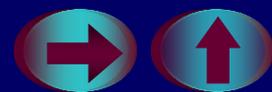


概率统计与随机过程

期末试卷 参考答案



《概率统计与随机过程》 期末试卷一 参考答案

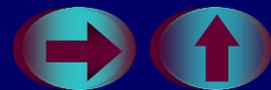
一、填空题

1. 与总体 X 同分布且相互独立

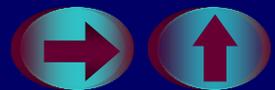
2. $\lambda, \frac{\lambda}{n}, \frac{1}{2}$

3. $F(1, n)$

4. $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$



5. $\frac{\bar{X} - 0.49}{\sqrt{S^2 / 16}}$
6. $0, \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2$
7. $2, 12e^{-8}$
8. $\sigma^2 \min\{s, t\}$
9. $(0.6067, 0.3933)$
10. $\langle X(t)X(t + \tau) \rangle = R_X(\tau)$
11. $\frac{2}{1 + \omega^2}, 1$



二、解:(1) 检验假设 $H_0 : \mu = \mu_0 = 2000$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$

因为 σ^2 未知, 所以采用 t 检验,

即选用 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$ 作为统计量.,

拒绝域为 $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.005}(15) = 2.95$

此处 t 的观察值为

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{16}} \right| = \left| \frac{1800 - 2000}{400 / 4} \right| = 2 < 2.95$$

未落入拒绝域, 故接受 H_0 ,

即可以认为灯泡平均寿命为2000小时.



二、解:(2) 检验假设 $H_0 : \sigma^2 \leq 300^2 = \sigma_0^2$,

$$H_1 : \sigma^2 > 300^2$$

采用 χ^2 检验, 即选用 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 作为统计量.,

拒绝域为: $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(15) = 24.996$

此处 χ^2 的观察值为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{15 \times 400^2}{300^2} = 26.667 > 24.996$$

落入拒绝域, 故拒绝 H_0 , 接受 H_1 .



三、解(1): $\mu_1 = E(X) = \int_0^1 x(\theta + 1)x^\theta dx$

$$= (\theta + 1) \int_0^1 x^{\theta+1} dx = \frac{\theta + 1}{\theta + 2}$$

解得

$$\theta = \frac{2\mu_1 - 1}{1 - \mu_1}$$

总体矩

故 θ 的矩估计量为 $\theta = \frac{2\bar{X} - 1}{1 - \bar{X}}$

样本矩



解(2) 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n (\theta + 1) x_i^\theta = (\theta + 1)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^\theta \quad \begin{matrix} (0 < x_i < 1) \\ 1 \leq i \leq n \end{matrix}$$

对数似然函数为: $\ln L(\theta) = n \ln(\theta + 1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i$

求导并令其为0: $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta + 1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$

从中解得 $\theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$

即得 θ 的最大似然估计量为

$$\theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} - 1$$



四、解:

(1) 易知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 此处 $n=16$

$$\text{故 } P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.04\right\} = P\left\{\frac{15S^2}{\sigma^2} \leq 30.6\right\} = 1 - 0.01 = 0.99$$

(2) 若 σ^2 已知, 则 $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$;

$$\text{又由 } \frac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15) \text{ 知 } D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right) = 2 \times 15$$

$$\text{即 } \frac{15^2}{\sigma^4} D(S^2) = 2 \times 15$$

$$\text{得 } D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{15}$$



五、解：

(1) 先求二步转移概率矩阵

$$P(2) = [P(1)]^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} P\{X_2 = 2\} &= \sum_{i=1}^3 P\{X_0 = i\}P\{X_2 = 2 | X_0 = i\} \\ &= p_1(0)P_{12}(2) + p_2(0)P_{22}(2) + p_3(0)P_{32}(2) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2) $P\{X_2 = 2, X_3 = 2 | X_0 = 1\}$

$$= P\{X_3 = 2 | X_2 = 2\}P\{X_2 = 2 | X_0 = 1\}$$

$$= P_{22}(1)P_{12}(2) = 0 \times \frac{1}{4} = 0$$



五、解:

(3) 因 $P(2)$ 中无零元, 故此链具有遍历性.

设极限分布为 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$,

$$\text{则有} \begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$$

即极限分布为 $\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.



六、解:

(1) Θ 的概率密度为 $f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < \theta < 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E[X(t)] = E[a \sin(\omega_0 t + \Theta)] \\ &= \int_0^{2\pi} a \sin(\omega_0 t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = 0 \quad \text{为常数;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_X(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t + \theta) \sin(\omega_0(t + \tau) + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau \end{aligned}$$

只与时间
差有关.

故 $X(t)$ 为平稳过程.



六、解:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \langle X(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a \sin(\omega_0 t + \Theta) dt \\
 &\stackrel{\Theta \text{ 视为定值}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{a \left[-\cos(\omega_0 T + \Theta) + \cos(-\omega_0 T + \Theta) \right]}{2T \omega_0} \\
 &= 0 \quad = \mu_X(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle X(t)X(t+\tau) \rangle &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \sin(\omega_0 t + \Theta) \sin[\omega_0(t+\tau) + \Theta] dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{a^2}{4T} \int_{-T}^T \left[\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta) - \cos \omega_0 \tau \right] dt \\
 &= \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau \quad = R_X(t, t+\tau)
 \end{aligned}$$

故 $X(t)$ 具有各态历经性.



六、解:

$$(3) \text{ 因 } R_X(t, t + \tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{a^2}{2} \pi \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right] \end{aligned}$$



《概率统计与随机过程》 期末试卷二 参考答案

一、填空题

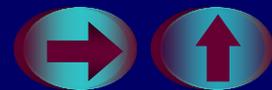
1. $F(1, n)$

2.
$$P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i},$$

其中 $x_i = 0$ 或 1 ; $E(S^2) = p(1-p)$

3. $\bar{X}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

4. $\frac{1}{3}$



$$5. \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$$

$$6. \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t(n_1 + n_2 - 2), \text{ 其中}$$

$$S_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

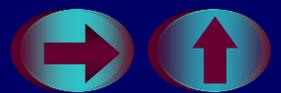
$$7. \frac{2187}{8}e^{-9}, 108e^{-9}, 3\min\{s, t\}$$

$$8. \sigma^2 \min\{s, t\}$$

$$10. \langle X(t)X(t + \tau) \rangle = R_X(\tau)$$

$$9. 0, \frac{a^2}{2} \cos \pi\tau$$

$$11. S_0 \delta(\tau)$$



- 二、1. 可以认为两总体方差相等;
 2. 可以认为均值为0.2.

三、1. $f(x_1, x_2, \dots, x_{100}) = \frac{1}{(2\pi)^{50} \sigma^{100}} e^{-\sum_{i=1}^{100} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
 2. $D(S^2) = \frac{2}{99} \sigma^4$

四、

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}_{\text{矩}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{\mu}_{\text{矩}} = \bar{X} - \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mu_L = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \\ \theta_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_L \end{array} \right.$$

(此题详解见最后)



五、1. $P(2) = P^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\vec{p}(2) = \vec{p}(0)P(2) = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} & \frac{11}{27} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

3. 因 $P(2)$ 中无零元,故此链具有遍历性

极限分布为 $\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

六、略



四、设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的一个样本

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta}, & x \geq \mu \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \theta, \mu \text{ 为未知参数}$$

其中 $\theta > 0$, 求 θ, μ 的矩估计和极大似然估计.

详解：先求矩估计。由密度函数知

$X - \mu$ 具有均值为 θ 的指数分布

$$\text{故} \begin{cases} E(X - \mu) = \theta \\ D(X - \mu) = \theta^2 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} E(X) = \mu + \theta \\ D(X) = \theta^2 \end{cases}$$



也就是 $E(X) = \mu + \theta$

$$D(X) = \theta^2$$

解得 $\theta = \sqrt{D(X)}$

$$\mu = E(X) - \sqrt{D(X)}$$

于是 θ, μ 的矩估计量为

$$\begin{cases} \hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{\mu} = \bar{X} - \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{cases}$$



解： 下求极大似然估计。 似然函数为

$$L(\theta, \mu) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-(x_i - \mu)/\theta}, & x_i \geq \mu, \quad i=1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}, & \min x_i \geq \mu \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta, \mu) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$$



对数似然

ln

用求导方法无法最终确定 θ 、 μ ，
用最大似然原则来求。

对 θ 、 μ 分别求偏导并令其为0，

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \mu)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \mu)}{\partial \mu} = \frac{n}{\theta} = 0 \quad (2)$$

由(1)得
$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \mu$$



$$L(\theta, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}, & \min x_i \geq \mu \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对 $\mu \leq \min x_i$, $L(\theta, \mu) > 0$, 且是 μ 的增函数

μ 取其它值时, $L(\theta, \mu) = 0$.

故使 $L(\theta, \mu)$ 达到最大的 μ , 即 μ 的MLE是

$$\mu^* = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$$

于是

$$\theta^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \mu^*$$

即 θ^*, μ^* 为 θ, μ 的MLE.



《概率统计与随机过程》 期末试卷三 参考答案

一、填空题

1. $2\Phi(0.6)-1$

2. $\frac{1}{25}, 2$

3. $F(10,8)$

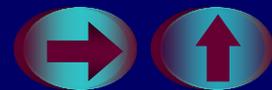
4. λ, λ

5. $N\left(0, \frac{n+1}{n}\right), F(1, n-1)$

6. $\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi_{0.025}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi_{0.975}^2(n)}\right)$

7. 1

8. $1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$



$$9. \frac{5^7 \cdot 3^3 e^{-30}}{8}, \frac{15^4 e^{-15}}{24}$$

$$10. \sigma^2 \min\{s, t\}$$

$$11. \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$12. \langle X(t) \rangle = \mu_X$$

$$13. \frac{5}{12}, \frac{1}{24}$$

$$14. 0, \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau$$



二、计算与证明题

1. (1) $\hat{\theta}_{\text{矩}} = \frac{7}{8}$ (2) $\theta_L = \frac{7}{8}$

2. 可以认为无显著差异

3. (1) $\theta_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ (2) 是无偏的 (3) 是相合的

4. (1) $P_{11}(2) = \frac{4}{9}$

(2) 此链遍历, 因为 $P(2)$ 中无零元

(3) 极限分布为 $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$



二、计算与证明题

5. (1) $E(X) = 0, E(X^2) = 1$

(2) $\mu_Z(t) = 0$ 为常值, $R_Z(t, t + \tau) = \cos \tau$ 只与 τ 有关

6. 证明思路: 先计算 $Y(t)$ 的自相关函数为

$$R_Y(t, t + \tau) = 2R_X(\tau) + R_X(\tau - T) + R_X(\tau + T);$$

然后再用维纳-辛钦公式并结合傅里叶变换性质证明。

