概率统计与随机过程

期末试卷 参考答案

《概率统计与随机过程》期末试卷一参考答案

一、填空题

1. 与总体X同分布且相互独立

2. $\lambda,\ \dfrac{\lambda}{n},\ \dfrac{1}{2}$

3. $F(1,n)$

4. $$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

5. $\dfrac{\overline{X}-0.49}{\sqrt{S^2/16}}$

6. $0,\ \cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2$

7. $2,\ 12e^{-8}$

8. $\sigma^2 \min\{s,t\}$

9. $(0.6067\ ,\ 0.3933)$

10. $\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = R_X(\tau)$

11. $\dfrac{2}{1+\omega^2},\ 1$

二、解:(1) 检验假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 2000$, $H_1: \mu \neq \mu_0$

因为 σ^2 未知, 所以采用 t 检验,

即选用 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 作为统计量.,

拒绝域为 $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.005}(15) = 2.95$

此处 t 的观察值为

$$|t| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{16}}\right| = \left|\frac{1800 - 2000}{400/4}\right| = 2 < 2.95$$

未落入拒绝域, 故接受H_0,

即可以认为灯泡平均寿命为2000小时.

二、解:(2) 检验假设 $H_0: \sigma^2 \le 300^2 = \sigma_0^2$,

$H_1: \sigma^2 > 300^2$

采用 χ^2检验, 即选用$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$作为统计量.,

拒绝域为: $\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(15) = 24.996$

此处χ^2的观察值为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{15\times 400^2}{300^2} = 26.667 > 24.996$$

落入拒绝域, 故拒绝H_0, 接受H_1.

三、解(1)： $\mu_1 = E(X) = \int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx$

$$= (\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+1}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

解得 $\theta = \dfrac{2\mu_1 - 1}{1 - \mu_1}$

总体矩

故 θ 的矩估计量为 $\theta = \dfrac{2\overline{X} - 1}{1 - \overline{X}}$

样本矩

解(2) 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta} \qquad (0<x_i<1) \quad 1\le i\le n$$

对数似然函数为: $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

求导并令其为0: $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

从中解得 $\theta=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$

即得θ的最大似然估计量为 $\hat\theta=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$

四、解:

（1）易知 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 此处 $n=16$

故 $P\left\{\dfrac{S^2}{\sigma^2} \le 2.04\right\} = P\left\{\dfrac{15S^2}{\sigma^2} \le 30.6\right\} = 1-0.01 = 0.99$

（2）若σ^2已知，则 $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$;

又由 $\dfrac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$ 知 $D\left(\dfrac{15S^2}{\sigma^2}\right) = 2\times 15$

即 $\dfrac{15^2}{\sigma^4} D\left(S^2\right) = 2\times 15$

得 $D\left(S^2\right) = \dfrac{2\sigma^4}{15}$

五、解:

(1) 先求二步转移概率矩阵

$$P(2)=[P(1)]^2=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P\{X_2=2\}=\sum_{i=1}^{3}P\{X_0=i\}P\{X_2=2\mid X_0=i\}$$

$$=p_1(0)P_{12}(2)+p_2(0)P_{22}(2)+p_3(0)P_{32}(2)$$

$$=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=\frac{1}{3}$$

(2) $P\{X_2=2, X_3=2\mid X_0=1\}$

$$=P\{X_3=2\mid X_2=2\}P\{X_2=2\mid X_0=1\}$$

$$=P_{22}(1)P_{12}(2)=0\times\frac{1}{4}=0$$

五、解:

(3) 因 $P(2)$ 中无零元, 故此链具有遍历性.

设极限分布为$\pi=\left(\pi_1,\pi_2,\pi_3\right)$,

则有$\begin{cases}\pi=\pi P\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases} \Rightarrow \pi_1=\pi_2=\pi_3=\dfrac{1}{3}$

即极限分布为$\pi=\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

六、解:

(1) Θ的概率密度为 $f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<\theta<2\pi\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=E\left[a\sin\left(\omega_0 t+\Theta\right)\right]$$

$$=\int_0^{2\pi}a\sin\left(\omega_0 t+\theta\right)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0 \quad \text{为常数;}$$

$$R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\sin(\omega_0 t+\theta)\sin(\omega_0(t+\tau)+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

只与时间差有关.

故 $X(t)$ 为平稳过程.

六、解:

(2) $$\langle X(t)\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\sin(\omega_0 t+\Theta)\,dt$$

$$\xlongequal{\Theta\text{视为定值}} \lim_{T\to+\infty}\frac{a\left[-\cos(\omega_0 T+\Theta)+\cos(-\omega_0 T+\Theta)\right]}{2T\omega_0}$$

$$=0 \quad \boxed{=\mu_X(t)}$$

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a^2\sin(\omega_0 t+\Theta)\sin\left[\omega_0(t+\tau)+\Theta\right]dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}-\frac{a^2}{4T}\int_{-T}^{T}\left[\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\Theta)-\cos\omega_0\tau\right]dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau \quad \boxed{=R_X(t,t+\tau)}$$

故$X(t)$具有各态历经性.

六、解:

(3) 因 $R_X(t,t+\tau)=\dfrac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau,$

故 $$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2}{2}\cos(\omega_0\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{a^2}{2}\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

《概率统计与随机过程》期末试卷二 参考答案

一、填空题

1. $F(1,n)$

2. $\underline{P\left\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right\} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i},}$

$\underline{\text{其中} x_i = 0 \text{或} 1;}$ $E(S^2) = \underline{p(1-p)}$

3. $\overline{X}$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

4. $\frac{1}{3}$

5. $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

6. $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \geq t(n_1+n_2-2)$，其中

$$S_W = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

7. $\dfrac{2187}{8}e^{-9}$，$108e^{-9}$，$3\min\{s,t\}$

8. $\sigma^2\min\{s,t\}$

9. 0，$\dfrac{a^2}{2}\cos\pi\tau$

10. $\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = R_X(\tau)$

11. $S_0\delta(\tau)$

二、1. 可以认为两总体方差相等;

2. 可以认为均值为0.2.

三、1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_{100}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{50}\sigma^{100}} e^{-\sum\limits_{i=1}^{100}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

2. $D(S^2) = \dfrac{2}{99}\sigma^4$

四、

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{矩} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{\mu}_{矩} = \bar{X} - \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_L = \min\limits_{1\le i\le n} X_i \\ \theta_L = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \mu_L \end{cases}$$

(此题详解见最后)

五、1. $P(2)=P^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$

2. $\vec{p}(2)=\vec{p}(0)P(2)=\begin{pmatrix}\frac{10}{27} & \frac{11}{27} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$

3. 因$P(2)$中无零元,故此链具有遍历性

极限分布为$\pi=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

六、略

四、 设$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体 X 的一个样本

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta}, & x \geq \mu \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \theta, \mu \text{为未知参数}$$

其中 $\theta > 0$，求 θ, μ 的矩估计和极大似然估计.

详解： 先求矩估计。 由密度函数知

$X-\mu$ 具有均值为 θ 的指数分布

故 $\begin{cases} E(X-\mu) = \theta \\ D(X-\mu) = \theta^2 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} E(X) = \mu + \theta \\ D(X) = \theta^2 \end{cases}$

也就是

$$E(X)=\mu+\theta$$

$$D(X)=\theta^2$$

解得

$$\theta=\sqrt{D(X)}$$

$$\mu=E(X)-\sqrt{D(X)}$$

于是 θ,μ 的矩估计量为

$$\begin{cases}\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\\ \hat{\mu}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\end{cases}$$

解： 下求极大似然估计。 似然函数为

$$L(\theta,\mu)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-(x_i-\mu)/\theta}, & x_i\ge\mu,\quad i=1,2,\ldots,n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}, & \min x_i\ge\mu\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta,\mu)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

对数似

ln

用求导方法无法最终确定θ、μ，
用最大似然原则来求．

对 θ,μ 分别求偏导并令其为0,

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\mu)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\mu)}{\partial\mu}=\frac{n}{\theta}=0 \qquad (2)$$

由(1)得 $\theta=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\mu$

$$L(\theta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}, & \min x_i \ge \mu \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对 $\mu \le \min\ x_i, L(\theta,\mu) > 0,$ 且是μ的增函数

μ 取其它值时，$L(\theta,\mu)=0.$

故使 $L(\theta,\mu)$达到最大的μ, 即 μ的MLE是

$$\mu^* = \min_{1\le i\le n} x_i$$

于是

$$\theta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu^*$$

即 θ^*, μ^*为 θ, μ的MLE .

《概率统计与随机过程》期末试卷三 参考答案

一、填空题

1. $2\Phi(0.6)-1$

2. $\dfrac{1}{25}$, 2

3. $F(10,8)$

4. λ, λ

5. $N\left(0,\dfrac{n+1}{n}\right)$, $F(1,n-1)$

6. $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{\chi_{0.025}^2(n)}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{\chi_{0.975}^2(n)}\right)$

7. 1

8. $1-\dfrac{1}{\varepsilon^2}$

9. $\dfrac{5^7 \cdot 3^3 e^{-30}}{8}$, $\dfrac{15^4 e^{-15}}{24}$

10. $\sigma^2 \min\{s, t\}$

11. $\dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$

12. $\langle X(t) \rangle = \mu_X$

13. $\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{1}{24}$

14. 0, $\dfrac{a^2}{2}\cos\omega\tau$

二、 计算与证明题

1. (1) $\hat{\theta}_{矩}=\frac{7}{8}$ (2) $\theta_L=\frac{7}{8}$

2. 可以认为无显著差异

3. (1) $\theta_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ (2) 是无偏的 (3) 是相合的

4. (1) $P_{11}(2)=\frac{4}{9}$

(2) 此链遍历，因为$P(2)$中无零元

(3) 极限分布为$\pi=\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}$

二、计算与证明题

5. (1) $E(X)=0,\ E(X^2)=1$

(2) $\mu_Z(t)=0$ 为常值, $R_Z(t,t+\tau)=\cos\tau$ 只与τ有关

6. 证明思路: 先计算$Y(t)$的自相关函数为

$R_Y(t,t+\tau)=2R_X(\tau)+R_X(\tau-T)+R_X(\tau+T)$;

然后再用维纳–辛钦公式并结合傅里叶变换性质证明.