期末试卷一

一、填空题(共48分，每格三分)

1. 若随机变量 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 满足**独立同分布** 则称 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体X的一个简单随机样本。

2. 设总体X服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是简单随机样本，均值为$\overline{X}$，方差为 S^2，则 $E(\overline{X})=\lambda$，$D(\overline{X})=\frac{\lambda}{n}$
已知 $\hat{\lambda}=a\overline{X}+(2-3a)S^2$ 为 λ 的无偏估计量，则 $a=\frac{1}{2}$ 。

3. 已知随机变量 $T\sim t(n)$ ，则 $T^2\sim F(1,n)$ 。

4. 设总体 X 服从$N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 未知，则样本容量为n的总体方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

5. 设矿石中某种元素含量服从正态分布，但均值和方差和均未知。现测定容量为16的样本，$\overline{X},S^2$ 为样本均值和样本方差，试在显著性水平 α 下检验 $H_0:\mu=0.49$ 时所用的检验统计量为 $t=\frac{\overline{X}-0.49}{\sqrt{S^2/16}}$ 。

6. 设随机过程$X(t)=A\cos(\omega t)$，$(-\infty<t<+\infty)$，其中ω 为常数，A是服从标准正态分布的随机变量，则 $X(t)$的均值函数为 0 ，协方差函数为 $C_{XX}(t_1,t_2)=\cos\omega t_1\cos\omega t_2$。

7. 设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，且对于任意 $t>s\ge 0$，有 $E[X(t)-X(s)]=2(t-s)$，则 $\lambda=2$ 。
$P\{X(1)=2,X(4)=3\}=12e^{-8}$

8. 设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，其协方差函数为 $C_X(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}$。

9. 设马尔可夫链 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 的状态空间 $I=\{0,1\}$
则一步转移概率矩阵为 $P=\begin{pmatrix}0.9 & 0.1\\ 0.1 & 0.9\end{pmatrix}$ ，初始分布为 $\vec{P}(0)=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$
则 X_2 的分布律为 $\vec{P}(2)=(0.61,0.39)$ 。

10. 对平稳过程$X(t)$ 若 $\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)$ 以概率1成立，则称$X(t)$的自相关函数具有各态历经性。

11. 已知平稳过程$X(t)$自相关函数为 $R_X(\tau)=e^{-|\tau|}$，则 $X(t)$的谱密度 $S_X(\omega)=\frac{2}{\omega^2+1}$ ，$X(t)$的均方值 $E[X^2(t)]=1$。

二、(10分)已知某厂生产的灯泡寿命服从 $N(\mu,\sigma^2)$，其中μ和σ^2 未知，现随机抽取16只进行测试，测得它们的平均寿命为：$\overline{x}=1800$ 小时，样本标准差为：$S=400$。

$t_{0.01}(15)=2.60$，$t_{0.005}(15)=2.95$ $\chi^2_{0.05}(15)=24.996$ $\chi^2_{0.025}(15)=27.488$

1. 在显著水平$\alpha=0.01$下，能否认为这批灯泡的平均寿命为2000小时?

解：由题意提出假设： $H_0:\mu=2000$，$H_1:\mu\ne 2000$，

检验统计量： $t=\frac{\overline{X}-2000}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域： $|t|\ge t_{0.005}(15)=2.95$

样本计算值为 $|t|=\left|\frac{1800-2000}{400/\sqrt{16}}\right|=2<2.95$

不在拒绝域内，接受原假设，故平均寿命是 2000小时。

2. 在显著水平$\alpha=0.05$下，检验假设

$$H_0:\sigma^2\le 300^2,\quad H_1:\sigma^2>300^2$$

解：由题意要检验假设：

检验统计量： $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{300^2}$

拒绝域： $\chi^2>\chi^2_{0.05}(15)=24.996$

样本计算值为 $\chi^2=\frac{(16-1)400^2}{300^2}=26.67>24.996$

在拒绝域内拒绝原假设认为这批灯泡的标准差超过 300。

三、(10分)设总体X的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，其中未知参数 $\theta>-1$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体X的一个简单随机样本，求 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

解: (1)矩估计量

$$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x;\theta)=\int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

解之得：$\theta=\frac{1-2\mu_1}{\mu_1-1}$ 将 $\mu_1=A_1$ 代入得矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$

(2)最大似然估计量

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^\theta, & 0<x_i<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^n\ln x_i \qquad \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$$

解之得最大似然估计值为 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln x_i}-1$ 解之得 最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln X_i}-1$

四、(10分)设在正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取一容量为16的简单随机样本，样本方差为 S^2，其中 μ,σ^2 均未知，已知 $\chi^2_{0.01}(15)=30.6$

1. 求 $P\{S^2/\sigma^2 \le 2.04\}$

解： $P\{S^2/\sigma^2 \le 2.04\} = P\{(16-1)S^2/\sigma^2 \le 15\times 2.04\}$

$= 1 - P\{15S^2/\sigma^2 > 30.6\} = 1 - 0.01 = 0.99$

2. 若 σ^2 已知，求 $E(S^2)$，$D(S^2)$ 。

解： $E(S^2)=\sigma^2$

$$D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right) = 30 \qquad \frac{15^2}{\sigma^4}D(S^2)=30$$

$$D(S^2)=\frac{2}{15}\sigma^4$$

五、(12分) 已知马尔可夫链的状态空间为 $I=\{1,2,3\}$，初始分布为 $\vec{p}(0)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，其一步转移概率矩阵为 $P=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$

1. 求 $P\{X_2=2\}$

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

解： $P\{X_2=2\}=P_2(2)=p_1(0)P_{12}(2)+p_2(0)P_{22}(2)+p_3(0)P_{32}(2)$

$$=\frac{1}{3}\times 0.25+\frac{1}{3}\times 0.5+\frac{1}{3}\times 0.25=\frac{1}{3}$$

2. 求 $P\{X_2=2, X_3=2 \mid X_0=1\}$

$P\{X_2=2, X_3=2 \mid X_0=1\} = P_{12}(2)p_{22} = 0.25\times 0 = 0$

3. 证明此链具有遍历性，并求其极限分布。

证明：显然 $P(2)$ 中无零元，故遍历。

设极限分布为 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 0.5\pi_2+0.5\pi_3=\pi_1 \\ 0.5\pi_1+0.5\pi_3=\pi_2 \\ 0.5\pi_1+0.5\pi_2=\pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$$

$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$

解之得： $\pi_1=\pi_2=\pi_3=\frac{1}{3}$

六、(10分)设随机过程 $X(t)=a\sin(\omega_0 t+\Theta)$，其中 a,ω_0 为常数，$\Theta\sim(0,2\pi)$ 。

1. 证明 $X(t)$ 是平稳过程。

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=E[a\sin(\omega_0 t+\Theta)]=\int_0^{2\pi}\frac{a}{2\pi}\sin(\omega_0 t+\theta)d\theta \quad =0$$

$$R_{XX}(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=E[a^2\sin(\omega_0 t+\Theta)\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau+\Theta)]$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2\pi}\sin(\omega_0 t+\theta)\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau+\theta)d\theta \quad =\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

显然均值函数是常数，自相关函数仅与 τ 有关，$X(t)$ 是平稳过程。

2. 证明 $X(t)$ 具有各态历经性 。

$$\langle X(t)\rangle=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a\sin(\omega_0 t+\Theta)dt \quad =0$$

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a^2\sin(\omega_0 t+\Theta)\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau+\Theta)dt \quad =\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

显然，$\mu_X(t)=\langle X(t)\rangle$，$R_X(\tau)=\langle X(t)X(t+\tau)\rangle$ $X(t)$ 具有各态历经性。

3. 求 $X(t)$ 的谱密度。

$$R_X(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau \qquad S_X(\omega)=\frac{a^2}{2}\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

期末试卷二

一、填空题(共48分，每格3分)

1. 已知随机变量 $T\sim t(n)$ ，则 $T^2\sim F(1,n)$ 。

2. 设总体 $X\sim b(1,p)$，$X_1,X_2,\cdots X_n(n\ge 2)$ 为来自总体的简单随机样本，则 $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 的分布律为

$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$ $E(S^2)=p(1-p)$

3. 设 $X_1,X_2,\cdots X_n(n\ge 2)$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则 μ 的矩估计量 $\hat{\mu}$ 为 $\overline{X}$，σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}^2$ 为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 。

4. 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	θ	θ	$1-2\theta$

，其中 θ 是未知参数，对总体 X 的如下样本值 2,1,3,2,1,3；则 θ 的最大似然估计值为 $\frac{1}{3}$ 。

5. 设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 未知，则样本容量为 n 的总体方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的样本，$Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2}$ 是来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本，且设两样本独立，则检验问题(显著水平为 α) $H_0:\mu_1-\mu_2\le\delta \quad H_1:\mu_1-\mu_2>\delta$ 的拒绝域为：

$$\frac{\overline{x}-\overline{y}-\delta}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sigma}>t_\alpha(n_1+n_2-2)$$

7. 设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 是参数为3的泊松过程，则

$P\{X(3)=4\}=\frac{2187}{8}e^{-9}$ $P\{X(1)=1,X(3)=4\}=108e^{-9}$ $C_X(s,t)=3\min\{s,t\}$

8. 设$\{W(t), -\infty < t < +\infty\}$是参数为$\sigma^2$ 的维纳过程，则它的自相关函数 $R_W(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\}$ 。

9. 设随机相位正弦波过程 $\{X(t) = a\cos(\pi t + \Theta), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 其中a 是常数，Θ 是在区间 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量，则 $E[X(t)] = 0$ ，$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = \frac{a^2}{2}\cos\pi\tau$ 。

10. 对平稳过程$X(t)$ 若$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$ 以概率1成立，则称$X(t)$的自相关函数具有各态历经性。

11. 已知平稳过程的功率谱密度为 $S_X(\omega) = S_0$ 则其自相关函数为 $R_X(\tau) = S_0\delta(\tau)$ 。

二、(10分)设 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{10}$ 分别是来自正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，其样本均值和样本方差分别为 $\bar{x} = 0.24, s_1^2 = 0.15^2, \bar{y} = 0.21, s_2^2 = 0.1^2$ 。设两样本独立

$t_{0.025}(7) = 2.3646$, $t_{0.05}(7) = 1.8946$ $F_{0.025}(7,9) = 4.2$ $F_{0.025}(9,7) = 4.82$

1. 在显著水平$\alpha = 0.05$下，检验两总体方差是否相等?

解：由题意提出假设： $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$,

检验统计量： $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

拒绝域： $F \geq F_{\alpha/2}(7,9) = 4.2$ 或 $F \leq F_{1-\alpha/2}(7,9) = \frac{1}{4.8^2}$

样本计算值为 $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.15^2}{0.1^2} = 2.25$

显然不在拒绝域内，接受原假设认为两总体方差相等。

2. 在显著水平$\alpha = 0.05$下，检验总体X的均值是否为0.2

解：由题意提出假设： $H_0: \mu = 0.2$, $H_1: \mu \neq 0.2$,

检验统计量： $t = \frac{\bar{X} - 0.2}{\sqrt{S_1^2/n_1}}$

拒绝域： $|t| \geq t_{\alpha/2}(n_1 - 1) = t_{0.025}(7) = 2.3646$

样本计算值为 $|t| = \left|\frac{0.24 - 0.2}{0.15/\sqrt{8}}\right| = 0.75$

不在拒绝域内，接受原假设，认为均值为 0.2。

三、(8分)设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots X_{100}$,是来自总体X 的一个简单随机样本。

1. 写出$(X_1, X_2, \cdots, X_{100})$ 的联合概率密度函数；

解： $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in R$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{100}) = \prod_{i=1}^{100} f(x_i) = \frac{1}{(2\pi)^{50}\sigma^{100}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2. 求样本方差 S^2 的方差。

解：由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 则 $D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$

即 $\frac{(n-1)^2}{\sigma^4} D(S^2) = 2(n-1)$ 解之得:$D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{2\sigma^4}{99}$

四(10分).设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，X的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} & x \geq \mu \\ 0 & x < \mu \end{cases}$

求 θ 与 μ 的矩估计和最大似然估计量

(1)最大似然函数估计量 设一组样本值为 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

最大似然函数为 $L(\theta, \mu) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i; \theta, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\theta}} & x_i \geq \mu \\ 0 & x_i < \mu \end{cases}$

求对数

$$\ln L(\theta, \mu) = -n\ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)}{\theta}$$

求导数

由最大似然原则知 $\begin{cases} \frac{\partial \ln L(\theta,\mu)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\theta,\mu)}{\partial\mu} = \frac{n}{\theta} = 0 \end{cases}$

最大似然估计值为 $\hat{\mu} = x_1$ $\hat{\theta} = \bar{x} - x_1$

最大似然估计量为 $\hat{\mu} = X_1$ $\hat{\theta} = \bar{X} - X_1$

(2)求θ 与 μ 的矩估计量

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_c^{+\infty} x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx = \theta + \mu$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dt = \int_c^{+\infty} x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx = 2\theta^2 + 2\theta\mu + \mu^2$$

解之得 $\begin{cases} \theta = \mu_1 - \mu \\ \mu = \mu_1 - \sqrt{\mu_2 - \mu_1^2} \end{cases}$

将 $A_1 = \mu_1, A_2 = \mu_2$ 代入

即 $\begin{cases} \hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{\mu} = \bar{X} - \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \end{cases}$

五、(12分)设齐次马尔可夫链$\{X(n), n \ge 0\}$具有状态空间为$I=\{1,2,3\}$，初始概率分布为$\vec{p}(0)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$其一步转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

1. 求二步转移概率矩阵；

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5/9 & 3/9 & 1/9 \\ 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 2/9 & 4/9 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2. 求X_2的分布律

$$\vec{p}(2)=\vec{p}(0)P(2)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 5/9 & 3/9 & 1/9 \\ 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 2/9 & 4/9 & 1/3 \end{pmatrix}=\left(\frac{10}{27},\frac{11}{27},\frac{2}{9}\right)$$

3. 证明此链具有遍历性，并求极限分布。

$P(2)$中没有零元，显然遍历，设极限分布为

$\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2=\pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2+\frac{2}{3}\pi_3=\pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{3}\pi_3=\pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$$

$$\pi_1=\frac{2}{5},\pi_2=\frac{2}{5},\pi_3=\frac{1}{5}$$

六、(12分) 随机过程$Z(t)=X\sin(\pi t)+Y\cos(\pi t)$，其中$X,Y$为独立同分布的随机变量，它们的分布律为

X	-1	1
P	$1/2$	$1/2$

Y	-1	1
P	$1/2$	$1/2$

1. 证明$Z(t)$是平稳过程。$E(X)=E(Y)=0 \quad E(X^2)=E(Y^2)=1$

解：$\mu_Z(t)=E[Z(t)]=E[X\sin(\pi t)+Y\cos(\pi t)]=0$

$$R_{ZZ}(t,t+\tau)=E[Z(t)Z(t+\tau)]$$
$$=E[(X\sin(\pi t)+Y\cos(\pi t))(X\sin(\pi t+\pi\tau)+Y\cos(\pi t+\pi\tau))]$$
$$=\sin(\pi t)\sin(\pi t+\pi\tau)+\cos(\pi t)\cos(\pi t+\pi\tau)=\cos\pi\tau$$

均值函数是常数，自相关函数仅与τ有关，$Z(t)$是平稳过程。

2. 证明$Z(t)$的均值具有各态历经性。

解：
$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)(R_X(\tau)-\mu_X^2)d\tau$$
$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\cos\pi\tau\, d\tau=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T^2\pi^2}[\cos 2\pi t-1]=0$$

均值具有各态历经性。

期末试卷三

一、填空题(共60分，每格3分)

1. 设$X_1,X_2,\cdots X_9$来自总体$N(0,5^2)$则$P\{-1<\overline{X}<1\}=2\Phi(0.6)-1$

2. 设X_1,X_2,X_3,X_4是取自正态总体$N(0,1)$的简单随机样本，当$b=\frac{1}{25}$时，$Y=\frac{1}{5}(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$服从$\chi^2$分布，自由度为 2 ；

3. 设随机变量$F\sim F(8,10)$，则$\frac{1}{F}\sim F(10,8)$。

4. 设总体X服从参数为λ的泊松分布则$E(\overline{X})=\lambda$ $E(S^2)=\lambda$

5.设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2),X_1,X_2,\cdots X$是取自正态总体的简单随机样本，$\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma}\sim N(0,(1+\frac{1}{n}))$ $\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{S^2}\frac{n}{n+1}\sim F(1,n-1)$

6. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自正态总体$N(0,1)$的简单随机样本，则总体方差为σ^2的置信度为95%的置信区间为$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$

7. 对于随机变量序列$\{X_n\}$，若对于任意$\varepsilon>0$则当极限$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1$时，称$\{X_n\}$依概率收敛于常数$a$。

8. 设随机变量$X\sim N(0,1)$则$\forall\varepsilon>0$，由切比雪夫不等式$P\{|X|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{1}{\varepsilon^2}$

9. 设$\{X(t),t\ge 0\}$是强度为5的泊松过程，则

$$P\{X(1)=2,X(4)=6,X(6)=7\}=\frac{5^2 15^4 10}{48}e^{-30}$$
$$P\{X(4)=6\,|\,X(1)=2\}=\frac{15^4}{24}e^{-15}$$

10. 方差为$\sigma^2 t$的维纳过程的协方差函数$C(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}$

11. 已知平稳过程$X(t)$的自相关函数为$R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}$，则$X(t)$的谱密度$S_X(\omega)=\frac{2a}{\omega^2+a^2}$。

12. 若$\langle X(t)\rangle=E[X(t)]=\mu_X$以概率1成立，则称平稳过程$X(t)$的均值具有各态历经性。

13. 已知马尔可夫链的状态空间为$I=\{1,2,3\}$，初始分布为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\right)$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

则$p_{12}(2)=\frac{5}{12}$，$P\{X_0=1,X_1=2,X_2=2\}=\frac{1}{24}$

14. 随机相位正弦波过程$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，其中$a,\omega$为常数，$\Theta$为$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机变量，则

$\langle X(t)\rangle=0 \quad \langle X(t)X(t+\tau)\rangle=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau$

二、计算与证明题(共40分)

1. (8分)设总体X的概率分布为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta(0<\theta<1)$是未知参数，利用总体X的如下样本值1，2，1，1；

(1)求θ的矩估计值；

解：$\mu_1=E(X)=1\times\theta^2+2\times 2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta$

解之得：$\theta=\frac{3-\mu_1}{2}$ 即 $\hat{\theta}=\frac{3-\overline{X}}{2}=\frac{3-1.25}{2}=\frac{7}{8}$

(2)求θ的最大似然估计值；

最大似然函数 $L(\theta)=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}P\{X_3=1\}P\{X_4=1\}$
$=(\theta^2)^3 2\theta(1-\theta)=2\theta^7(1-\theta)$

$$\ln L(\theta)=\ln 2+7\ln\theta+\ln(1-\theta)$$
$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{7}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=0$$

解之得：$\hat{\theta}=\frac{7}{8}$

2. (4分)某卷烟厂生产甲乙两种香烟，分别对它们的尼古丁作了六次测定，得样本观察值为 (毫克):

甲：25 28 23 26 29 22　　乙：28 23 30 25 21 27

假设两种香烟的尼古丁含量服从正态分布且方差相等，问两种香烟的尼古丁有无显著差异？ $\alpha = 0.05$

$\Phi(1.645) = 0.95 \quad \Phi(1.96) = 0.975 \quad t_{0.025}(10) = 0.95 \quad t_{0.025}(12) = 2.17$

解：由题意要检验假设：$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

检验统计量：$t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_\omega \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$　　$\bar{x} = 25.5 \quad s_1^2 = 7.5$

$\bar{y} = 25.7 \quad s_2^2 = 11.068$

拒绝域：

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_\omega \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \right| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(10) = 2.228$$

样本计算值为 $|t| = \left| \dfrac{25.5 - 25.7}{3.05 \times 0.58} \right| = 0.11 < 2.228$

不在拒绝域内，接受原假设，认为两种的尼古丁含量无显著差异。

3. (8分)设总体X服从威布尔分布 $f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\theta} x e^{-\frac{x^2}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体X的简单随机样本。

(1)求参数 θ 的最大似然估计。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体X的简单随机样本值。

最大似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2^n}{\theta^n} x_1 x_2 \cdots x_n e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{\theta}} & x_i > 0 \\ 0 & x_i \le 0 \end{cases}$$

$$\ln L(\theta) = n \ln 2 - n \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\theta} \qquad \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$

最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$

(2)问最大似然估计量是否是无偏的。

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{1}{n} n E(X^2) = E(X^2)$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{2}{\theta} x e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \theta \qquad E(\hat{\theta}) = \theta$$

最大似然估计量是无偏的。

(3)问最大似然估计量是否是 θ 的相合的估计量。

$E(X^2) = \theta$　　由大数定律　　$\lim\limits_{n \mapsto \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$

得证是相合的估计量。

四、(8分) 设具有三个状态0,1,2的质点的一维随机游动，$X(n)$表示质点在n时刻所处的位置，则$X(n)$是齐次马尔可夫链，现已知它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

1. 求质点从状态1经二步转移到1的概率。

$$P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 4/9 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 \\ 1/9 & 2/9 & 2/3 \end{pmatrix}$$

解：$P\{X_2 = 1 | X_0 =\} = P_{11}(2) = \dfrac{4}{9}$

2. 此链是否遍历 显然$P(2)$中无零元，故遍历。

3. 若遍历，求出极限分布

设极限分布为 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

解之得：

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{7} \\ \pi_2 = \frac{2}{7} \\ \pi_3 = \frac{4}{7} \end{cases}$$

5. (12分) 随机过程 $Z(t) = X\sin(\ t) + Y\cos(\ t)$, 其中$X,Y$为独立同分布的随机变量，它们的分布律为

X	-1	1
P	$1/2$	$1/2$

Y	-1	1
P	$1/2$	$1/2$

(1). 求 $E(X), E(X^2)$；

解：$E(X) = -1 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{2} = 0 \qquad E(X^2) = (-1)^2 \times \dfrac{1}{2} + 1^2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

(2). 证明$Z(t)$为平稳过程；

$$\mu_Z(t) = E[Z(t)] = E[X\sin(t) + Y\cos(t)] = 0$$

$$R_{ZZ}(t, t+\tau) = E[Z(t)Z(t+\tau)]$$

$$= E[(X\sin(t) + Y\cos(t))(X\sin(t+\tau) + Y\cos(t+\tau))]$$

$$= \sin(t)\sin(t+\tau) + \cos(t)\cos(t+\tau) = \frac{1}{2}\cos\tau$$

均值函数是常数，自相关函数仅与 τ 有关，$Z(t)$是平稳过程。

6. (4分)设平稳过程$X(t)$的谱密度为$S_X(\omega)$,设$Y(t)=X(t)+X(t-T)$

证明：$Y(t)$的谱密度为 $S_Y(\omega) = 2S_X(\omega)(1 + \cos\omega T)$。

证明：$R_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)]$

$$= E[(X(t) + X(t-T))(X(t+\tau) + X(t+\tau-T))]$$

$$= 2R_X(\tau) + R_X(\tau - T) + R_X(\tau + T) = 2R_X(\tau) + R_X(\tau - T) + R_X(-\tau - T)$$

$$S_Y(\omega) = 2\int_0^{+\infty} [2R_X(\tau) + R_X(\tau - T) + R_X(-\tau - T)] \cos\omega\tau d\tau$$

$$= 2\int_0^{+\infty} 2R_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau + 2\int_0^{+\infty} R_X(\tau - T)\cos\omega\tau d\tau + 2\int_0^{+\infty} R_X(-\tau - T)\cos\omega\tau d\tau$$

$$= 2S_X(\omega) + 2\int_{-T}^{+\infty} R_X(x)\cos\omega(T + x)dx - 2\int_{-T}^{-\infty} R_X(x)\cos\omega(-x - T)dx$$

$$= 2S_X(\omega) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(x)\cos\omega(x + T)dx$$

$$= 2S_X(\omega) + 2\int_0^{+\infty} 2R_X(x)\cos\omega x \cos\omega T dx = 2S_X(\omega) + 2S_X(x)\cos\omega T$$

$$= 2S_X(\omega) + 2S_X(\omega)\cos\omega T = 2S_X(\omega)(1 + \cos\omega T)$$