题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											88

装订线内不要答题

得分
39

一、填空题（45分，每空3分）

1. 设 A_1, A_2, A_3 是随机变量 E 的三个相互独立的随机事件，已知 $\mathrm{P}(A_1)=\alpha$，$\mathrm{P}(A_2)=\beta$，$\mathrm{P}(A_3)=\gamma$，则 A_1, A_2, A_3 至少有一个发生的概率是 $1-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$。

2. 设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则下面三个均值估计量

$\mu_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3$，　$\mu_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$，$\mu_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3$ 中

是 μ 的无偏估计的有 μ_1, μ_2, μ_3

3. 随机变量 X 满足：$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式有 $P\{|X-\mu| \geq 4\sigma\} \leq \frac{1}{16}$。

4. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(-2)=0.15, P(1)=0.5, P(3)=0.35$，则 X 的分布函数为 $F(X)=\begin{cases} 0 & x<-2 \\ 0.15 & -2\leq x<1 \\ 0.65 & 1\leq x<3 \\ 1 & x\geq 3 \end{cases}$

5. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $\overline{X} \sim$ $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$。

6. 设 $\mathrm{P}(A)=0.6$，$\mathrm{P}(\overline{B})=0.3$，$\mathrm{P}(A\cup B)=0.9$，则 $\mathrm{P}(B|A)=$ $\frac{4}{7}$。 $\frac{2}{3}$

7. 设随机变量的分布函数为 $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x,\ (-\infty<x<+\infty)$，则 $P\{0<X<1\}=\frac{1}{4}$。

8. 设总体 $X \sim \chi^2(5)$，$X_1, X_2, \ldots X_{10}$ 是取自 X 的样本，则 $E(\bar{X}) =$ 5，$D(\bar{X}) =$ 10。 1

9. 在总体 $X \sim N(\mu, 1)$，随机抽取容量为 16 的样本，均值为 5，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间下限为 4.51，置信区间上限为 5.49。(已知 $z_{0.025} = 1.96$)

10. 设随机变量 $X \sim b(n,p)$，已知 $E(X) = 12$，$D(X) = 6$，则 $n =$ 24，$p =$ 0.5。

11. 二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，则关于 X 的边缘概率密度为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$，关于 Y 的边缘概率密度函数为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$。

得分
8

二、(8 分). 设有两台机床加工同样的零件，第一台机床出废品的概率为 0.03，第二台机床出废品的概率为 0.02. 加工出来的零件混放在一起，并且已知第一台机床加工的零件与第二台机床加工零件的数目比为 2:1.

(1) 求任取一件零件是废品的概率；

(2) 若任取的一件零件经检查后发现是废品，则它是第二台机床加工的概率.

解：设取出的物品为第一台机床加工的零件事件记为A.

第二台 — B

废品的事件记为C

(1) $P(A) = \frac{2}{3}$，$P(B) = \frac{1}{3}$

$P(C|A) = 0.03$　$P(C|B) = 0.02$.

$\therefore P(C) = P(C|A)\cdot P(A) + P(C|B)\cdot P(B) = \frac{8}{300} = \frac{2}{75}$

(2) $\because P(C|B) = 0.02$

$P(B) = \frac{1}{3}$

$\therefore P(CB) = \frac{2}{300}$

$P(B|C) = \frac{P(CB)}{P(C)} = \frac{1}{4}$

得分
12

三、(12 分). 设连续型随机变量 X 的分布函数为：

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

(1) 求 A,B；(2) $P\{X \le 2\}; P\{X > 3\}$；(3) 概率密度 $f(x)$。

解：(1) $F(+\infty) = A = 1$　$\therefore A = 1$

$F(0) = 0 = A + B$　$\therefore B = -1$

(2) $P\{X \le 2\} = F(2) = 1 - e^{-2\lambda}$

$P\{X > 3\} = 1 - P\{X \le 3\} = 1 - F(3) = e^{-3\lambda}$

(3) $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

得分
6

四、（8 分）．设连续型随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a+b\arcsin x, & -1\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

（1）求 a,b；（2）$E(X),D(X)$。

解：(1) $F(-1)=0=a-\frac{\pi}{2}b$ ~~$\Rightarrow a=\frac{\pi}{2}$~~

$F(1)=1=a+\frac{\pi}{2}b$.

$$\begin{cases}a-\frac{\pi}{2}b=0\\ a+\frac{\pi}{2}b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{\pi}\end{cases}$$

(2) $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}0 & x\le -1\\ \frac{\frac{1}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}} & -1<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$

$E(X)=\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0$

$E(X^2)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{2}$

得分
4

五、（8 分）．设 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-y+1}, & x>1,y>1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$，

求关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度。

解：$f_X(x,y)=\int_1^{+\infty}f(x,y)dy=\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}e^{-y+1}dy=-\frac{2}{x^3}e^{-y+1}\Big|_1^{+\infty}$

$=\frac{2}{x^3}$

写范围.

$f_Y(x,y)=\int_1^{+\infty}f(x,y)dx=\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}e^{-y+1}dx=-\frac{1}{2x^4}e^{-y+1}\Big|_1^{+\infty}$

$=\frac{1}{2}e^{-y+1}$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

得分
8

六、（8 分）．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ ，$\theta>0$。设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，求 θ 的矩估计量和极大似然估计量。

解：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\theta^n x_1^{\theta-1}\cdot x_2^{\theta-1}\cdot\cdots\cdot x_n^{\theta-1}$

$\ln(L(\theta))=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\dfrac{d\ln(L(\theta))}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

$\Rightarrow \hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

$E(X_i)=\int_0^1 x_i\theta x_i^{\theta-1}dx$

$=\theta\int_0^1 x^\theta dx$

$=\dfrac{\theta}{\theta+1}$

$\therefore \hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$

得分
11

七、（11 分）．某模型号晶体管的寿命（小时计）$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，随机抽取 25 只，测得样本均值 $\bar{x}=1474.2$（小时），样本标准差 $s=64.5$（小时），试检验在水平 $\alpha=0.05$ 下能否认为该批晶体管的平均寿命是 1500 小时？

（附：$z_{0.95}=1.65$，　$t_{0.95}(25)=1.708$，　$t_{0.95}(24)=1.711$，

$z_{0.975}=1.96$，　$t_{0.975}(25)=2.060$，　$t_{0.975}(24)=2.064$

解：设 $H_0:\mu=1500$，$H_1:\mu\neq1500$

统计量 $T=\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$

拒绝域 $|t|\geq t_{1-\alpha/2}(n-1)=2.064$

$|t|=\left|\dfrac{1474.2-1500}{64.5/\sqrt{25}}\right|=2\leq 2.064$

∴可接受原假设，即可以认为该晶体管的平均寿命为1500小时．