误差理论

物理量的测量

测量值：*175.0* cm

测量数值　单位

直接测量和间接测量

•误差：测量值与其真值之差。$\Delta X = X - a$

什么是真值?

物理量在一定的条件下客观的真正大小，称为真值，通常用a表示。修正了系统误差后无数次测量值的平均值才等于真值，即

$$a = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

在实际应用中，n不可能→∞，真值也是未知的，

所以实际计算时，常以平均值作为真值的最佳估计值。

对物理量进行n次测量, 得一组测量列 $x_1, x_2,\ldots x_n$.

测量列的平均值

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

对任何测量而言，测量误差是不可避免的。

误差 按特征和表现
- 系统误差 → 确定性（修正）
- 随机误差 → 随机性
- 粗大误差 → 剔除

系统误差

产生系统误差的可能原因

1. 测量仪器本身的缺陷。
2. 实验理论和方法的不完善。
3. 环境影响或没有在规定条件下使用仪器。
4. 实验人员读数时的习惯偏差。

已定系统误差可以修正，修正后为:

实际值＝示值＋修正值

随机误差

- 随机误差服从的统计分布规律，可对随机误差的大小和测量结果的可靠性作出合理的评价

随机误差引起测得值 x_i 分散性用

实验标准偏差 s 表征

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{(n-1)}}$$

不确定度：（重点）

不确定度包含两个方面

（1）多次重复测量中用统计方法计算的A类不确定度，用U_A表示。

（2）用其它非统计方法估算的B类不确定度，例如仪器误差、未定系统误差的估值等，用U_B表示。

A类不确定度 U_A

合成不确定度 $U=\sqrt{U_A{}^2+U_B{}^2}$（单位）

B类不确定度 U_B

本课程取的误差在$\pm U$之间的置信概率是95%

*A*类不确定度

$$U_A = S \times \frac{t}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}} \times \frac{t}{\sqrt{n}}$$

t **分布因子，n为测量次数，置信概率P=0.95**

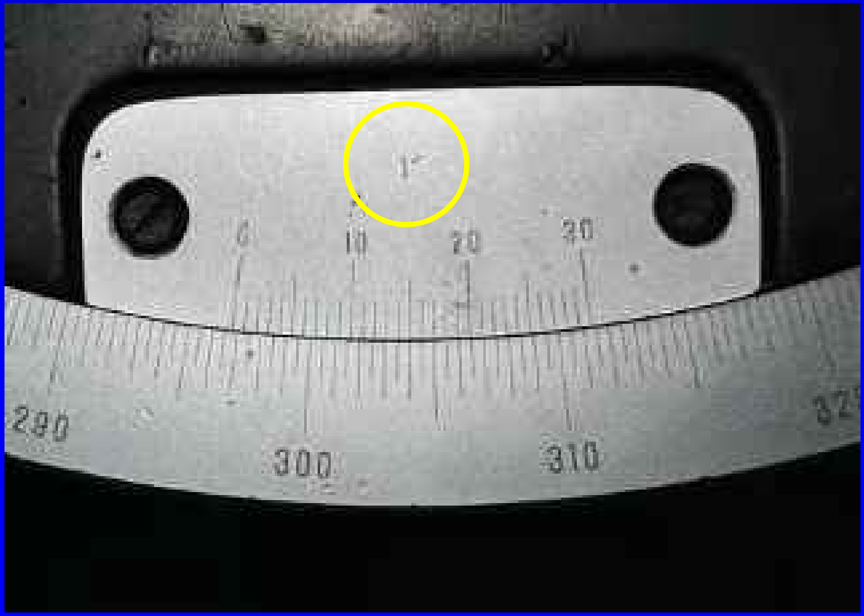
测量次数 n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t因子的值	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26
$\frac{t}{\sqrt{n}}$	8.99	2.48	1.59	1.24	1.05	0.93	0.84	0.77	0.72

B类不确定度 U_B的估算

U_B 通常取仪器误差

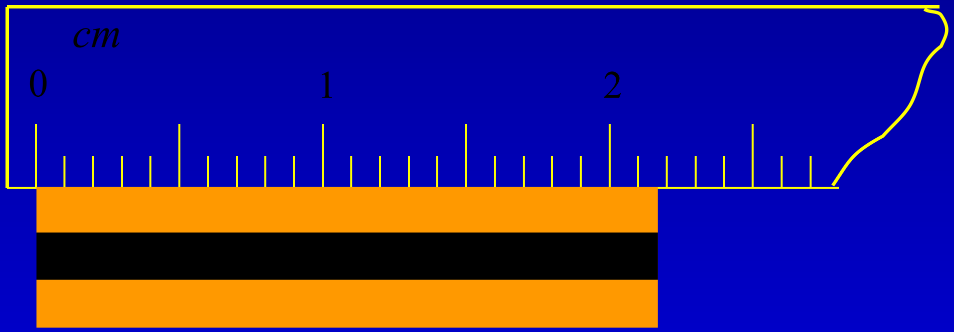
仪器误差是指正确使用的情况下仪器示值的最大误差，通常用Δ_{INS}表示。

仪器误差通常在仪器上标注或者查阅使用说明



有效数字及其运算

有效数字的概念



21.7mm＝0.0217m

1.有效数字定义：

由测量结果的**第一位非零数起**到*最后*一位数字止的全部数字统称为测量的有效数字。

4.60cm=0.0460m≠4.600cm；有效数字为三位。

有效数字位数的多少与测量仪器的精度有关。

采用科学记数法.

科学记数法: $a\times10^{n}$ (单位)

*a*小数点前只取一位，再乘以10的幂次。

测量结果的表达

$$X = \overline{X} \pm U$$

表达一个实验结果，既要给出真值的最佳估值，也要给出所测结果的误差范围。

1、单次直接测量的结果表示

$$N = N_{测} \pm U_B \text{（单位）}$$

U_B取一位或者两位有效数字，尾数只进不舍。

$N_{测}$修约与U_B末位对齐。

$$U = U_B = \Delta_{INS}$$

测量结果尾数的修约规则

- 根据GB8017-87规定的数值修约规则，测量结果尾数的修约原则是：四舍六入五凑偶。
- 即小于5者舍，大于5者入，等于5者把尾数凑成偶数。(5后非零则进1，5后全零凑成偶)

2、多次重复测量结果的表示

$$\mathrm{X}=\overline{\mathrm{X}}\pm\mathrm{U} \qquad \mathrm{U}=\sqrt{\mathrm{U}_A{}^2+\mathrm{U}_B{}^2}$$

$$U_A=S\times\frac{t}{\sqrt{n}} \qquad S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{(n-1)}}$$

$$U_B\approx\Delta_{INS} \qquad \mathrm{U}=\sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}s\right)^2+\Delta_{INS}^2}$$

***U* 取一位或者两位有效数字，尾数只进不舍。**

$\overline{X}$ 的最后一位应于*U*末位对齐。

用50分度的游标卡尺测量圆柱体直径6次，数据如下表。写出结果表达式。

次数	1	2	3	4	5	6
$d_i(mm)$	19.78	19.80	19.72	19.78	19.74	19.76

解：

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{6} d_i}{6} = 19.7633\ mm$$

$$U = \sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{n}} s\right)^2 + \Delta_{INS}^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} (d_i - \bar{d})^2}{6-1}} = 0.0294\ mm$$

$$\Delta_{INS} = 0.02mm$$

不确定度

$$U=\sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}s\right)^2+\Delta_{INS}^2}$$

$$U=\sqrt{(0.0294\times 1.05)^2+0.02^2}$$
$$\approx 0.0368\ mm$$

直径的测量结果

$$d=\overline{d}\pm U_d=(19.763\pm 0.037)mm$$

末位对齐

不确定度、相对不确定度和百分差

（1）不确定度

不确定度反映了测量平均值偏离真值的可能范围，因而测量结果可以表示为

$$x = \bar{x} \pm u \quad \text{（单位）} \qquad (P=P_a)$$

不确定度只取一至二位有效数字，修约时只进不舍

测量结果应依照“四舍六入五凑偶”修约到末位与不确定度末位对齐。

（2）测量结果的相对不确定度表示法

$L_1=(170.00\pm0.30)$ (cm) $E_{r1}=0.18\%$

$L_2=(17.00\pm0.30)$ (cm) $E_{r1}=1.8\%$

为全面评价测量结果的优劣,还应考虑被测量量大小,故引入相对不确定度,E_r。

$$E_r=\frac{U}{\overline{N}}\times 100\ \%$$

E_r 取一至二位有效数字。

(3) 百分差

如待测物理量有公认值或理论值，可用百分差来表示测量的优劣，的定义为：

$$E_0 = \frac{|N - N_0|}{N_0} \times 100\%$$

百分差不表示测量结果的统计意义

其有效数字位数与E_r一样。

间接测量真值和误差的估算

一、间接测量量真值的估算

假设间接测量量$N=f(x, y, z\ldots)$，其中x，y，$z\ldots$为直接测量量

如果 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}\cdots\cdots$ 为直接测量量真值的最佳估值，

则间接测量量的最佳估值

$$\bar{N}=f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\cdots)$$

二、间接测量量不确定度的估算

$$dN=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\ldots\ldots$$

不确定度的传递公式为：

N的不确定度
$$U_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 U_x^{\ 2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 U_y^{\ 2} + \cdots}$$

N的相对不确定度

$$E_r = \frac{U_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2 U_x^{\ 2} + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2 U_y^{\ 2} + \cdots}$$

当函数 $f(x, y, \cdots)$ 中各量间是乘除关系时，利用相对不确定度传递公式计算方便。

间接测量的结果表示

$$N = \overline{N} \pm u_N \quad \text{（单位）}$$

$$\overline{N} = f(\overline{x}, \overline{y}, \cdots)$$

u_N只取一到二位有效数字，尾数只进不舍。

N的最后一位应于u_N末位对齐。

例：用双臂电桥测量低电阻并计算金属材料电阻率的实验得到如下数据：

用千分尺测量铜棒直径数据为

次数	1	2	3	4	5
铜棒d（mm）	3.986	3.988	3.987	3.989	4.000

测量铜棒电阻数据如下：$R_1=R_2=10^4\ (\Omega)$

金属	l(mm)	电流方向+/—	Rs(Ω)	R (Ω)
铜	200	+	0.1	119.61
		—	0.1	119.21

计算铜棒电阻的公式

$$R_x = \frac{R_s R}{R_1}$$

计算铜棒电阻率的公式

$$\rho = \frac{\pi d^2 R_x}{4l}$$

$$\rho = \frac{\pi d^2 R_x}{4l} \qquad U_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 U_x{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 U_y{}^2 + \cdots}$$

$$E_r = \frac{U_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2 U_x{}^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2 U_y{}^2 + \cdots} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial d} = \frac{\pi d R_x}{2l}$$

$$\ln \rho = \ln \pi + 2\ln d + \ln R_x - \ln l \qquad \frac{\partial \ln \rho}{\partial d} = \frac{2}{d}$$

$$U_\rho = \bar{\rho} \cdot \sqrt{\left(\frac{U_{R_x}}{R_x}\right)^2 + 4\left(\frac{U_d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{U_l}{l}\right)^2}$$

★间接测量结果不确定度的计算过程分三步:

1、先求出各直接测量量x，y，…的不确定度u_x，u_y，…;

2、根据函数关系 $N=f(x,y,\cdots)$ ，求出N

写出**ln *N***的全微分式 $\dfrac{dN}{N}=\dfrac{\partial \ln f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial \ln f}{\partial y}dy+\cdots$

3、利用传递公式计算N的相对不确定度

$$E_r=\frac{u_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2 u_x{}^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2 u_y{}^2+\cdots}; \qquad u_N=\bar{N}E_r$$

§1-6数据处理的基本方法

一、列表法

列表记录和处理数据时，应注意

1、表格设计要合理，要简单明了，能完整地记录实验数据。物理量的排列应与测量顺序一致。

2、各标题栏中应注明所列物理量的名称、符号和单位（数据不要重复书写单位）。

3、表中数据要正确反映测量的有效数字。

4、提供与表格有关的说明和参数（表格名称、测量仪器规格、环境条件等），以利于对结果的复查。

5、表格中所列的主要是原始数据，重要的中间计算结果也可列入。

二.作图法

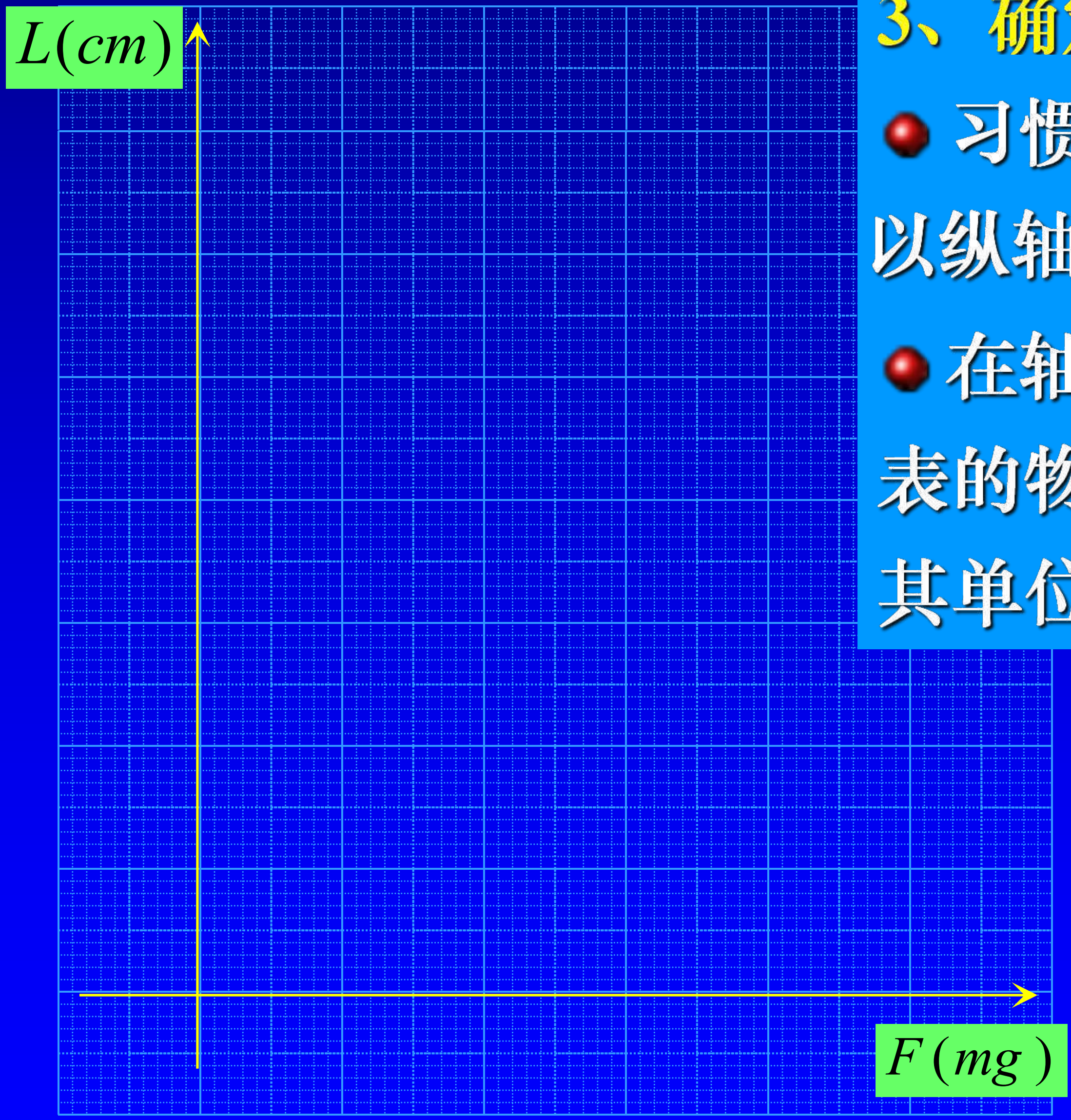
- 作图法就是通过图线将物理量之间的关系直观地表示出来的方法。
- 作好一张正确、实用、美观的图是实验技能训练中的一项基本功。
- 实验作图不是示意图，而是用图来表达实验中得到的物理量之间的定量关系，要反映测量的准确程度，必须满足一定的作图规则。

二、作图的基本规则

1、有完整列有数据的表格。

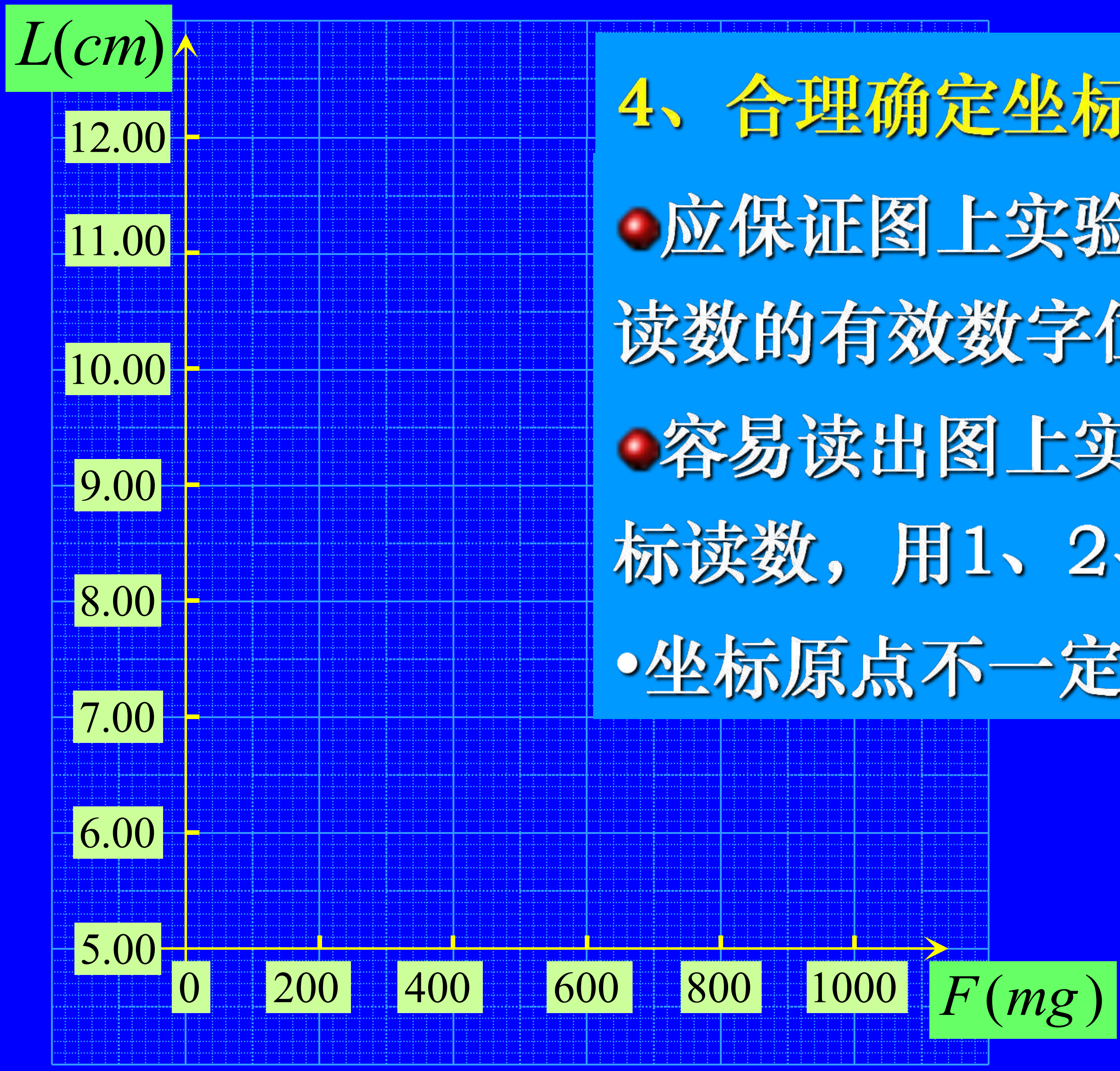
2、选用合适的坐标纸

- 作图必须用坐标纸。
- 根据需要选用合适种类和大小的坐标纸。
- 物理实验中常用的是直角坐标纸（毫米方格纸）。



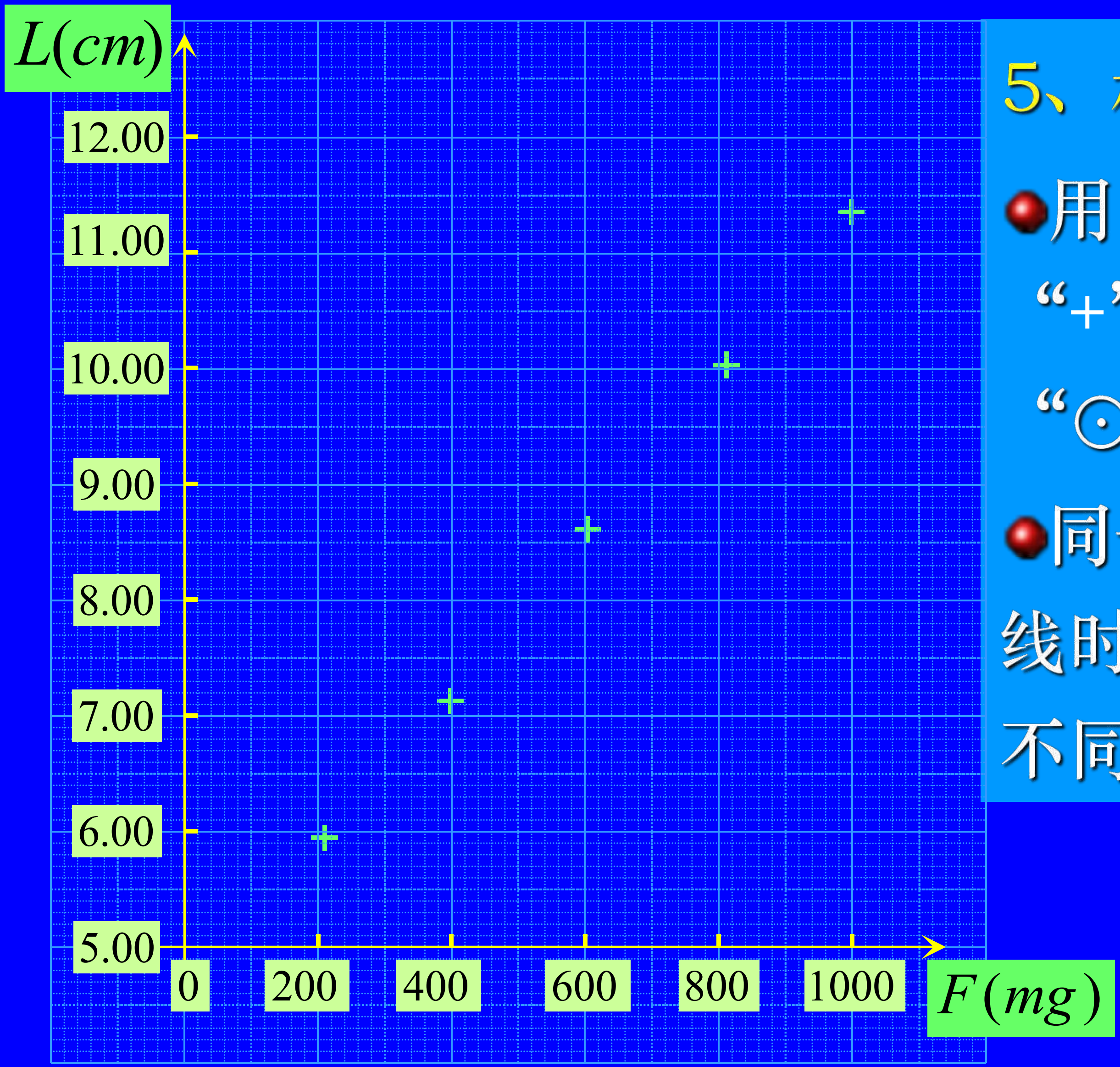
3、确定坐标轴

- 习惯以横轴表示自变量，以纵轴表示因变量。
- 在轴的端部表明其所代表的物理量的名称符号及其单位。



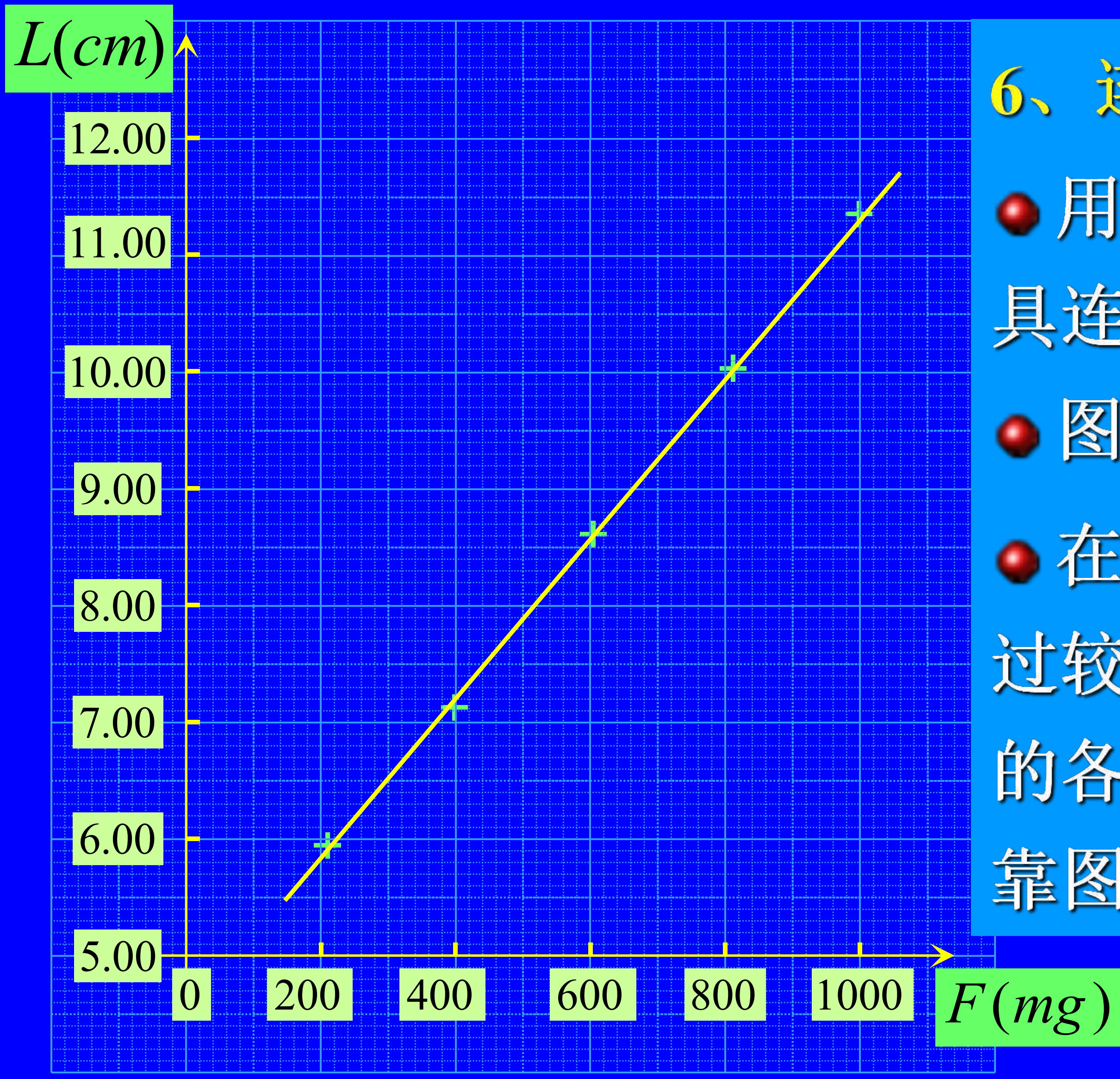
4、合理确定坐标分度

- 应保证图上实验点的坐标读数的有效数字位数不损失。
- 容易读出图上实验点的坐标读数，用1、2、5进行分
- 坐标原点不一定零开始。



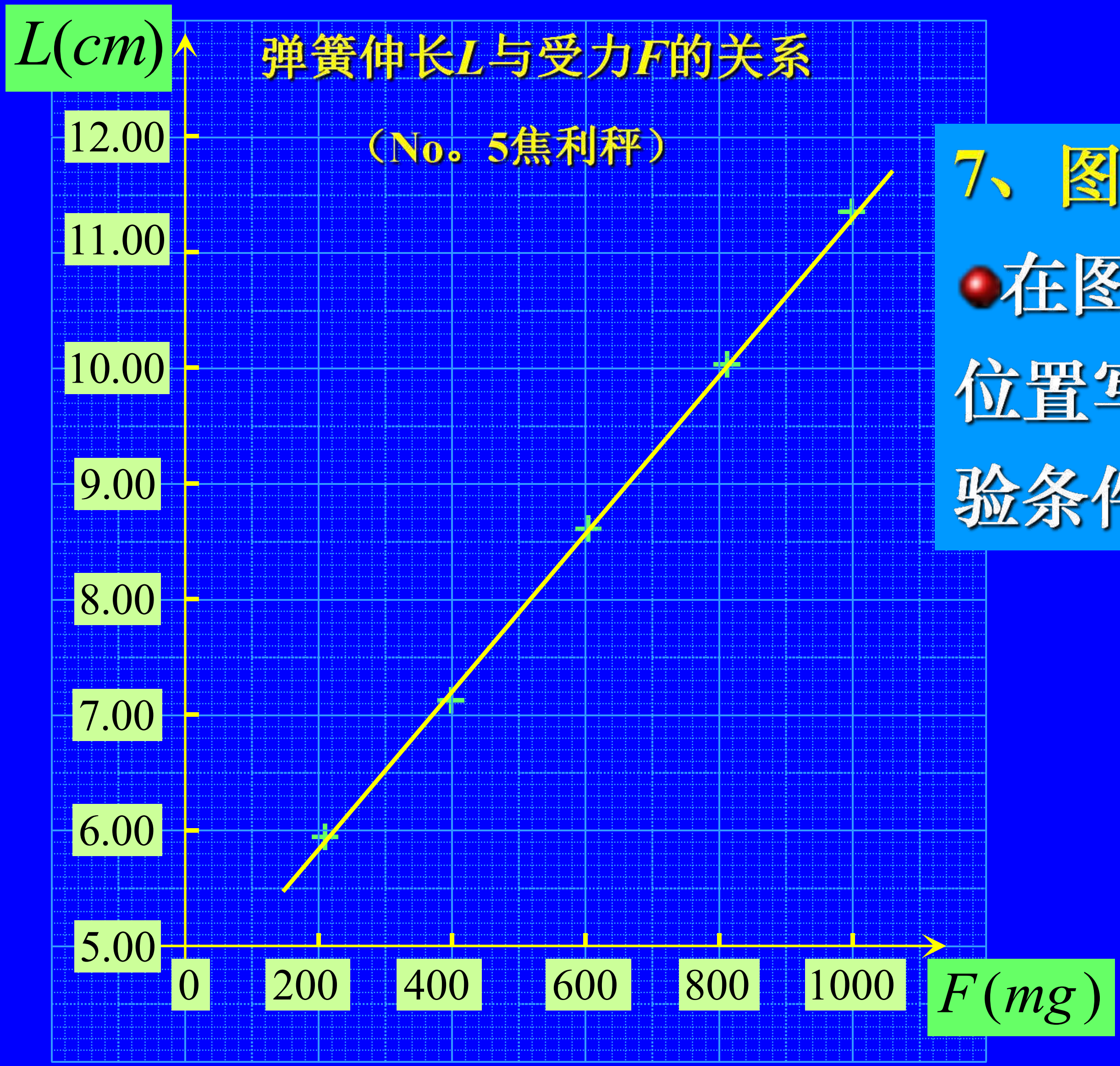
5、标出实验点

- 用削尖的铅笔以“+”、“×”、“⊙”等记号标实验
- 同一图上化几条图线时，每条图线要用不同的符号标记。



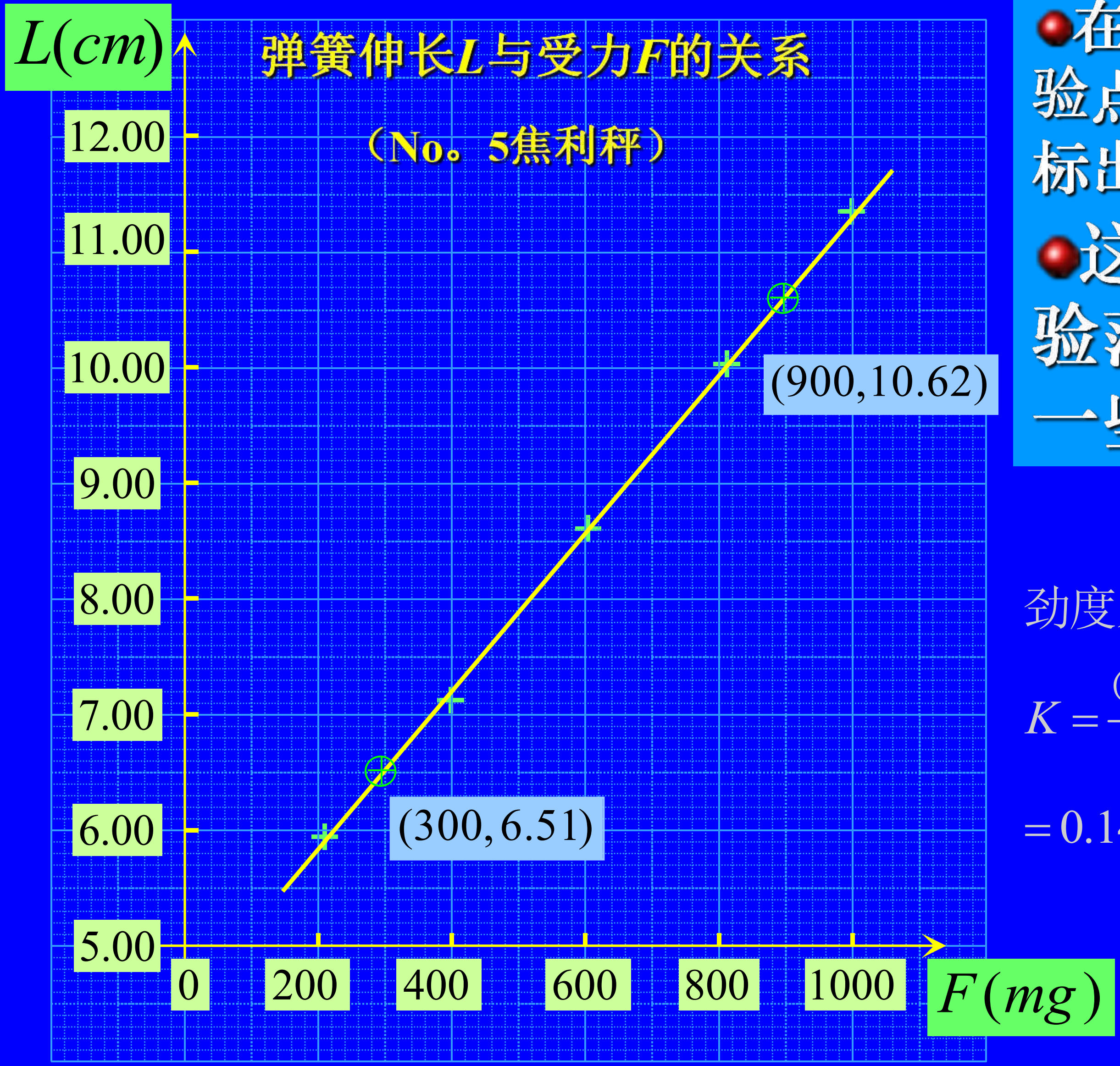
6、连接实验曲线

- 用直尺、曲线板等工具连线。
- 图线应细而光滑。
- 在连线时，尽可能通过较多的点，不在线上的各点应均匀分布在紧靠图线两侧。



7、图注和说明

- 在图纸的明显的位置写出图名和实验条件。



- 在直线选两个非实验点用不同的标号标出。
- 这两点应在实验范围内相距远一些。

劲度系数

$$K=\frac{(900-300)\times 9.794\times 10^{-6}}{(10.62-6.51)\times 10^{-2}}$$

$$=0.143N/m$$

直线图线的图解步骤：

1）在所做直线上选取相距较远的两点，从图上读取其坐标值（x_1，y_1）、（x_2，y_2）。

设直线方程为：
$$y = a + bx$$

2）求斜率b：
$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

3）求截距a：
$$a = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

- 由于绘制图线有一定主观随意性，不需要计算结果的不确定度。

三、逐差法

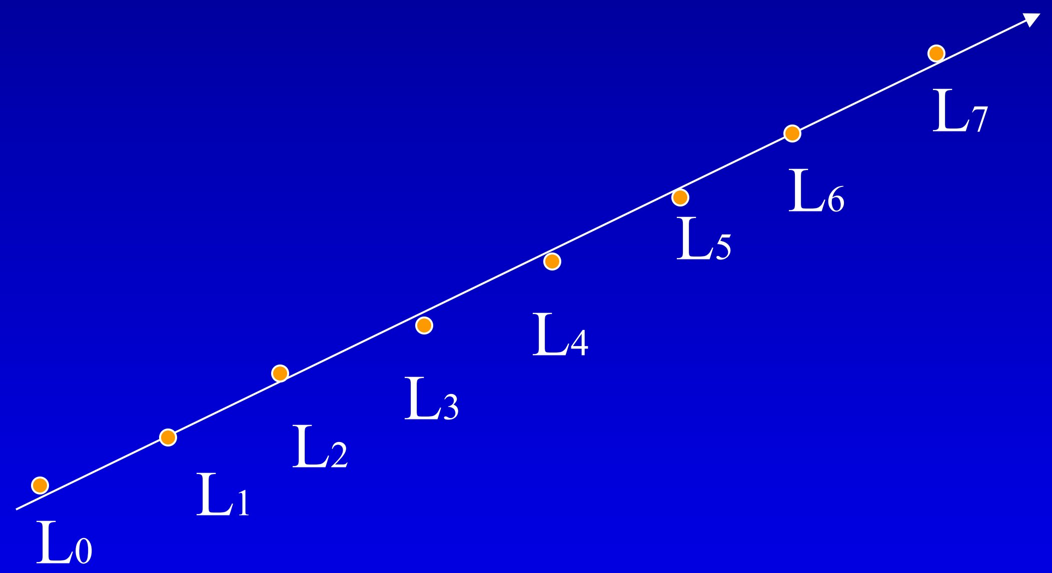
- 逐差法是物理实验中常用的数据处理方法之一，常用于处理**自变量等间距变化**的数据。

- 逐差法就是把实验数据列成表格进行逐次项减，或分成高、低两组对应项相减。

- 前者可验证数据变化的规律。

- 后者可充分利用数据，减少测量误差。

■例如：求△L的平均值



$$\Delta\overline{L}=\frac{1}{7}\left[(L_1-L_0)+(L_2-L_1)+\cdots+(L_7-L_6)\right]$$

$$\boxed{=\frac{1}{7}(L_7-L_0)}$$

中间数据全没用，只有始末两个数据起作用。

这时应将数据分成（L_7，L_6，L_5，L_4）
和（L_3，L_2，L_1，L_0）两组。

$$\Delta\overline{L}=\frac{1}{4}[(L_7-L_3)+(L_6-L_2)\cdots+(L_4-L_0)]$$

这样就充分利用了数据，保持了多次测量的优点。

慕课堂绪论练习题解析

1.实验百分差的计算结果为E_0=0.1704%，修约之后的结果应该是（　）

百分差修约规则：结果保留1到2位有效数字。当计算结果第1位有效数字大于等于5时，修约后结果保留1位有效数字，尾数只进不舍；当计算结果第1位有效数字小于5时，修约后结果保留2位有效数字，尾数只进不舍；

E_0=0.18%

慕课堂绪论练习题解析

2.根据“四舍六入五凑偶”的修约规则，下列哪个一结果修约是正确的（ ）

•即小于5者舍，大于5者入，等于5者把尾数凑成偶数。(5后非零则进1，5后全零凑成偶)

2.5053 保留3为有效数字： 2.50

0.08701 保留4为有效数字： 0.081

17.50501 保留4为有效数字： 17.51

8.65 保留2为有效数字： 8.7

慕课堂绪论练习题解析

3.下列测量的结果中表达式正确的是（　　）

- **修约规则：测量值末位对齐，四舍六入五凑偶；**
- **不确定度，保留1到2位有效数字**

M＝（54.60±0.5）g

L＝（0.667±0.004）m

T＝（17.32±0.21）s

R＝（82.742±0.180）Ω

慕课堂绪论练习题解析

5.某长度测量值为15.10 mm，所用仪器可能是（　　）

实验结果数据的有效数字到哪一位和仪器的精度有关

毫米尺

50分度游标卡尺

千分尺

20分度游标卡尺

10分度游标卡尺

慕课堂绪论练习题解析

4.声速等于声波的声波的频率乘以波长 $v = f \times \lambda$，声波频率 $f = (3.0000 \pm 0.0020) \times 10^4 Hz$，声波波长$\lambda =$（1.1540 ± 0.0030）$\times 10^{-2} m$，下列声速结果表达式正确的是（ ）

间接测量 $N=f(x,y,\cdots)$ 不确定度的传递公式为：

不确定度

$$U_N = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 U_x{}^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 U_y{}^2 + \cdots}$$

相对不确定度

$$E_r = \frac{U_N}{N} = \sqrt{(\frac{\partial \ln f}{\partial x})^2 U_x{}^2 + (\frac{\partial \ln f}{\partial y})^2 U_y{}^2 + \cdots}$$