y)$

$$\Rightarrow\quad f_Y(y)=f_X(y)+f_X(-y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

综上知：$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\le0.\end{cases}$ 6 分

(2). 因为 X 和 Y 相互独立，

且 $E(X-Y)=E(X)-E(Y)=4$, $D(X-Y)=D(X)+D(Y)=16$

$\Rightarrow Z = X - Y \sim N(4,16)$ 9分

所以，$P(X < Y) = P(X - Y < 0) = F_Z(0) = \Phi(\frac{0-4}{4}) = 1 - \Phi(1) = 0.1587$ 12分

四、解：X与Y的边缘分布律分别为：

X	-1	0	1
P	3/8	1/4	3/8

Y	-1	0	1
P	3/8	1/4	3/8

1) $\because$ $E(X) = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 0$, $E(Y) = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 0$,

$E(XY) = -1 \times (-1) \times \frac{1}{8} + (-1) \times 1 \times \frac{1}{8} + 1 \times (-1) \times \frac{1}{8} + 1 \times 1 \times \frac{1}{8} = 0$

$\Rightarrow$ $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

所以，X与Y不相关 7分

2) $\because P(X = -1, Y = -1) = 1/8 \neq P(X = -1)P(Y = -1) = 9/64$

所以，X与Y不独立 10分

五、1) $\because$ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ $\therefore \frac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$

$P\{\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.04\} = P\{\frac{15S^2}{\sigma^2} \leq 15 \times 2.04\} = 1 - P\{\frac{15S^2}{\sigma^2} > 30.6\}$

$= 1 - 0.01 = 0.99.$ 8分

2) $\because D(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}) = 2(n-1)$，$n = 16$，$\sigma^2 = 1$

$\Rightarrow$ $D(15S^2) = 30$ $\Rightarrow$ $D(S^2) = \frac{2}{15}$ 10分

六、解：由题意　H_0：$\mu=0.44$　　H_1：$\mu\neq 0.44$

检验统计量　$t=\dfrac{\overline{X}-0.44}{S/\sqrt{25}}$　　3分

拒绝域　$|t|\geq t_{0.025}(24)=2.0639$　　5分

因为　$|t|=\left|\dfrac{0.4-0.44}{\sqrt{0.11^2}/\sqrt{25}}\right|=\dfrac{0.2}{0.11}<2.0639$

所以接受原假设H_0　　8分

七、解：矩估计　$E(X)=\theta^2+4\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta$

$$\overline{x}=\frac{1}{6}(2+1+3+2+1+3)=2$$

令　$E(X)=\overline{x}$　得：$3-2\theta=2\ \Rightarrow\ \hat{\theta}=\dfrac{1}{2}$　　5分

最大似然估计　$L(\theta)=[\theta^2\times 2\theta(1-\theta)\times(1-\theta)^2]^2=4\theta^6(1-\theta)^6$

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+6\ln(1-\theta)\ \Rightarrow\ \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{6}{1-\theta}=0$$

$$\Rightarrow\ \hat{\theta}=\frac{1}{2}$$　　10分

《概率论与数理统计》

院(系)__________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

备用分位点:

$t_{0.025}(15)=2.1315, t_{0.05}(15)=1.7531, \chi^2_{0.025}(15)=27.488, \chi^2_{0.975}(15)=6.262$

得分

一、填空题（42 分，每格 3 分）

1.设 A,B,C 为三个事件，则 A 发生但 B,C 均不发生可表示为 $A\bar{B}\bar{C}$

2. 已知 $P(B|A)=P(B), P(A)=P(B)=1/3$,则 $P(B-A)=$ $\frac{2}{9}$

$P(AB)=\frac{1}{9}$ $\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$ $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}$

3. 设 $X\sim b(100,0.1)$,由中心极限定理有 $P\{X>10\}\approx$ 0.5

4. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P\{X\le\mu-3\}=1/5$,则 $P\{|X-\mu|\le 3\}=$ $\frac{3}{5}$

$X-\mu\le -3$

5. 设 X 与 Y 独立，$X\sim N(1,4)$，$Y\sim\pi(4)$ 的泊松分布，则

$D(X-2Y+1)=$ 20 ； $X+2\sim$ $N(3,4)$.

6. 已知随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

则 $P(X\le 1)=$ $\frac{3}{4}$ ； $E(X)=$ 1

7.设 $X\sim U(0,1)$,令 $Y=X^2$，则 Y 的密度函数为 $f_Y = \begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}} & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 且 $E(Y)=$ $\frac{1}{3}$

8.设 X_1,X_2,X_3 是来自正态总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,则 $\frac{X_2^2+X_3^2}{\sigma^2}\sim$ $\chi^2(2)$,

$2\frac{X_1^2}{X_2^2+X_3^2}\sim$ $F(1,2)$.

9. 设总体 $X\sim\pi(1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自 X 的样本，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$ 的联合概率分

33

布律为 $p(X_1,X_2,X_3\cdots X_{10})=\frac{e^{-10}}{X_1!\cdots X_{10}!}$；$\sum_{i=1}^{10}X_i\sim \pi(10)$

得 分

二、设随机变量 $X\sim N(1,9)$，$Y\sim N(0,16)$，相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

求：(1) 随机变量 Z 的期望 $E(Z)$ 与方差 $D(Z)$；

(2) 随机变量 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}.（8 分）

解：(1) $E(Z)=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$.

$D(Z)=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2Cov(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})$

$=\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+\frac{1}{3}\times(-6)=3$.

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{2}$,

$Cov(X,Y)=-\frac{1}{2}\cdot 3\times 4=-6$.

(2) $\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=\frac{Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=0$.

$Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=Cov(X,\frac{X}{3})+Cov(X,\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$

$=\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{2}(-6)=0$.

得 分

三、设有 100 件相同的产品，其中 70 件是甲厂生产的；20 件是乙厂生产的；10 件是丙厂生产的。已知这三个厂的产品不合格率依次为 0.1,0.2,0.3，现从中任取一件。(1) 问取到不合格品的概率是多少？(2) 设取到的是不合格品，问它是由甲厂生产的概率是多少？（10 分）

设求取到不合格品概率为 $p(B)$，在甲厂中找到的概率为

解：(1) $p(B)=\frac{C_{70}^{1}\times 0.1}{C_{100}^{1}}+\frac{C_{20}^{1}\times 0.2}{C_{100}^{1}}+\frac{C_{10}^{1}\times 0.3}{C_{100}^{1}}$

$=0.7\times 0.1+0.2\times 0.2+0.1\times 0.3$

$=0.07+0.04+0.03$

$=0.14$.

(2) $p=\frac{p2}{pB}=\frac{0.04}{0.14}=\frac{2}{7}$

得 分

四、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0\le x\le\pi\\ 0 & 其它\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y 的分布律及其数学期望.（8 分）

解：

$P(X>\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = \sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{1}{2}.$

Y	0	1	2	3	4
p	$(\frac{1}{2})^4$	$C_4^1(\frac{1}{2})^4$	$C_4^2(\frac{1}{2})^4$	$C_4^3(\frac{1}{2})^4$	$(\frac{1}{2})^4$
	$=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

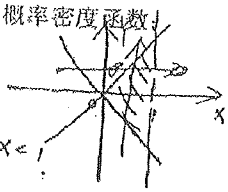
$E(Y)=\frac{1}{4}+\frac{6}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=2.$

得 分

五、设 (X,Y) 的联合密度函数为

$f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,\ 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$，求：(1) $P\{X<1/2\}$；(2)边缘概率密度函数；

(3) 协方差 $COV(X,Y)$；(4) 判断 X 和 Y 的独立性和相关性.（12 分）



解：(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1\,dy & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1}1\,dx & -1<y<0\\ \int_{y}^{1}1\,dx & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}1+y & -1<y<0\\ 1-y & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

(1) $P(X<\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}f_X(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,dx=\frac{1}{4}$

(3) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\iint xy f(x,y)\,dx\,dy-E(X)\cdot E(Y)=0$

$E(Y)=\int_{-1}^{0}y(1+y)\,dy+\int_0^1 y(1-y)\,dy=\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{0}+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big|_0^1=0.$

$\because E(X)\cdot E(Y)=0$，$E(XY)=0$，$\therefore X,Y$ 独立，不相关

E(X) 为 2θ.

得 分

六、设总体X具有概率密度$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自$X$的样本. （1）求参数$\theta$的矩估计量；（2）求参数$\theta$的最大似然估计量；（3）问求得的估计量是否是无偏估计量？（12分）

解：(1). $E(X)=\mu_1=$

$=-2\theta$.

$\theta=\frac{E(X)}{2}=\frac{\bar{X}}{2}$ $\quad E(X)=2\theta$.

$E(\hat\theta)=\frac{\bar{X}}{2}=\theta$ ∴无偏.

(2) $\prod_{i=1}^{n}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta^2}x_ie^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^{2n}}x_1\cdots x_n\cdot e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}}$

$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+(-\frac{\sum x_i}{\theta})$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0$.

$\frac{2n}{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}$

$\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2n}=\frac{E(X)}{2}=\frac{\bar{X}}{2}$ $\quad \hat\theta=\frac{\sum x_i}{2n}=\frac{\bar{X}}{2}$

得 分

七、设某种元件的寿命X（以小时计）服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，现测得16只元件的寿命，计算得$\bar{x}=241.5, s=30$，（1）求σ^2的置信度为95%的置信区间；（2）在显著性水平$\alpha=0.05$下，问是否有理由认为元件的平均寿命大于225(小时)（8分）

解：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

置信区间 $\left(\frac{(n-1)S^2}{t_{\alpha/2}(n-1)};\frac{(n-1)S^2}{t_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

① $H_0: \mu>\mu_0 \quad H_1: \mu\le\mu_0$.

② 找不[illegible]统计量

$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

③ 拒绝域 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\le -t_\alpha(n-1)=-1.7531$

④ 计算 $\frac{241.5-225}{30/4}=$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

《概率论与数理统计》

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、填空题（共42分，每格3分）

1. 设A、B、C表示三个事件，则“三个事件中恰好有一个发生”表示为 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$

2. 已知 $P(A)=0.6, P(\bar{B})=0.8$，且A与B具有包含关系，则 $P(A\bar{B})=$ 0.4

$\int_0^3 e^{-x}dx = 1-e^{-3}$

3. 已知随机变量 X 服从参数为 $\theta=1$ 的指数分布，则 $P(0<X\le 3)=$ $1-e^{-3}$

4. 已知 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(-2,1)$，$Y\sim N(1,2)$，则 $D(X-2Y+7)=$ 9

5. 已知 X 与 Y 相互独立，$X\sim B(2,0.6)$，$Y\sim B(3,0.6)$，则 $X+Y\sim$ $B(5,0.6)$

6. 设 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(0<X<4)=0.6$，则 $P(X<0)=$ 0.2

7. 已知 $D(X)=2, D(Y)=7, D(X-Y)=12$，则 $Cov(X,Y)=$ $-3/2$

8. 设随机变量X的期望为 μ，方差为 σ^2，则 $P(|X-\mu|\ge 3\sigma)\le$ 1/9

9. 设 $X\sim B(200,0.35)$，则由中心极限定理，$P(X\le 70)\approx$ 1/2

10. 设随机变量 $T\sim t(3)$ 则随机变量 $\frac{1}{T^2}\sim$ $F(3,1)$

11. 设总体 $X\sim\chi^2(6)$，$X_1,\cdots,X_4$ 是来自总体的一组样本，

则 $D(\bar{X})=$ 3，$E(S^2)=$ 12

12. 设总体 $X\sim\pi(\lambda)$；$X_1,\cdots,X_n$ 为其样本，则当 $\alpha=$ 2 时，

$\hat{\lambda}=(\alpha-1)\bar{X}+(4-2\alpha)S^2$ 是未知参数 λ 的无偏估计。

13. 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 其中 $\mu_i, \sigma_i^2 (i=1,2)$ 均未知，$X_1, \cdots, X_{n_1}$ 是来自总体 X 的样本，$Y_1, \cdots, Y_{n_2}$ 是来自总体 Y 的样本，S_1^2, S_2^2 分别是两总体的样本方差，两样本相互独立，则 σ_1^2 / σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

得 分

二、设有 100 件相同的产品，其中 60 件甲厂(A_1)生产；25 件乙厂(A_2)生产，15 件丙厂(A_3)生产。已知三厂的次品率为 0.1，0.3，0.2，

（1）从中任取一件产品，求它是次品(B)的概率；

（2）如果任取一件发现是次品，求该产品是丙厂生产的概率。（10 分）

(1) $P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$= 0.6 \times 0.1 + 0.3 \times 0.25 + 0.2 \times 0.15$　　6′

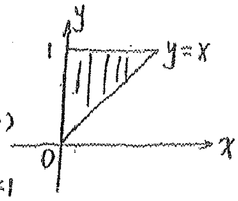
$= 0.165$

(2) $P(A_3|B) = \dfrac{P(A_3) \cdot P(B|A_3)}{P(B)}$　　4′

$= \dfrac{0.2 \times 0.15}{0.165} = \dfrac{2}{11}$

得 分

三、设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0<x<y, 0<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$



问：(1) X 与 Y 是否独立？(2) X 与 Y 是否相关？（10 分）

(1) $\because f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_x^1 2\,dy = 2(1-x) & 0<x<1 \\ 0 & 否则 \end{cases}$　　2′

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^y 2\,dx = 2y & 0<y<1 \\ 0 & 否则 \end{cases}$　　2′

$\therefore f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$，$\therefore X$ 与 Y 不独立　　1′

(2) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2(1-x)dx = \frac{1}{3}$　　1′

$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_0^1 y \cdot 2y\,dy = \frac{2}{3}$　　1′

$EXY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)dxdy = \int_0^1 x\,dx \int_x^1 y \cdot 2dy = \frac{1}{4}$　　2′

$\therefore Cov(X,Y) = EXY - EX \cdot EY = \frac{1}{36}$　　1′

得分

四、(1) 已知随机变量 X 服从 $N(0,1)$，求 $Y=e^X$ 的概率密度函数；

(2) 已知随机变量 $K\sim U(0,4)$，求关于 x 的方程 $4x^2-4Kx+2K+3=0$ 无实根的概率。 (12分)

(1) $x=\ln y \quad \therefore dx/dy=\frac{1}{y}$

$\therefore Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\ln y)\cdot\frac{1}{y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$ 3'

$=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\cdot\frac{1}{y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$ 3'

(2) $\Delta=16K^2-4\cdot4(2K+3)<0 \Rightarrow -1<K<3$ 3'

所求概率为 $P\{-1<K<3\}$ 3'

得分

五、设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数。利用总体 X 的如下样本值 3，2，1，2，1，3，求参数 θ 的矩估计值和最大似然估计值。(10分)

(1) $EX=\theta^2+2\cdot2\theta(1-\theta)+3\cdot(1-\theta)^2=3-2\theta$ 3'

$\overline{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=2$ 1'

令 $EX=\overline{x}$ 得 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}$ 1'

(2) $L(\theta)=(\theta^2)^2\cdot(2\theta(1-\theta))^2\cdot((1-\theta)^2)^2=4\theta^6\cdot(1-\theta)^6$ 3'

$\ln L(\theta)=\ln4+6\ln\theta+6\ln(1-\theta)$ 1'

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{6}{1-\theta}\overset{令}{=}0 \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{1}{2}$ 1'

得分

六、设在总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取一容量为 17 的样本，其中 μ,σ^2 均未知，S^2 是样本方差。(1) 求 $P(S^2/\sigma^2 \le 1.8028)$；($\chi^2_{0.025}(16)=28.845$)

(2) 当 $\sigma^2=1$ 时，求 $D(S^2)$。 (8分)

$\frac{16S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(16)$ 2′

(1) $P\{\frac{S^2}{\sigma^2} \le 1.8028\} = P\{\frac{16S^2}{\sigma^2} \le 16\times 1.8028\}$ 2′

$= 1-P\{\chi^2(16) > 28.8448\} = 1-0.025 = 0.975$

(2) ∵ $\frac{16S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(16)$

∴ $D(\frac{16S^2}{\sigma^2}) = 32$ 2′ $\Rightarrow DS^2 = \frac{32\times\sigma^4}{16^2} = \frac{1}{8}$ 2′

得分

七、一种矿石中某种元素的含量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，但均值方差都未知。测定容量为 16 的样本，计算得 $\bar{x}=0.4$，$s^2=0.0925^2$，试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验：(1) $H_0:\mu=0.49$，$H_1:\mu\ne 0.49$；

(2) $H_0:\sigma^2 \le 0.1^2$，$H_1:\sigma^2>0.1^2$。

($\chi^2_{0.025}(15)=27.488$，$\chi^2_{0.05}(15)=24.996$，$t_{0.025}(15)=2.132$，$t_{0.05}(15)=1.753$) (8分)

(1) $H_0: \mu=0.49$, $H_1: \mu\ne 0.49$ 1′

取检验统计量 $t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 1′

拒绝域 W: $|t| \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(15) = 2.132$ 1′

代入测量值计算得 $|t| = 3.892$ 1′

∴ 拒绝 H_0

(2) $H_0: \sigma^2 \le 0.1^2$, $H_1: \sigma^2 > 0.1^2$ 1′

取检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 1′

拒绝域 W: $\chi^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1) = \chi^2_{0.05}(15) = 24.996$ 1′

$n=16$, $\sigma_0^2=0.1^2$, $S^2=0.0925^2$ 代入得 $\chi^2=12.834$

∴ 接受 H_0 1′

装订线内不要答题
自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

《概率论和数理统计》

学院__________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

备用数据：$\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(2)=0.9772$；$t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.05}(15)=1.7531$，$F_{0.025}(8,5)=6.76$，$F_{0.025}(5,8)=4.82$

得分

一、填空题（共 45 分，每格 3 分）

1．设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.8$，$P(AB)=0.3$，则 $P(A\bar{B})=$ 0.5

2．10 件产品中有 4 件次品,从中任意取 2 件,则第 2 件为次品的概率为 2/5

3．设随机变量 X 在区间 $(0,2)$ 上服从均匀分布，则 $y=2X+1$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{4} & 1<y<5 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

4．设 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le z_{0.025})=$ 0.975

5．设随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)(\sigma>0)$，且 $P(0<X<4)=0.6$，则 $P(X\ge 4)=$ 0.2

6．设随机变量 (X,Y) 的方差 $D(X)=4$，$D(Y)=1$，相关系数 $\rho_{XY}=0.6$，则 $\mathrm{cov}(X,Y)=$ 1.2

$P\{|X-2|\le 2\}\ge \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

7．设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，则应用切比雪夫不等式估计得 $P\{|X-2|\ge 2\}\le$ $\frac{1}{2}$

$P\{|X-2|\ge 2\}\le 1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

8．在 n 重贝努里试验中，设 N_A 为事件 A 发生的次数，每次试验事件 A 发生的概率为 $P(A)=p$，则（1）$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{N_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=$ 1，（2）用中心极限定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{1<\frac{N_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le 2\}=$ 0.1359

大数定律

9．设 $X_1,\cdots,X_{16}$ 是取自正态总体 $N(0,9)$ 的样本，则 $P(\bar{X}>\frac{3}{4})=$ 0.1587

10．已知 $T\sim t(6)$，则 $T^2\sim$ F(1,6)

11．设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $X\sim N(0,4)$ 的样本，则当 $a=\frac{1}{20}$ 时，$Y=a(X_1+2X_2)^2+a(X_3-2X_4)^2\sim\chi^2(2)$.

12．总体 X 服从 $\chi^2(8)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 是来自该总体的样本，则 $D(\bar{X})=$ $\frac{16}{100}$

13．设总体 X 服从 $N(\mu,4)$，μ 未知，则样本容量为 n 的总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$

的置信区间的单侧的上限为 $\bar{X}+\frac{2}{\sqrt{n}}z_\alpha$

14. 设矿石中某种元素含量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。现取出容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，在显著性水平 α 下，对于检验问题 $H_0:\sigma^2=0.25$；$H_1:\sigma^2\neq0.25$，所用的检验统计量为 $\frac{(n-1)S^2}{0.25}$

得 分

二、将两信息分别编码为 A 和 B 传递出去，接收站收到时，A 被误收作为 B 的概率是 0.05，而 B 误收作为 A 概率是 0.02；信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2:1，求：（1）接收站收到的信息是 A 的概率；（2）若接收站收到的信息是 A，问原发信息也是 A 的概率是多少？（10 分）

$$P(A)=\frac{2}{3}\times0.95+\frac{1}{3}\times0.02$$

$$P(发A|A)=\frac{\frac{2}{3}\times0.95}{\frac{2}{3}\times0.95+\frac{1}{3}\times0.02}=\frac{95}{96}$$

得 分

三、已知连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leq0\\ A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\end{cases}$，

求：(1) 常数 A,B 的值；(2) 随机变量 X 的密度函数 $f(x)$；(3) $P\left(\sqrt{2}<X<2\right)$ （10 分）

① $A=1$ $B=-1$

② $f(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}} & x>0\\ 0 & x\leq0\end{cases}$

③ $P(\sqrt{2}<X<2)=F(2)-F(\sqrt{2})=e^{-1}-e^{-2}$

得分

四、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从标准正态分布，求随机变量 $Z=X^2+Y^2$ 的分布函数。（7 分）

$$F(z)=P(X^2+Y^2\le z)$$

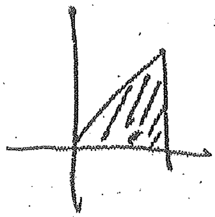
$$=\begin{cases}\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-\frac{z}{2}}\\ 0\end{cases}$$

得分

五、已知二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0<y<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$，（1）求边缘密度函数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，并判断 X,Y 的独立性．（2）计算 $\mathrm{cov}(X,Y)$（10 分）



得分

六、设总体X服从$X \sim f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，据来自总体$X$的简单随机样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，（1）求参数$\theta$的最大似然估计；（2）问它是否是无偏的？（10分）

$x>0$

$x\le 0$

得分

七、 两台机床加工同一种零件，分别取6个和9个零件测量其长度，计算得$S_1^2=0.345, S_2^2=0.357$，假设零件长度服从正态分布，问：是否认为两台机床加工的零件长度的方差有无显著差异（取显著水平$\alpha=0.05$）？（8分）

$H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2 \quad H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

$\frac{S_1^2}{S_2^2}$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

《概率论与数理统计》

学院____________ 班级__________ 学号______________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得分								

装订线内不要答题

备用数据：$z_{0.025}=1.96$，$\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(2)=0.9772$；$t_{0.025}(15)=2.1315$，
$t_{0.05}(15)=1.7531$，$\chi^2_{0.025}(15)=27.488$, $\chi^2_{0.05}(15)=24.996$，
$\chi^2_{0.95}(15)=7.261$, $\chi^2_{0.975}(15)=6.262$

得 分

一、填空题（共 45 分，每格 3 分）

1、事件 A，B，C 中恰好有一个发生可表示为 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$

2、设 A，B 是两个事件，且 $P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.6$，则 $P(A\overline{B})=0.3$；

3、若事件 A 与事件 B 互不相容，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

4、设随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)(\sigma>0)$，且 $P(0<X<4)=0.6$，则 $P(X\geq 4)=0.2$

5、设随机变量 X 与 Y 相互独立都服从参数 $\lambda=0.5$ 的指数分布，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分

布函数为 $F(z)=\begin{cases}1-e^{-z} & z>0\\ 0 & z\leq 0\end{cases}$

6、随机变量 X 服从正态分布 $N(-1,4)$，则 $E(2X^2-3)=7$

7、设 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leq z_{0.025})=0.975$

8、设 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x, 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 则 $\rho_{XY}=0$

9、设总体 $X\sim N(\mu,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是简单随机样本，则 $D(\overline{X})=\dfrac{1}{n}$

10、设 $X_1,\cdots X_{16}$ 是取自正态总体 $N(0,9)$ 的简单随机样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，

则 $P\{\overline{X}>\dfrac{3}{4}\}=0.1587$ $E(S^2)=9$

11．已知$F\sim F(10,6)$，则$\frac{1}{F}\sim F(6,10)$；已知$T\sim t(n)$,则$T^2\sim F(1,n)$

12． 设总体X服从$N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2未知，则样本容量为n 的总体方差σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

13．设矿石中某种元素含量服从正态分布$N(\mu,1)$。现测定容量为n的样本$X_1,X_2,\cdots X_n$，试在显著性水平α下，检验$H_0:\mu=9,H_1:\mu\neq 9$时，所用的检验统计量为$\frac{\overline{X}-9}{1/\sqrt{n}}$

得 分

二、将两信息分别编码为A和B传递出去，接收站收到时，A被误收作为B的概率是0.02，而B误收作为A概率是0.01，信息A与信息B传送的频繁程度为2:1，求：（1）接收站收到的信息是A的概率；（2）若接收站收到的信息是A，问原发信息也是A的概率是多少？（8分）

解：$P(收A)=P(发A)P(收A|发A)+P(发B)P(收A|发B)$ 3分

$$=\frac{2}{3}\times 0.98+\frac{1}{3}\times 0.01=\frac{197}{300}$$ 2分

$$P(发A|收A)=\frac{P(发A)P(收A|发A)}{P(收A)}$$ 2分

$$=\frac{2}{3}\times 0.98/\frac{197}{300}=\frac{196}{197}$$ 1分

得 分

三、（1）设$X\sim N(0,1)$，求$Y=|X|$的概率密度。

（2）设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(0,0.3^2),Y\sim N(0,0.4^2)$。求随机变量$Z=X-Y$的密度函数和概率$P(X-Y\le 0.5)$；（10分）

解： （1） $f_Y(y)=\begin{cases}|h'(y)|f_X(h(y)) & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

而$X=h(y)=\pm y$ 2分

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$ 2分

（2） $Z\sim N(0,0.5^2)$ 2分

$f(z)=\frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2\times0.5^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-2z^2}$ 1分

$P(X-Y\le0.5)=P(Z\le0.5)=P(\frac{Z-0}{0.5}\le1)=\Phi(1)=0.8413$ 3分

得 分

四、 已知 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2 & 0<y<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$，(1) 求边缘密度函数

$f_X(x)$，$f_Y(y)$，并判断 X,Y 的独立性. (2) 求 $\operatorname{cov}(X,Y)$，并判断 X,Y 是否相关.
（10 分）

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_0^x 12y^2dy=4x^3 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 2分

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_y^1 12y^2dx=12y^2(1-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 2分

因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$ 所以 X 与 Y 不独立 1分

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x\times4x^3dx=\frac{4}{5}$ 1分

$E(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 y\times12y^2(1-y)dy=\frac{3}{5}$ 1分

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{2}$ 1分

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{50}$ 1分

所以 X 与 Y 相关 1分

得 分

五、 欲测量两地之间的距离，限于测量工具，将其分成1200段进行测量. 设每段测量误差(单位：千米)相互独立，且均服从区间$(-0.5, 0.5)$上的均匀分布，试求总距离测量误差的绝对值不超过 20（千米）的概率.（用中心极限定理）(7 分)

令 $X=\sum_{i=1}^{1200} X_i \qquad E(X)=E(\sum_{i=1}^{1200} X_i)=0$ 1 分

$$D(X)=D(\sum_{i=1}^{1200} X_i)=\frac{1200}{12}=100$$ 2 分

$$P(|\sum_{i=1}^{1200} X_i|\le 20)=P(\frac{|\sum_{i=1}^{1200} X_i|}{10}\le 2)\approx\Phi(2)-\Phi(-2)=0.9544$$ 4 分

得 分

六、设总体X服从$X\sim f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，据来自总体$X$的简单随机样本$X_1, X_2, \cdots X_n$，(1)求参数$\theta$的最大似然估计；(2)问它是否是无偏的？（10 分）

$$L=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\begin{cases}\frac{2^n}{\theta^n}x_1\cdots x_n e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/\theta} & x_1>0,\cdots x_n>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 3 分

$$\ln L=n\ln 2-n\ln\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta}$$

令 $\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta^2}=0$ 2 分

解得: $\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

所以θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 1 分

$E(\hat{\theta}_L)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\frac{2}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\theta$ 2 分

$\hat{\theta}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是θ无偏估计量 2 分

得分

七、设矿石中某种元素含量服从正态分布，但均值和方差均未知。现测定容量为 16 的样本，计算得 $\overline{x}=0.4, s^2=0.0324$，试在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，（1）检验期望是否为 0.49；（2）检验方差是否为 0.1？（10 分）

（1）$H_0:\mu=0.49 \leftrightarrow H_1:\mu\neq 0.49$ 1 分

（2） 检验统计量：$\dfrac{\overline{X}-0.49}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 1 分

（3）拒绝域： $|\dfrac{\overline{x}-0.49}{s/\sqrt{n}}|\geq t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.1315$ 1 分

(4)计算：$|\dfrac{0.4-0.49}{0.18/4}|=2<2.1315$ 没有落到拒绝域中 1 分

（5）结论：接受 H_0，即认为期望等于 0.49 1 分

（1）$H_0:\sigma^2=0.1 \leftrightarrow H_1:\sigma^2\neq 0.1$ 1 分

（2） 检验统计量：$\dfrac{(n-1)S^2}{0.1}\sim \chi^2(n-1)$ 1 分

（3）拒绝域：$\dfrac{(n-1)S^2}{0.1}\geq \chi^2_{0.025}(15)=24.996$ 或 $\dfrac{(n-1)S^2}{0.1}\leq \chi^2_{0.975}(15)=6.262$

1 分

(4)计算 $\dfrac{15\times 0.0324}{0.1}=4.86<6.262$ 落在拒绝域中 1 分

（5）结论：拒绝 H_0，即认为方差不等于 0.1 1 分

得分

附加题：（10 分）

设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}1 & \theta-\dfrac{1}{2}\leq x\leq \theta+\dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{其它}\end{cases} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

证明 $\overline{X}$ 和 $\dfrac{1}{2}(\min\limits_{1\leq i\leq n}X_i+\max\limits_{1\leq i\leq n}X_i)$ 都是 θ 的无偏估计；

证明 $E(X)=\int_{\theta-1/2}^{\theta+1/2}xdx=\theta$

$E(\overline{X})=E(X)=\theta$ 所以，它是 θ 无偏估计 2 分

X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le\theta-\frac{1}{2}\\ x-\theta+\frac{1}{2} & \theta-\frac{1}{2}\le x<\theta+\frac{1}{2}\\ 1 & x\ge\theta+\frac{1}{2}\end{cases}$$ 1 分

$F_{\max}(x)=F^n(x)$ $\quad F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^n$

$$f_{\min}(x)=\begin{cases}n[1-F(x)]^{n-1} & \theta-\frac{1}{2}\le x<\theta+\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 1 分

$$f_{\max}(x)=\begin{cases}n[F(x)]^{n-1} & \theta-\frac{1}{2}\le x<\theta+\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 1 分

$$E(\min_{1\le i\le n}X_i)=\int_{\theta-1/2}^{\theta+1/2}nx(\theta+\frac{1}{2}-x)^{n-1}dx=\theta-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}$$ 2 分

$$E(\max_{1\le i\le n}X_i)=\int_{\theta-1/2}^{\theta+1/2}nx(x-\theta+\frac{1}{2})^{n-1}dx=\theta+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$ 2 分

$E[\frac{1}{2}(\min_{1\le i\le n}X_i+\max_{1\le i\le n}X_i)]=\theta$ 是 θ 无偏估计 1 分

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

《概率论和数理统计》

学院________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得分								

得 分

一、填空题（共 42 分，每格 3 分）：（特别提醒：$\Phi(1.96)=0.975$）

1. 设 A,B 为两个事件，$P(AB)=0.2, P(A)=0.6$，则$P(A\overline{B})=0.4$

2. 已知随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

3. 则 $P(X\le 1)=3/4$；$E(X)=1$

4. 设 $X_1,\cdots,X_{100}$ 来自总体 N(0,1)，则 $P(\overline{X}<0.196)=0.975$；

5. 设 $X\sim f(x)=\begin{cases}A\cos x & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & 其它\end{cases}$，则 $A=1/2$；$P(0<X<\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

6. 已知随机变量 X 服从指数分布，且 $EX=\dfrac{1}{2}$，则 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

7. 设区域 D 由 $y=\dfrac{1}{x}, y=0, x=1, x=e^2$ 所围，(X,Y) 在 D 上服从均匀分布，则 X 的

8. 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (x,y)\in D\\ 0 & 其它\end{cases}$ 边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & 1<x<e^2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

9. 设随机变量 X 的均值为 μ，方差为 σ^2，则 $P(|X-\mu|\ge 3\sigma)\le\dfrac{1}{9}$

10. 设 $X_1,\cdots X_{10}$ 是取自总体为两点分布 $b(1,p)$ 的简单随机样本，则 $D(\overline{X})=\dfrac{p(1-p)}{10}$

11.已知$F \sim F(10,20)$，则$\frac{1}{F} \sim F(20,10)$

12.设总体X服从正态分布，$N(\mu,\sigma^2)$，X_1,X_2,X_3为其样本，则当常数$a=\frac{1}{3}$时，$\hat{\mu}=aX_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{6}X_3$是未知参数$\mu$的无偏估计。

13. 设总体X服从$N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，则样本容量为n 的总体均值μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$

得 分

二、某年级有甲、乙、丙三个班级，各班人数分别占年级总人数的 1/3, 1/3 , 1/3，已知甲、乙、丙三个班级中集邮人数分别占该班总人数的 1/2, 1/4, 1/3，试求：(1) 从该年级中随机地选取一人，此人为集邮者的概率；(2) 从该年级中随机地选取一人，发现此人为集邮者，此人属于乙班的概率。(8 分)

A=" 从该年级中随机地选取一人，此人为集邮者"

$B_i(i=1,2,3)$表示分别从甲、乙、丙三个班级的学生。

(1) $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{36}$　　5 分

(2) $P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{3}{13}$　　3 分

得 分

三、玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.8 , 0.15,0.05 。一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，顾客开箱随机地察看 2 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回，试求：(1) 顾客买下该箱的概率 ；
(2) 在顾客买下的一箱中：确实没有残次品的概率。(10 分)

A 表示"顾客买下该箱"这一事件；$B_i(i=0,1,2)$表示该箱中含有 i 只残次品

$$P(A|B_0)=\frac{C_{20}^4}{C_{20}^4}=1；\ P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}；\ P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}$$

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)$$

$$0.8\times 1+0.15\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.05\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=0.9516$$

$$P(B_0\mid A)=\frac{P(AB_0)}{P(A)}=\frac{0.8}{0.9516}=0.8407$$

得 分

四、设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(1) 求随机变量(X,Y)关于X和Y的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$；

(2) 判断随机变量X与Y是否相互独立？（8分）

（1）

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad 3\text{分}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx & -1<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & -1<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad 3\text{分}$$

（2）

因为$f(x,y)\ne f_x(x)f_Y(y)$　所以X与Y不独立　　2分

得 分

五、设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(16,32),Y\sim N(8,32)$：(1) 求随机变量$Z=X-Y$的密度函数；(2) 求概率$P(X>Y)$。（8分）

$Z\sim N(8,64)$　　2分

$$f(z)=\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-8)^2}{2\times 64}}=\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-8)^2}{128}}\qquad 2\text{分}$$

$$P(X-Y>0)=P\left(\frac{Z-8}{8}>\frac{0-8}{8}\right)=1-\Phi(-1)=0.8413\qquad 4\text{分}$$

得 分

六、设总体X的概率分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta(0<\theta<1)$是未知参数，利用总体X的如下样本值 2，1，3；求θ矩估计值和最大似然估计值。（10 分）

$E(X)=\theta^2+4\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta$ 2 分

$\bar{x}=2$ 1 分

令 $E(X)=\bar{x}=2$ 1 分

解得 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}$ 为矩估计值 1 分

$L(\theta)=P(X_1=2)P(X_2=1)P(X_3=3)$

$=2\theta(1-\theta)\times\theta^2\times(1-\theta)^2$

$=2\theta^3(1-\theta)^3$ 2 分

$\ln(L)=\ln 2+3\ln\theta+3\ln(1-\theta)$ 1 分

令 $\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{3}{1-\theta}=0$ 1 分

解得 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}$ 为最大似然估计值 1 分

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得 分

七、已知某厂生产的灯泡寿命服从$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ和σ^2未知，现随机抽取 16 只进行测试，测得它们的平均寿命为：$\bar{x}=1800$小时，样本标准差为：$S=400$。（1）问在显著水平$\alpha=0.05$下，能否认为这批灯泡的平均寿命为 2000 小时；（2）试在显著水平$\alpha=0.05$下，检验假设

$$H_0:\ \sigma^2\le 300^2,\quad H_1:\ \sigma^2>300^2$$

解：（1）$H_0:\mu=2000\leftrightarrow H_1:\mu\ne 2000$ 1 分

（2） 检验统计量：$\frac{\bar{X}-2000}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 1 分

（3）拒绝域： $\left|\frac{\bar{x}-2000}{s/\sqrt{n}}\right|\ge t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.1315$ 1 分

(4)计算：$\left|\dfrac{1800-2000}{400/4}\right|=2<2.1315$ 没有落到拒绝域中 1分

（5）结论：接受 H_0，即认为期望等于2000 1分

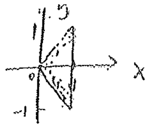
（1）$H_0:\sigma^2\le 300^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2>300^2$ 1分

（2） 检验统计量：$\dfrac{(n-1)S^2}{300^2}$ 1分

（3）拒绝域：$\dfrac{(n-1)S^2}{300^2}\ge \chi^2_{0.025}(15)=24.996$ 1分

(4)计算 $\dfrac{15\times 400^2}{300^2}=26.67>24.996$ 落到拒绝域中 1分

（5）结论：拒绝 H_0，即认为方差大于 90000 1分



$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}1\,dx = 1, & -1<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$E(Y)=\int_{-1}^{1} y\,dy = 0$

$E(Y^2)=\int_{-1}^{1} y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)$

$E(XY)=\iint_D xy f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xy\,dy$

$=0$

$Cov(X,Y)=0$

《概率论和数理统计》

院(系)__________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、填空题（共 39 分，每格 3 分）

1. 事件 A，B，C 中恰好有一个发生可表示为 $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$

2. 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}$，若 $P(AB)=\frac{1}{8}$，则 $P(A\bar{B})=$ $\frac{3}{8}$；

$P(B|A)=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=$

$P(A)\cdot P(B|A)$ $=P(\bar{B}|A)\cdot P(A)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

3. 设三次独立试验中事件 A 发生的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率是 $\frac{19}{27}$，则 $P(A)=$ $\frac{1}{3}$

$X\sim b(3,P(A))$

$P(X\geq1)=1-P(X=0)=1-(1-P(A))^3=$

$(1-P(A))^3=\frac{1}{?}$

$1-P(A)=\frac{2}{3}$

$P(A)=\frac{1}{3}$

4. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)(\sigma>0)$，且 $P(1<X<3)=0.6$，则 $P(X\geq3)=$ 0.2

$P(\frac{1-2}{\sigma}<\frac{X-2}{\sigma}<\frac{3-2}{\sigma})=2\Phi(\frac{1}{\sigma})-1=0.6$

$P(\frac{X-2}{\sigma}\geq\frac{1}{\sigma})$

$=1-\Phi(\frac{1}{\sigma})$

$=1-\frac{1.6}{2}=0.2$

5. 设随机变量 X 在 (0,1) 上服从均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 在（0，1）内的概率密度 $f_Y(y)=$ $\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq1\\ 0, & 其它\end{cases}$ $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\leq x<1\\ 1, & x\geq1\end{cases}$

$\{Y\leq y\}$

$\{X^2\leq y\}$

$\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\}$

$(y\in(0,1))$

6. 设 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

则 $D(Y)=$ $\frac{2}{3}$，$\rho_{XY}=$ 0

7、若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 满足 相互独立，和总体X同分布

则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本。

8、设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是简单随机样本，样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 S^2，则 $E(\bar{X})=$ λ，$D(\bar{X})=$ $\frac{\lambda}{n}$；又已知 $\hat{\lambda}=\alpha\bar{X}+(2-3\alpha)S^2$ 为 λ 的无偏估计量，则 $\alpha=$ $\frac{1}{2}$

$E(\hat{\lambda})=\alpha E(\bar{X})+(2-3\alpha)E(S^2)=\alpha\lambda+(2-3\alpha)\lambda=(2-2\alpha)\lambda=\lambda$ $2-2\alpha=1$ $\alpha=\frac{1}{2}$

9、设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 未知，则样本容量为 n 的总体方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 ($\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$, $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$)

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$

10、设矿石中某种元素含量服从正态分布，但均值和方差均未知。现测定容量为 16 的样本，$\overline{X}, S^2$ 为样本均值和样本方差，试在显著性水平 α 下，检验 $H_0: \mu = 0.49$ 时，所用的检验统计量为 $\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{16}}$

11、设 $X(t), t \ge 0$ 是强度为 2 的泊松过程，且对于任意 $t > s \ge 0$，则 $\lambda(t-t_0)$

$P\{X(1)=2, X(4)=3\} =$ $12e^{-8}$

$P\{X(1)=2 | X(0)=0\} \cdot P\{X(4)=3 | X(1)=2\}$

$= \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \times \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = 2e^{-2} \cdot 6e^{-6} = 12e^{-8}$

12、设 $\{X(t), t \ge 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，其协方差函数 $C_X(s,t) =$ $\sigma^2 \min\{s,t\}$.

13、已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$，则 $S_X(\omega) =$ $\frac{2}{\omega^2+1}$。

得 分

二、一个盒子装有 6 只乒乓球，其中 4 只是新球。第一次比赛时随机地从盒子中取出 2 只乒乓球，使用后放回盒子，第二次比赛时又随机地从盒子中取出 2 只乒乓球。

设 X_1 表示第一次取出的新球数，X_2 表示第二次取出的新球数.

(1) 试求第二次取出的球全是新球的概率；

$\therefore P\{X_2=2\} = P\{X_2=2 | X_1=0\} \cdot P\{X_1=0\} + P\{X_2=2|X_1=1\} \cdot P\{X_1=1\} + P\{X_2=2|X_1=2\} \cdot P\{X_1=2\}$

$= \frac{C_2^2}{C_6^2} \times \frac{C_4^2}{C_6^2} + \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} \cdot \frac{C_3^2}{C_6^2} + \frac{C_4^2}{C_6^2} \cdot \frac{C_2^2}{C_6^2}$

$= \frac{4}{25}$.

(2) 已知第二次取出的球全是新球，试求第一次比赛时取的球恰含一个新球的概率。

$P\{X_1=1 | X_2=2\} = \frac{P\{X_1=1, X_2=2\}}{P\{X_2=2\}} = \frac{P\{X_2=2|X_1=1\} \cdot P\{X_1=1\}}{P\{X_2=2\}}$.

得 分

三、(1) 设 $X \sim N(0,1)$，求 $Z = |X|$ 的概率密度。(5 分) $\frac{2}{3}$

(1) $F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{|X| \le z\} = P\{-z \le X \le z\} = 2\Phi(z) - 1$

$\therefore f_Z(z) = F_Z'(z) = 2\varphi(z) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ $z \ge 0$

(2) 设随机变量 X, Y 相互独立，且 $X \sim N(0, 3^2), Y \sim N(0, 4^2)$。求随机变量 $Z = X - Y$ 的密度函数和概率 $P(X > Y)$；

$\sim N(0, 5^2)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 5} e^{-\frac{z^2}{50}}$

$P(X>Y) = P(X-Y>0)$

$= P(Z>0)$

$= P(\frac{Z}{5}>0)$

$= 1-\Phi(0) = \frac{1}{2}$

得 分

四、设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.1，机器发生故障时全天停止工作。若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万；发生一次故障仍可获利 5 万元；发生二次故障可获利 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元。求一周内期望利润是多少？（12 分）

设 5 个工作日内发生故障的天数为 X，$X \sim b(5, 0.1)$，利润为 Y

$E(Y) = 10 \times P\{X=0\} + 5 \times P\{X=1\} - 2 \cdot P\{X \ge 3\}$.

$= 10 \times (0.9)^5 + 5 \times C_5^1 \times 0.1 \times 0.9^4 - 2[C_5^3 \times 0.1^3 \times 0.9^2 + C_5^4 \times 0.1^4 \times 0.9 + C_5^5 \times 0.1^5]$

$= 7.528$ 万元

得 分

五、已知某厂生产的灯泡寿命服从 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 未知，现随机抽取 16 只进行测试，测得它们的平均寿命为：$\bar{x} = 1800$ 小时，样本标准差为：$S = 400$。(1) 问在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下，能否认为这批灯泡的平均寿命为 2000 小时；　　(2) 试在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，检验假设方差是否显著的有 H_0：$\sigma^2 \le 300^2$，H_1：$\sigma^2 > 300^2$

（已知 $t_{0.01}(15) = 2.60$，$t_{0.005}(15) = 2.95$，$\chi^2_{0.05}(15) = 24.996$，$\chi^2_{0.025}(15) = 27.488$）

(1) $H_0: \mu = 2000$. $H_1: \mu \ne 2000$.

$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$. 即 $t = \frac{\overline{X}-2000}{400/4} \sim t(15)$.

拒绝域：$|t| \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(15) = t_{0.005}(15) = 2.95$.

$|t| = \left|\frac{1800-2000}{100}\right| = 2 < 2.95$ 不在拒绝域内.

$\therefore$ 接受 H_0，即认为这批灯泡的平均寿命为 2000 小时.

(2) $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 即 $\chi^2 = \frac{15S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(15)$.

拒绝域：$\chi^2 \ge \chi^2_\alpha(15) = \chi^2_{0.05}(15) = 24.996$.

$\chi^2 = \frac{15 \times 400^2}{300^2} = 26.667 > 24.996$

在拒绝域内.

$\therefore$ 拒绝 H_0，即认为 $\sigma^2 > 300^2$.

得 分

六、设总体 X 的分布函数为：$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，其中未知参数

$\theta>-1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本。求 θ 的矩估计量和最大似然估计量。(10 分)

$E(X)=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}=\bar{X}$. $\therefore \theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{1-\bar{X}}-2$

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)\cdot X_i^{\theta}=(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)^{\theta}$. $\ln L(\theta)=n\cdot\ln(\theta+1)+\theta\cdot\ln\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\ln\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)=0$ $\Rightarrow \hat{\theta}=\frac{n}{-\ln\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)}-1$

得 分

七、设在正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取一容量为 16 的简单随机样本，样本方差为 S^2，其中 μ，σ^2 均未知，(1) 求 $P(S^2/\sigma^2)\le 2.04$；(2) 若 σ^2 已知，求 $E(S^2),D(S^2)$。(已知 $\chi^2_{0.01}(15)=30.6$)

(1) $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$. 即 $\frac{15S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$.

(2) $E(\chi^2)=15$. $D(\chi^2)=30$.

$E\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right)=15$. $D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right)=30$.

$\therefore E(S^2)=\sigma^2$ $D(S^2)=\frac{2}{15}\sigma^4$.

得 分

八、已知马尔可夫链的状态空间为 $I=\{1,2,3\}$，初始分布为 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，一步转移概率矩阵为 $P(1)=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0\end{pmatrix}$；(1) 求 $P\{X_2=2\}$；

(2) 求 $P\{X_2=2,X_3=2\mid X_0=1\}$；(3) 证明此链具有遍历性，并求其极限分布。(12 分)

$P(2)=P(1)^2=\begin{pmatrix}0.5 & 0.25 & 0.25\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\\ 0.25 & 0.25 & 0.5\end{pmatrix}$

$=P_{12}(2)\cdot P_1(0)+P_{22}(2)\cdot P_2(0)+P_{32}(2)\cdot P_3(0)$

$=0.25\times\frac{1}{3}+0.5\times\frac{1}{3}+0.25\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$=P\{X_2=2\mid X_0=1\}\cdot P\{X_3=2\mid X_2=2\}$

$=P_{12}(2)\times P_{22}(1)=0.25\times 0=0$

$P(2)$ 无零元，$\therefore$ 此链具有遍历性。

设极限分布 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$ 则 $\begin{cases}\pi_1=0.5\pi_2+0.5\pi_3\\ \pi_2=0.5\pi_1+0.5\pi_3\\ \pi_3=0.5\pi_1+0.5\pi_2\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}\pi_1=\frac{1}{3}\\ \pi_2=\frac{1}{3}\\ \pi_3=\frac{1}{3}\end{cases}$

$\therefore$ 极限分布 $\pi=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

得 分

九 设 $X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$，$\omega_0$ 是常数，A 与 B 为相互独立的随机变量，且 $A\sim N(0,1)$，$B\sim N(0,1)$

(1) 证明 $X(t)$ 是平稳过程；(2) 证明 $X(t)$ 均值具有各态历经性；

(1) $E[X(t)]=\cos\omega_0 t\cdot E(A)+\sin\omega_0 t\, E(B)=0$. 常数.

$R_X(t,t+\tau)=E\cdot[X(t)X(t+\tau)]=E\{[A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t][A\cos\omega_0(t+\tau)+B\sin\omega_0(t+\tau)]\}$

$=\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)\,EA^2+\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)\,EB^2$

$=\cos\omega_0\tau$ 仅是 τ 的函数.

$\therefore X(t)$ 是平稳过程.

(2) $\langle X(t)\rangle=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t)\,dt$

$=\lim_{T\to+\infty}\frac{\frac{2A}{\omega_0}\sin\omega_0 T}{2T}=0=\mu_X(t)$

$\therefore X(t)$ 均值具有各态历经性.

二、计算与证明题：

1. 设总体 X 的概率分布为　离散型的

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值 1, 2, 1, 3, 2, 3;

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。(10 分)

解 $E(\theta)=\theta^2+4\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2$　$\theta=\frac{3-\bar{x}}{2}$

$\bar{x}=\theta^2+4\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=\bar{x}=2$

$=\frac{1}{2}$

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{6}p(x_i)=\theta^2\cdot\theta^2\,2\theta(1-\theta)\,2\theta(1-\theta)\,(1-\theta)^2(1-\theta)^2$

$=4\theta^6(1-\theta)^6$　$\Rightarrow\theta=\frac{1}{2}$

2. 某卷烟厂生产甲乙两种香烟，分别对它们的尼古丁含量作了六次测定，得样本观察值为：

甲：25　28　23　26　29　22（毫克）　乙：28　23　30　25　21　27

问两种香烟的尼古丁含量有无显著差异？($\alpha=0.05$)，假设两种香烟的尼古丁含量服从正态分布且方差相等。(10 分)

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$　$t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$　$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$(\Phi(1.645)=0.95,\ \Phi(1.96)=0.975,\ t_{0.025}(10)=2.228,\ t_{0.025}(12)=2.179)$

$H_0:\mu_1=\mu_2$. $H_1:\mu_1\neq\mu_2$.　$t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\cdots}}\sim t(n_1+n_2-2)$

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，在总体 X 中随机地取得容量为 9 的样本：

6.0　5.7　5.8　6.5　7.0　6.3　5.6　6.1　5.0

(1) $\sigma=0.6$；(2) σ 未知 就 (1)(2) 两种情况下，分别求出 μ 的置信度为 0.95 的置信区间

(1) $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

(2) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

$(Z_{0.025}=1.96,\ Z_{0.05}=1.645,\ t_{0.025}(9)=2.2622,\ t_{0.025}(8)=2.3060)$

$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　(1) $\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}$　(2) $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

4. 设总体 X 具有概率密度 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本。(1) 求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量；(2) 问它是否是无偏的？

练习册

$(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$

解 $E(X)=\int_0^{\infty}x\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}dx=\bar{X}$.

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}=\left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n}\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$

$\ln L(\theta)=2n\ln\frac{1}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-2n\theta}{\theta^2}$

$\theta=\frac{\bar{x}}{2}$

《概率论与数理统计》

院(系)__________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

一、填空题（共 42 分，每格 3 分）

1. 设 A,B,C 为三个事件，则事件“A、B、C都不发生”可表示为 $\overline{ABC}$

2. 设 A,B,C 为三个事件，$P(A)=0.7, P(B)=0.3, P(A-B)=0.5$，则 $P(A\cup B)=$ 0.8

3. 把 10 本不同的书任意放在书架上，则其中指定的 3 本书放在一起的概率为 $\frac{1}{15}$

$P\{Y=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

4. 设 X 服从 $\lambda=1$ 的泊松分布，则 $P(X=1)=$ e^{-1}

$E(X)-2E(Y)=16-2(\frac{4}{2})=16-2\times2=16-4=12$

5. 设 X 与 Y 独立，$X\sim N(16,25), Y\sim U(0,4)$，则 $E(X-2Y)=$ 16, 9 12

6. 设随机变量 X 服从参数为 $\theta=1$ 的指数分布，则 $E(e^{-3X})=$______

7. 设 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim\pi(4), Y\sim\pi(5)$，则 $X+Y\sim$ $\pi(9)$

8. 设 $X\sim b(400,0.02)$，则由中心极限定理 $P(X\le 8)\approx$ $\frac{1}{2}$

9. 设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，则由契比雪夫不等式有：$P(|X-\mu|<3\sigma)\ge$ $\frac{8}{9}$

10. 设总体 $X\sim\pi(\lambda)$，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，则 $E(\overline{X})=$ λ，$D(\overline{X})=$ $\frac{\lambda}{n}$，$E(S^2)=$ λ

11. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，则当

$C=\underline{\frac{1}{n}}$ 时，$(\bar{X})^2-CS^2$ 是 μ^2 的无偏估计量.

12. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，σ^2 未知，则总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为（____________________）

得 分

二、已知男子有5%是色盲患者，女子有0.25%是色盲患者．今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，则（1）此人是色盲患者的概率；（2）若此人恰好是色盲患者，问此人是女性的概率是多少？（10分）

解：设该事件为A.

男女人数相同的人群男子有2.5%是色盲患者.

女子有0.125%是色盲患者.

∵男子与女子是否为色盲相互独立.

∴ $P(A)=2.5\%+0.125\%=2.625\%$

因女子是色盲为事件B．色盲患者为女性是C.

$P(B)=0.125\%$ 则 $P(C)=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.125\%}{2.625\%}=\frac{1}{21}$

得 分

三、设随机变量 $X\sim N(0,1)$，求随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度．（10分）

解：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)$

当 $y\le 0$ 时　$F_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时：

$F_Y(y)=P(-y\le x\le y)=F_X(y)-F_X(-y)$

$\therefore f_Y(y)=$ ~~[illegible]~~ $f_X(y)+f_X(-y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

得 分

四、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0\le x\le \pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，试求 $E(Y)$ 及 $E(Y^2)$.（10 分）

解：$P(X>\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{1}{2}$

$E(Y)=np=4\times\frac{1}{2}=2$

$D(Y)=np(1-p)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$

$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2$

$=1+2^2$

$=5$

得 分

五、设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为：

$Y\backslash X$	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

试证明：X 与 Y 是不相关的，但 X 与 Y 不是相互独立的.（10 分）

证明：∵ X、Y同分布

∴ 其分布律分别为

X	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

∴ $E(X)=E(Y)=-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=0$

$E(XY)=\frac{1}{8}+(-\frac{1}{8})+(-\frac{1}{8})+\frac{1}{8}=0$

∴ $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

∴ X与Y不相关

∵ $P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{8}\neq P(X=-1)P(Y=-1)=\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$

∴ X、Y不相互独立

得分

六、设总体X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)} & x>c \\ 0 & 其它\end{cases}$，且$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的一个简单随机样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为相应的样本值，求参数$\theta$的矩估计量和最大似然估计量（其中$c$已知且$\theta>1$）。(10分)

1、矩估计

$\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{c}^{+\infty}x\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}dx=\frac{c\theta}{\theta-1}$

$\therefore \theta=\frac{\mu_1}{\mu_1-c}$ 以$\bar{X}$替换μ_1. $\therefore \hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$.

2、极大似然估计

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta c^{\theta}x_i^{-(\theta+1)}=\theta^n c^{n\theta}\prod_{i=1}^{n}x_i^{-(\theta+1)}$

$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

解得θ的极大似然估计值为$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln c}$

$\therefore \theta$的极大似然估计为$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-n\ln c}$.

得分

七、设矿石中某种元素含量服从正态分布，且均值、方差均未知，现测定容量为16的样本，经计算得$\bar{x}=0.4$, $s^2=0.18^2$，试在显著水平$\alpha=0.05$下，检验总体的均值是否为0.49？（已知$t_{0.025}(15)=2.13$）(8分)

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

《 概率论与数理统计 》

院(系)__________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得分											

得 分

一、填空题（共 39 分，每格 3 分）(注：已知 $z_{0.025}=1.96$)

1. 进行重复独立试验，设每次成功的概率为 p，则直到第 10 次才取得 3 次成功的概率为 $C_9^2 \cdot p^2(1-p)^7 \cdot p$

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$; $Y\sim N(2\mu,\sigma_2^2)$，如果 $P(X-Y>-1)=0.5$，则 $\mu=$ -1 　 $(X-Y)\sim N(-\mu,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，已知 $\bar{X}^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计量，则 $c=$ 1 　 $E(\bar{X}^2-cS^2)=\mu^2$ 　 $E(\bar{X}^2)-cE(S^2)$ $=D(\bar{X})+E^2(\bar{X})-cE(S^2)=\mu^2$

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则

$\bar{X}\sim N(0,0.1)$，$\dfrac{9X_1^2}{\sum_{i=2}^{10}X_i^2}\sim F(1,9)$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow \bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$

$\sum_{i=2}^{10}X_i^2=\chi^2(9)\Rightarrow \dfrac{9\chi^2(1)}{\chi^2(9)}$ 　 $\dfrac{\chi^2(1)/1}{\chi^2(9)/9}$

5. 设总体 X 的均值 μ 和方差 $\sigma^2(>0)$ 都存在，μ,σ^2 未知，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则 σ^2 的矩估计量为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 　 P151页

6. 设正态总体 X 的方差为 1，根据来自 X 的容量为 16 的简单随机样本，得样本均值为 6，则 X 的期望 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间是 $(5.54,\ 6.46)$ 　 $(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$ P172页 　 α为0.05

7. 设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是强度为 3 的泊松过程，则 $P\{X(3)=4\mid X(2)=1\}=$ $\frac{9}{2}e^{-3}$

$P\{X(1)=1,X(2)=4,X(3)=5\}=$ $\frac{729}{2}e^{-9}$；$C_X(3,7)=$ 9 　 $\lambda\min\{s,t\}$

$P\{X(1)-X(0)=1,\ X(2)-X(1)=3,\ X(3)-X(2)=1\}$

8. 设齐次马尔可夫链 $\{X(n),n\geq 0\}$ 的初始分布为 $p_0(0)=p_1(0)=1/2$，且其一步转移概率矩阵为 $\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}$，则 X_2 的分布律 $\bar{P}(2)=$ $\left(\frac{29}{72},\ \frac{43}{72}\right)$ 　 类似例题册P72 2题

$P^2=\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12\\ \frac13 & \frac23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12\\ \frac13 & \frac23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{12} & \frac{7}{12}\\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18}\end{pmatrix}$

$P_1(2)=\frac12\times\frac{5}{12}+\frac12\times\frac{7}{18}=\frac{29}{72}$

$P_2(2)=\frac12\times\frac{7}{12}+\frac12\times\frac{11}{18}=\frac{43}{72}$

$S(w)=\frac{w^2}{(w^2+2)(w^2+1)}=\frac{2}{w^2+2}-\frac{1}{w^2+1}$ $\quad R_X(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{-\sqrt{2}|\tau|}-\frac{1}{2}\cdot e^{-|\tau|}$ $\quad$ P353页

平均功率 $=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(w)dw$

9. 已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为 $S(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}$，则 $X(t)$ 的自相关函数

$R_X(\tau)=$ $\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}-\frac{1}{2}\cdot e^{-|\tau|}}$，平均功率为 $\underline{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ $\quad$ 傅氏对 P91页 2(2)

得 分

二、设有 200 件相同的产品，其中 120 件是甲厂生产的；60 件是乙厂生产的；20 件是丙厂生产的，已知这三个厂的产品不合格率依次为 0.1,0.2,0.3，现从中任取一件，(1) 问取到不合格品的概率是多少？

(2) 设取到的是不合格品，问它是由丙厂生产的概率是多少？(10 分)

解：(1) 设产品由甲厂生产为事件 A

乙 …… B

丙 …… C

设产品不合格为事件 D

$P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)$

$=\frac{120}{200}\times0.1+\frac{60}{200}\times0.2+\frac{20}{200}\times0.3$

$=0.15$

(2) $P(C|D)=\frac{P(CD)}{P(D)}$

$=\frac{P(C)\cdot P(D|C)}{P(D)}$

$=\frac{\frac{20}{200}\times0.3}{0.15}$

$=0.2$

得 分

三、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2,\cdots, X_{100}$ 是来自总体 X 的样本。

(1) 写出 $(X_1, X_2,\cdots, X_{100})$ 的联合概率密度函数。

(2) 求 $D(\overline{X}), D(S^2)$。(10 分)

解：(1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$f(x_1,x_2,\cdots x_{100})=\frac{1}{(2\pi)^{50}\sigma^{100}}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

(2) $D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{100}$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $\quad D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=2(n-1)$

$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1)$ $\quad D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}=\frac{2\sigma^4}{99}$

得 分

四、设总体X的概率密度函数为$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta^2 xe^{-\theta x}, & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$，其中$\theta>0$未知，$X_1,X_2,\dots,X_n$是来自总体$X$的简单随机样本，$x_1,x_2,\dots,x_n$是相应的样本值，试求$\theta$的矩估计量及最大似然估计量。（10分）

解：矩估计量：$u_1=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,\theta)dx$

$=\int_0^{\infty}\theta^2 x^2 e^{-\theta x}dx=\theta^2\cdot\int_0^{\infty}x^2 e^{-\theta x}dx$

$=\theta^2\cdot\frac{1}{\theta^3}\cdot\int_0^{\infty}(\theta x)^2 e^{-\theta x}d(\theta x)=\frac{2}{\theta}$

$\theta=\frac{2}{u_1}$ $\quad\hat{\theta}=\frac{2}{\overline{X}}$

最大似然估计量：$L=L(x_1,x_2\cdots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta^2 x_i e^{-\theta x_i}=\theta^{2n}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i$

$\ln L=2n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i+\ln\prod_{i=1}^{n}x_i$

$\frac{d\ln L}{d\theta}=2n\cdot\frac{1}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ $\quad\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

得 分

五、测定某溶液中的某种元素的含量，由它的20个测定值得到$s^2=0.09^2$，设测定值总体服从正态分布，总体方差σ^2未知，试在显著性水平$\alpha=0.05$下检验方差是否是0.11^2.（$\chi^2_{0.025}(19)=32.852$ $\chi^2_{0.975}(19)=8.907$）（8分）

解：$H_0: \sigma^2=0.11^2$ $\quad H_1: \sigma^2\neq 0.11^2$

统计量：$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

样本计算值：$\chi_1^2=\frac{19\times 0.09^2}{0.11^2}=12.72$

拒绝域为 $\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

即 $\chi^2\geq 32.852$ 或 $\chi^2\leq 8.907$

样本计算值并不落在拒绝域内，接受原假设

即 $\sigma^2=0.11^2$

得 分

六、将2个红球6个白球任意地放入甲、乙两个盒子中，每个盒子中放4个，现从每个盒子中各取一球，交换后放回盒中，以 $X(n)$ 表示经过 n 次交换后甲盒子中的红球数，则 $\{X(n), n \geq 0\}$ 是一齐次马尔可夫链. (1) 求初始分布；(2) 求一步转移概率矩阵；(3) 求它的极限分布（12分）

解：(1) $P_0(0) = \frac{C_6^4}{C_8^4} = \frac{3}{14}$

$P_0(1) = \frac{C_2^1 C_6^3}{C_8^4} = \frac{4}{7}$

$P_0(2) = \frac{C_2^2 C_6^2}{C_8^4} = \frac{3}{14}$

(3) $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

得：$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{16}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{5}{8}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{3}{16}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$ 解得 $\pi_1 = \frac{3}{14}$，$\pi_2 = \frac{4}{7}$，$\pi_3 = \frac{3}{14}$

(2) $P_{00}(1) = \frac{C_3^1}{C_4^1} \cdot \frac{1}{2}$ ... $= \frac{1}{2}$　$P_{10}(1) = \frac{1}{C_4^1} \cdot \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{3}{16}$　$P_{20}(1) = 0$

$P_{01}(1) = \frac{C_1^1}{C_4^1} \cdot$ ... $= \frac{1}{2}$　$P_{11}(1) = \frac{C_3^1}{C_4^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_4^1} + \frac{1}{C_4^1}\cdot\frac{1}{C_4^1} = \frac{5}{8}$　$P_{21}(1) = \frac{C_2^1}{C_4^1} = \frac{1}{2}$

$P(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$P_{02}(1) = 0$　$P_{12}(1) = \frac{C_3^1}{C_4^1} \cdot \frac{1}{C_4^1} = \frac{3}{16}$　$P_{22}(1) = \frac{C_2^1}{C_4^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_4^1} + \frac{C_1^1}{C_4^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_4^1} = \frac{1}{2}$

得 分

七、设随机过程 $Y(t) = A\sin(\omega t + \Theta), t \in R$ 其中 ω 是常数，$A \sim B(20, 0.3), \Theta \sim U(0, 2\pi)$，且 A 与 Θ 相互独立.

试问：(1) $Y(t)$ 是不是平稳过程？(2) $Y(t)$ 的均值是否具有各态历经性？(3) $Y(t)$ 的相关函数是否具有各态历经性？（11分）

解：(1) $\mu_Y(t) = E[A\sin(\omega t + \Theta)] = E(A) \cdot E[\sin(\omega t + \Theta)]$

$= 6 \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{-6}{2\pi} \cdot \cos(\omega t + \theta)\Big|_0^{2\pi} = 0$

$R_Y(t, t+\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] = E(A^2) \cdot E[\sin(\omega t + \Theta)\sin(\omega t + \omega\tau + \Theta)]$

其中 $E[\sin(\omega t + \Theta)\sin(\omega t + \omega\tau + \Theta)] = \frac{1}{2} E[\cos(\omega\tau) - \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\Theta)]$

$= \frac{1}{2}\cos\omega\tau - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}\cos\omega\tau$.　$E(A^2) = [E(A)]^2 + D(A)$

$R_Y(t, t+\tau) = 20.1\cos\omega\tau$　$= 6 \times 6 + 4.2 = 40.2$

$\mu_Y(t)$ 为常数，$R_Y(t, t+\tau)$ 与 t 无关，为平稳过程.

(2) $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)[R_Y(\tau) - \mu_Y^2] d\tau = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) \cdot 20.1\cos\omega\tau \, d\tau$

$= 20.1 \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\left[\int_0^{2T} \cos\omega\tau \, d\tau - \int_0^{2T} \frac{1}{2T} \cdot \tau\cos\omega\tau \, d\tau\right]$

$= 20.1 \cdot \lim_{T \to \infty}\left[0 - \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \left(\tau\sin\omega\tau\Big|_0^{2T} + \frac{1}{\omega}\cos\omega\tau\Big|_0^{2T}\right)\right]$

$= 0 = \mu_Y(t)$. 故均值具有各态历经性.

(3) $\langle Y(t)Y(t+\tau)\rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2 \sin(\omega t + \Theta)\sin(\omega t + \omega\tau + \Theta) dt$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

《 概率论与数理统计 》

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、填空题（共39分，每格3分）

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

1. 设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$、$X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是来自于总体的样本，

$\overline{X}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}X_i$，则 $\frac{\sum_{i=1}^{5}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim$ $\chi^2(4)$

2. 设总体 X 服从 $B(10,0.3)$、$X_1,\cdots,X_{10}$ 是来自于总体的样本，则 $D(\overline{X})=$ 0.21 $\frac{\sigma^2}{n}$

$10\times 0.3\times 0.7=2.1$

$E(S^2)=$ 2.1

$\frac{X^2}{Y/n}\sim \chi^2(n)$

3. 已知随机变量 $T\sim t(n)$，则 $T^2\sim$ $F(1,n)$

4. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，已知 $(\overline{X})^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计量，则 $c=$ $\frac{1}{n}$

$E(\overline{X})^2-cE(S^2)=D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2-cE(S^2)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-c\sigma^2=\mu^2$

$c=\frac{1}{n}$

5. 设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，μ、σ^2 未知，则样本容量为 n 的总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$

6. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，均值未知。则对假设 $H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$ 进行检验时（显著性水平为 α），拒绝域为 $\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

7. 设随机过程 $X(t)=Y\sin(\omega t)$，$(-\infty<t<+\infty)$，其中 ω 为常数，$Y\sim U(0,1)$，当

69

$Y\sin\frac{\pi}{2}$ Y $X=Y$

$t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 时，$X(t)$ 一维概率密度为 ____ $f=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$ $\sigma^2\min(t_1,t_2)$

8. 设 $X(t),t\ge 0$ 是参数为 3 的维纳过程，则 $\mu_X(t)=$ __0__ $C_X(3,6)=$ __9__ $\sigma^2\min(t_1,t_2)$ $3\times3=9$

9、设马尔可夫链 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 的状态空间 $I=\{0,1\}$，一步转移概率矩阵为 P，

初始分布为 $\vec{P}(0)$，则 X_2 的分布律 $\vec{P}(2)=$ __$\vec{P}(0)P^2$__

10、对于平稳过程 $X(t)$，若 __$\langle X(t)\rangle=E[X(t)]=\mu_X$__ 以概率 1 成立，则称 $X(t)$ 的均值具有各态历经性；已知 $R_X(\tau)=e^{-2|\tau|}$，则 $S_X(\omega)=$ __$\frac{4}{4+\omega^2}$__

得分

二、南京某市场供应的灯泡中甲、乙、丙三厂生产的产品分别占 60%，30% 和 10%，已知三厂的合格率为 0.9、0.7 和 0.8，现从中任取一件，问（1）取到不合格品的概率是多少？（2）取到不合格产品，是由甲厂生产的概率是多少？ （10 分）

解：(1) 设取到不合格品的事件为 A

$P(A)=0.6\times0.1+0.3\times0.3+0.1\times0.2=0.17$

(2) 设由甲厂生产的事件为 B

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.6\times0.1}{0.17}=\dfrac{6}{17}$

得分

三、设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 是泊松过程，且对 $\forall t_2>t_1\ge 0$，$E[X(t_2)-X(t_1)]=3(t_2-t_1)$

求 $P\{X(1)=1,X(4)=5,X(6)=8\}$ （7 分）

解：$\because E[X(t_2)-X(t_1)]=3(t_2-t_1)$ $\therefore \lambda=3$，

$P\{X(1)=1,X(4)=5,X(6)=8\}$

$=P\{X(0)=0,X(1)=1,X(4)=5,X(6)=8\}$

$=P\{X(1)-X(0)=1,X(4)-X(1)=4,X(6)-X(4)=3\}$

$=\dfrac{(3\times1)^1}{1!}e^{-3}\times\dfrac{(3\times3)^4}{4!}e^{-3\times3}\times\dfrac{(3\times2)^3}{3!}e^{-3\times2}=3e^{-3}\times\dfrac{6561}{24}e^{-9}\times36e^{-6}$

$=$

得分

四、设总体 X 的分布函数为：$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0\\ 0, & else\end{cases}$，其中 θ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，求 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

(10 分)

解：①矩估计 $\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta^2}\cdot x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta$

用 $\bar{X}$ 代替 μ_1 ∴ $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{2}$

②最大似然估计：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta^2}x_ie^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^{n}x_i\,e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}$

$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0$

$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}=2n$

∴ θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2n}$

得分

五、设矿石中某元素含量服从正态分布，均值方差均未知，现测定容量为16的样本，$\bar{X}=0.42$ 样本方差为 $S^2=0.0225$，若显著性水平 $\alpha=0.05$，能否认为该元素含量均值为0.49？

$(t_{0.05}(15)=1.7531, t_{0.025}(15)=2.1315)$

(10 分)

0.15
0.15
75
15
2.25

解：假设：$H_0: \mu=0.49$　$H_1: \mu\ne 0.49$

检验统计量 $t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域为 $t=\frac{0.42-\mu_0}{0.15/\sqrt{16}}\le -2.1315$

或 $t=\frac{0.42-\mu_0}{0.15/\sqrt{16}}\ge 2.1315$

$0.34\le\mu_0\le 0.52$

∴ $\mu=0.49$ 落入了拒绝域

~~认为该元素~~ ∴ 不接受 H_0

得分

六、已知马尔可夫链的状态空间为 $I=\{1,2,3\}$，初始分布为 $\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

，(1) 求 $P\{X_1=2, X_3=1\}$；

(2) 证明此链具有遍历性，并求其极限分布。 （12 分）

$$P^2=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{3}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

$P\{X_1=2, X_3=1\} = p_2(1)\cdot p_{21}(2)$

$=(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3})\times\frac{2}{9}$

$=\frac{5}{12}\times\frac{2}{9}=\frac{5}{54}$

$\pi=(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5})$

2) ∵ P^2 中元素无0 ∴ 此链具有遍历性

设 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$，$\pi=\pi P$

$$\begin{cases} \pi_1=\frac{2}{3}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_2=\frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2+\frac{2}{3}\pi_3 \\ \pi_3=0+\frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{3}\pi_3 \end{cases} \quad \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \quad \begin{cases} \pi_1=\frac{2}{5} \\ \pi_2=\frac{2}{5}, \\ \pi_3=\frac{1}{5} \end{cases}$$

得分

七、设随机过程 $X(t)=a\sin(\omega_0 t+\Theta)$，其中 a,ω_0 为常数，$\Theta\sim U(0,2\pi)$，(1) 证明 $X(t)$ 是平稳过程；(2) 均值是否各态历经？(3) 求 $X(t)$ 的谱密度。 （12 分）

解：1) $\mu_X(t)=E[X(t)]=E[a\sin(\omega_0 t+\Theta)]=aE[\sin(\omega_0 t+\Theta)]$

$=a\cdot\int_0^{2\pi}\sin(\omega_0 t+\Theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\Theta$

$=\frac{a}{2\pi}\cdot\cos(\omega_0 t+\Theta)\Big|_0^{2\pi}=0$ 为常数

$R_X(t,t+\tau)=E\{[a\sin(\omega_0 t+\Theta)][a\sin(\omega_0(t+\tau)+\Theta)]\}$

$=a^2E[\sin(\omega_0 t+\Theta)\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau+\Theta)]$

$=-a^2\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\omega_0 t+\Theta+\omega_0\tau)-\cos(\omega_0\tau)}{2}d\Theta$

$=\frac{a^2}{2}\sin\omega_0\tau$ 只与 τ 有关

$X(t)$ 是平稳过程

2) $\langle X(t)\rangle$

$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$

$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}a\int_{-T}^{T}\sin(\omega_0 t+\Theta)dt$

$=0=\mu_X(t)=E[X(t)]$

∴ 均值具有各态历经性

3) $S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2}{2}\sin\omega_0\tau e^{-i\omega\tau}d\tau$

$=\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega_0\tau e^{-i\omega\tau}d\tau$

$=\frac{a^2}{4}\int(e^{-i\omega_0\tau}-e^{i\omega_0\tau})e^{-i\omega\tau}d\tau$

$=\frac{a^2}{4}\int[e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}d\tau-e^{i(\omega_0-\omega)}]d\tau$

$=\frac{a^2}{2}\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega_0-\omega)]$

《数理统计》

院(系)____________ 班级____________ 学号____________ 姓____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

装订线内不要答题

得分

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1、设随机变量 $X \sim t(n)$，则 $Y = X^2 \sim$ $F(1,n)$.

2、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则 $\overline{X} \sim$ $N(\mu, \sigma^2/n)$，$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim$ $t(n-1)$.

3、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自均匀分布 $U(0,1)$ 的样本，则 $E(S^2)=$ $1/12$。

4、设 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是未知参数 θ 的一个估计量，若对任意 $\varepsilon > 0$，都有 $\lim P(|\hat\theta_n-\theta| \geq \varepsilon) = 0$，则称 $\hat{\theta}_n$ 是参数 θ 的相合估计。

5、贝叶斯学派的基本观点是把未知量 θ 看作随机变量，若已知 θ 的先验分布为 $\pi(\theta)$，参数空间 Θ，样本联合条件概率函数为 $p(x_1, \cdots, x_n|\theta)$，则 θ 的后验分布 $\pi(x_1, \cdots, x_n|\theta) =$ $\dfrac{P(x_1,\cdots,x_n|\theta)\pi(\theta)}{\int_\Theta P(x_1,\cdots,x_n|\theta)\pi(\theta)d\theta}$.

σ^2 已知
$[\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n},\ \bar{x}+u_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}]$

6、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知，则 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是 $[\bar{x}-t_{1-\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n},\ \bar{x}+t_{1-\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}]$

$\beta = P$(接受 H_0 | H_1 为真)

7、显著性检验是控制犯第一类错误 α 的概率，$\alpha =$ P(拒绝 H_0 | H_0 为真)；检验的 p 值为在一个假设检验问题中，利用观察值能够做出拒绝原假设的最 小 （填大或小）的显著性水平。

8、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自两点分布 $P(X=x)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}, x=0,1$ 的样本，则该分布的得 Fisher 信息量 $I(\theta) =$ $-\frac{x}{\theta^2} + \frac{1-x}{(1-\theta)^2}$.

$\ln P(x,\theta) = x\ln\theta + (1-x)\ln(1-\theta)$

$\frac{\partial \ln P(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{x}{\theta} + (-)\frac{(1-x)}{1-\theta} = \frac{x}{\theta} + \frac{x-1}{1-\theta}$

$I(\theta) = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln P(x,\theta)\right]^2 = -E\left[\frac{\partial^2 \ln P(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right]$

$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = -\frac{x}{\theta^2} + \frac{-(x-1)}{(1-\theta)^2}$

得分

二、(10 分) (1)、设总体 X 的概率分布列为

$\bar{x} = \theta^2 + 2\cdot 2\theta(1-\theta) + 3\times(1-\theta)^2 = 3-2\theta = \frac{8}{5}$

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

$\therefore \theta = 0.7$

得到 5 个样本观察值为 2，3，1，1，1，求 θ 的矩估计值；

(2)设 X_1, X_2 是来自 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，试求 $Y=\left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2$ 的分布。

(2) $X_1+X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$

$X_1-X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ $\quad\therefore\quad \frac{(X_1+X_2)}{\sqrt{2}\sigma} \Big/ \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{X_1+X_2}{X_1-X_2} \sim N(0,1)$

$\therefore\ Y = \left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

得分

三、(12分)设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，X 的概率密度为

$$p(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \qquad (\theta > 0)$$

1.求未知参数 θ 的最大似然估计；　2.问 θ 的最大似然估计是否为无偏估计。

(1) $P(X,P) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$\therefore L(p) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$ $\qquad \ln L(p) = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum x_i$

$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum x_i}{\theta^2} = -\frac{n}{\theta} + \frac{n\bar{x}}{\theta^2} = 0$

$\hat{\theta} = \bar{x}$.

(2) $E(\hat{\theta}) = E(\bar{x}) = E(X) = \theta$

$P(\frac{\bar{x}}{1/3} \geq c \mid H_0) = \alpha$

$c = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

得 分

四、(12 分) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自总体是 $N(\mu, 1)$ 容量为 9 的样本，现观察得到样本均值 $\bar{x} = 0.5$ ，试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验：

$$H_0: \mu = 0 \quad vs \quad H_1: \mu \neq 0$$

并求此检验问题的势函数(用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示)。

(已知 $u_{0.975} = 1.96, u_{0.95} = 1.64$)

拒绝域 $W = \{|u| \geq u_{1-\alpha/2}\} = \{u \geq 1.96\} \cup \{u \leq -1.96\}$

$\bar{x} \sim N(\mu, 1/9)$ 　在 H_0 成立， $g(\theta) = a(\theta) =$ $\frac{\bar{x}-\mu_0}{1/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}}{1/3} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$

$u = \frac{\bar{x}-0}{1/3} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$ 　$W = \{|u| \geq u_{1-\alpha/2}\}$

$g(\mu) = P(|u| \geq u_{1-\alpha/2}) = P(\frac{\bar{x}-0}{1/3} \geq u_{1-\alpha/2}) + P(\frac{\bar{x}-0}{1/3} \leq -u_{1-\alpha/2})$

$= 2[1-\Phi(u_{1-\alpha/2})] = 2 - 2\Phi(u_{1-\alpha/2}) = 2 - 2 \times 1.96$ 　$\frac{\bar{x}-\mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$= P(\frac{\bar{x}-\mu}{1/3} \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu}{1/3}) + P(\frac{\bar{x}-\mu}{1/3} \leq -u_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\mu}{1/3})$

$= 1 - \Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}} - 3\mu) + \cdots$

得 分

五、(12 分) 有 A、B、C 三个工厂生产同一型号的电池，现从三批产品中各随机抽取 4 只电池，经试验测得其寿命(单位：小时)如下：

A 厂	10	18	8	12
B 厂	2	3	3	8
C 厂	9	10	13	20

(1) 试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验三个厂生产电池的平均寿命有无显著差异； $F_{0.95}(2,9) = 4.26$

(2) 哪个厂生产的电池好？ (设各厂电池寿命服从同方差的正态分布， $F_{0.95}(2,10) = 4.1$)

					T_i	T_i^2	$\sum y_{ij}^2$
A	10	18	8	12	48	2304	632
B	2	3	3	8	16	256	86
C	9	10	13	20	52	2704	750
					116	5264	1468

$\therefore S_T = \sum\sum y_{ij}^2 - T^2/n = 346.67$ 　$f_T = 11$

$S_A = \frac{1}{4}\sum T_i^2 - T^2/n = 194.67$ 　$f_A = 2$

$S_e = 152$ 　　$f_e = 9$

$\therefore S_A$ 　f_A 　$MS_A = 97.335$ 　　$F = 5.76326$

S_e 　f_e 　$MS_e = 16.889$ 　　$F \geq F_{0.95}(2,9)$ 故认为有显著差异

S_T 　f_T

置信区间：$(\bar{y}_i - \hat{\sigma} t_{1-\alpha/2}(f_e)/\sqrt{m}, \bar{y}_i + \hat{\sigma} t_{1-\alpha/2}(f_e)/\sqrt{m}]$

$\mu_A = 12$ 　显然 C 厂好 　$\hat{\sigma} = \sqrt{MS_e} = 4.1067$

$\mu_B = 4$

$\mu_C = 13$

① 检验统计量 $X_{(1)}$

② $W=\{X_{(1)}\ge c\}$

③ $P(X_{(1)}\ge c \mid H_0)=\alpha$　　$X_{(1)}$ 的分布（H_0 成立）

$W=\{X_{(1)}\ge \square\}$

得 分

六、(10分) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自指数分布的样本，指数分布的密度为：

$$p(x;\mu)=\exp\{-(x-\mu)\},\quad x>\mu,\ -\infty<x<+\infty$$

显著性水平为 $\alpha=0.05$，试用广义似然比检验如下问题：

$$H_0:\mu=0 \quad \text{vs} \quad H_1:\mu\ne 0$$

$\Theta_0=\{\mu:\mu=0\}$　　$\Theta=\{\mu,-\infty<\mu<+\infty\}$

$P(x,\mu)=\exp\{-\sum(x_i-\mu)\}=\exp\{-\sum x_i+n\mu\}I\{x_{(1)}\ge\mu\}$

在 Θ_0 $\hat\mu=0$　　在 Θ $\hat\mu=x_{(1)}$

$\lambda(x)=\dfrac{\exp\{-\sum x_i\}}{\exp\{-\sum x_i+nx_{(1)}\}}=e^{-nx_{(1)}}\le c$　　$\therefore W=\{x_{(1)}\ge c\}$

$P\{x_{(1)}\ge c\}=e^{-nc}=\alpha=0.05$　　$\therefore -nc=\ln\alpha=\ln 0.05$

$\therefore c=-\frac{1}{n}\ln 0.05$　　$\mu=0$ 时　$x_{(1)}$ 分布 $1-(1-F(x))^n=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-nx} & x\ge 0\end{cases}$

得 分

七、(14分) 设关于某设备的使用年限 x 和所支出的维修费用(单位：千元) y 如下所示：

x	2	3	4	5	6
y	2.2	3.8	5.5	6.5	7.0

4　9　16　25　36

4.84　14.44　30.25　42.25　49

4.4　11.4　22　32.5　42

1. 求 y 关于 x 的回归方程；
2. 检验回归方程是否显著($\alpha=0.05$)，并求 $x=7$ 时，维修费用 y 的概率为 0.95 的预测区间。(已知 $F_{0.95}(1,3)=10.13$，$t_{0.975}(3)=3.1824$)

$\sum x_i=20$　　$l_{xx}=\sum x_i^2-n\bar x^2=10$

$\sum y_i=25$　　$l_{xy}=\sum x_iy_i-n\bar x\bar y=12.3$　　$l_{yy}=\sum y_i^2-n\bar y^2=15.78$

$\bar x=4$　　$\sum x_i^2=90$

$\bar y=5$　　$\sum y_i^2=140.78$　　$\sum x_iy_i=112.3$

$\therefore \hat\beta_1=\dfrac{l_{xy}}{l_{xx}}=1.23$　　$\hat\beta_0=\bar y-\hat\beta_1\bar x=5-1.23\times4=0.08$

$\therefore \hat y=0.08+1.23x$

$S_T=l_{yy}=15.78$　　$f_T=4$

$S_R=\hat\beta_1^2 l_{xx}=15.129$　　$f_R=1$　　$MS_R=15.129$

$S_e=0.651$　　$f_e=3$　　$MS_e=0.217$　　$F=69.719$

$F>F_{0.95}(1,3)=10.13$　$\therefore$ 方程显著　　$\hat\sigma=\sqrt{MS_e}=0.4658$

$x=7$ 时　$\hat y=8.69$

$\delta=\sqrt{MS_e}\,t_{0.975}(3)\sqrt{1+\frac{1}{5}+\frac{(7-4)^2}{10}}=0.4658\times3.1824\sqrt{2.1}=2.14815$

$\therefore [8.69-2.14815,\ 8.69+2.14815]$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

《概率论数理统计和随机过程》

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、填空题（共 48 分，每格 3 分）

1. 假设 $X \sim N(\mu,4)$，μ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 X 的一个样本，则 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \sum_{i=1}^{n-1}X_i - X_n, \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/4$ 中为统计量的有 2 个

2. 已知 $T \sim t(n)$，则 $\frac{1}{T^2} \sim$ $F(n,1)$，$X_1, \cdots, X_{10}$ 为来自正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，则 $\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim$ $\chi^2(9)$

3. 设总体 $X \sim U(2,6)$，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 为其样本，则样本均值的期望 $E(\bar{X})=$ 4，$ES^2=$ $\frac{4}{3}$

4. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1, X_2, X_3 为其样本，则当常数 $a=$ $\frac{1}{2}$ 时，$\hat{\mu}=\frac{1}{3}X_1+aX_2+\frac{1}{6}X_3$ 是未知参数 μ 的无偏估计。

5. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 为一个样本，则对假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ 进行检验时，采用的统计量为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

6. 设 $X \sim N(u,9)$，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 为一个样本，则 μ 的一个置信度为 0.95 的置信区间为 $(\bar{X} \pm \frac{3}{\sqrt{n}} z_{0.025})$

7. 独立增量过程 $X(t)$ 的协方差函数 $C_X(t_1,t_2)=$ $D_X(\min\{t_1,t_2\})$，强度为 λ 的泊松过程的协方差函数 $C(t_1,t_2)=$ $\cancel{\lambda^2 t_1 t_2} + \lambda^2 \min\{t_1,t_2\}$

77

8. 已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为 $S(\omega)=\dfrac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}$，则 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)=$ $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}-\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$ 平均功率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$

9. 设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是泊松过程，且 $\forall\ t_2>t_1\geq 0$，$E[X(t_2)-X(t_1)]=2(t_2-t_1)$，

$P\{X(4)=10\,|\,X(2)=8\}=$ $\frac{4^2}{2!}e^{-4}$ $=8e^{-4}$，$P\{X(1)=2,X(3)=4\}=$ $\frac{4^2}{2!}e^{-4}\cdot\frac{2^2}{2!}e^{-2}$ $=16e^{-6}$

10. 随机相位过程 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，其中 a,ω 为常数，Θ 为随机变量，且 $\Theta\sim U(0,2\pi)$，则 $<X(t)>=$ 0，$<X(t)X(t+\tau)>=$ $\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau$

得分

二、计算器在进行加法时将每个数舍入最靠近它的整数，设所有的误差相互独立且服从(-0.5,0.5)上的均匀分布，求：

(1) 若将 1200 个数相加，误差总和的绝对值超过 15 的概率。

(2) 最多多少个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不超过 0.9。（$\Phi(1.5)=0.9332$，$Z_{0.1}=1.28$，$Z_{0.05}=1.64$）（10 分）

(1). $P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1200}X_i\right|>15\right\}$ 积分正确得2'

$=1-P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1200}X_i\right|\leq 15\right\}$ 相应数值求得1' ~~最后结果~~

$=1-P\left\{\frac{|\sum X_i|}{\sqrt{100}}<\frac{15}{\sqrt{100}}\right\}$ 求范围准确加2'

$=2(1-\Phi(1.5))=2\cdot 0.0668=0.1336$

(2) $P\left\{\frac{|\sum_{i=1}^{n}X_i|}{\sqrt{\frac{n}{12}}}<\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right\}\geq 0.9$ 2'

即 $\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\geq Z_{0.05}$ 2'

$n\leq\left(\frac{10\cdot\sqrt{12}}{1.64}\right)^2=\frac{1200}{1.64^2}=446.2$ 1'

$\therefore\ n=446$ 1'

得 分

三、设 $X_1,\dots X_n$ 是来自总体X的一个样本，X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} & x\ge\mu\\ 0 & x<\mu\end{cases}$$,用矩估计法估计θ和μ的估计量。（10分）

解：$EX=\int_\mu^{+\infty} x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\theta+\mu$

$EX^2=DX+E^2X=2\theta^2+2\theta\mu+\mu^2$

这步没有积分计算，也没给出中间过程的扣2'

令 $\begin{cases}\theta+\mu=\bar X\\ 2\theta^2+2\theta\mu+\mu^2=\frac{1}{n}\sum X_i^2\end{cases}$ 4'

$\hat\theta=\frac{1}{n}\sum X_i^2-\bar X^2=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(X_i-\bar X)^2}$ 4'

$\hat\mu=\bar X-\sqrt{\frac{1}{n}\sum(X_i-\bar X)^2}$

~~$EX^2=$~~

~~$EY^2=DY^2+E^2Y$~~

~~$=D(X-\mu)^2$~~

$EX^2=DX^2+(EX)^2$

$=DY+E^2X$

得 分

四、考察甲、乙两台包装机的包装质量有无差异，分别抽取了9袋产品，分别测得两组数据（单位：kg），计算得甲包装机包装重量的均值 $\bar X=22$，样本方差 $S_1^2=1.6$，乙包装机包装重量的均值 $\bar Y=20$，样本方差 $S_2^2=2.4$，问在两台包装机的包装质量有无显著差异？(显著水平α=0.05)设两台包装机的包装重量 X,Y 都服从正态分布，且方差相同。（$t_{0.025}(16)=2.1199$，$t_{0.05}(16)=1.7459$）（10分）

解：$H_0:\mu_1=\mu_2$ $H_1:\mu_1\ne\mu_2$. (2)

$$T=\frac{\bar X-\bar Y}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$ 2

拒绝域 $|T|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(16)=2.1199$. 2'

$$t=\frac{22-20}{\sqrt{\frac{8(1.6+2.4)}{16}}\cdot\sqrt{\frac{2}{9}}}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=3>2.1199.$$ 2'

2'

∴ 拒绝 H_0

陈翔

得分

五、设任意相继两天中，雨天转晴天的概率为 $\frac{1}{3}$，晴天转雨天的概率为 $\frac{1}{2}$，任一天晴或雨是互为逆事件，以 0 表示晴天状态，以 1 表示雨天状态，X_n 表示第 n 天的状态（0 或 1）。

(1) 写出马氏链 $\{X_n, n\geq 1\}$ 的一步转移概率矩阵；

(2) 5 月 1 日为晴天，5 月 3 日为雨天的概率是多少？

(3) 在 5 月 1 日为晴天的条件下，5 月 3 日为晴天，5 月 5 日为雨天的概率是多少？（10 分）

(1) $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}\frac{5}{12} & \frac{7}{12}\\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18}\end{pmatrix}$ 4'

(2) $P\{X(3)=1 \mid X(1)=0\} = \frac{7}{12}$

~~$=P\{X(3)=1, X(1)=0\}\cdot P\{X(1)=0\}$~~

~~$=P\{X(3)=1 \mid X(0)=\ldots\} P\{X(1)=0 \mid X(0)=0\}+P\{X(1)=0 \mid X(0)=1\}$~~

~~$=\frac{7}{12}$~~

2' 应用后求 且 $P_{01}(2)=\frac{7}{12}$ 除两分

(3) $P\{X(5)=1, X(3)=0 \mid X(1)=0\}$

$=P\{X(5)=1 \mid X(3)=0\}\cdot P\{X(3)=0 \mid X(1)=0\}=\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{12}=\frac{1}{4}$ 4'

得分

六、设 $X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$，$\omega_0$ 是常数，A 与 B 为相互独立的随机变量，且 $A\sim N(0,1)$，$B\sim N(0,1)$

(1) 证明 $X(t)$ 是平稳过程；(2) 证明 $X(t)$ 均值具有各态历经性；（12 分）

(1) $EX(t)=\cos\omega_0 t\, EA+\sin\omega_0 t\, EB=0$ 3'

$E[X(t)X(t+\tau)]=E[(A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t)(A\cos\omega_0(t+\tau)+B\sin\omega_0(t+\tau))]$ 0

$=\cos\omega_0\tau$ 算错一下么

$\therefore X(t)$ 为平稳过程

(2) $\langle X(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t)\,dt=0$

$\langle X(t)\rangle=EX(t)=0$ 0

$\therefore X(t)$ 的均值具有各态历经性 3'

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题