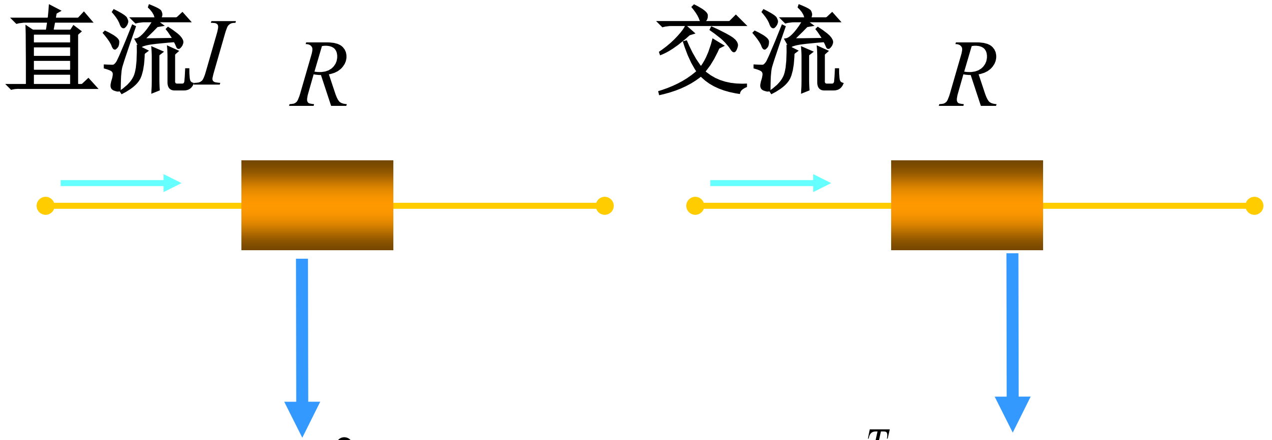
8-1-3 正弦量的有效值

将直流电压或电流和周期电压或电流在一个周期内通过电阻R时的能量作一比较，并将能效相等的<u>直流量</u>称为<u>周期量的有效值</u>。用大写字母表示。

物理意义



$$W = RI^2T \quad = \quad W = \int_0^T R i^2(t)\,\mathrm{d}t$$

有效值
(均方根值)

$$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

定义电压有效值：

$$U \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$$

- 正弦电流、电压的有效值

设 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi)$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}\,t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{\mathrm{m}}^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}\,t}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{\mathrm{m}}^2\frac{1}{2}[1+\cos(2\omega t+2\varphi)]\mathrm{d}\,t}=\frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}=0.707I_{\mathrm{m}}$$

正弦电压$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$的有效值为

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}\,t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_{\mathrm{m}}^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}\,t}=0.707U_{\mathrm{m}}$$

正弦电压、电流的振幅是其有效值的 $\sqrt{2}$ 倍

注意

①工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。因此，在考虑电器设备的耐压水平时应按最大值考虑。

②测量中，交流测量仪表指示的电压、电流读数一般为有效值。

③应严格区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

i，u	瞬时值
I_m, U_m	最大值
I, U	有效值

练习3 已知两个正弦电压

$$u_1 = U_{1m}\cos(1000t - 60^\circ)\text{V}$$

$$u_2 = U_{2m}\sin(1000t + 150^\circ)\text{V}$$

当t=0时，$u_1(0)$=5V,$u_2(0)$=8V,试求这两个正弦电压的振幅、有效值。

微分方程统一形式：

$$\begin{cases} \tau \dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + r(t) = \underline{w(t)} \quad (t>0) \\ r(0^+) \end{cases}$$

正弦信号

$$r(t) = r_h(t) + r_p(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + r_p(t)$$

自然（固有）响应

强制响应

$$\xrightarrow[\text{稳态}]{t \to t_0(>10\tau)} \underline{r(t) = r_p(t) \quad t > t_0}$$

稳态值

正弦信号

与$w(t)$具有相同的函数形式

正弦稳态分析的重要性

1) 正弦信号是最基本的信号，它容易产生、加工和传输。

2）很多实际电路都工作于正弦稳态。例如电力系统的大多数电路。

3)正弦信号是最基本的信号，根据傅里叶级数，或者傅里叶变换，各个复杂信号都可以分解为一系列不同频率（基波分量和各次谐波分量）的正弦信号之和。

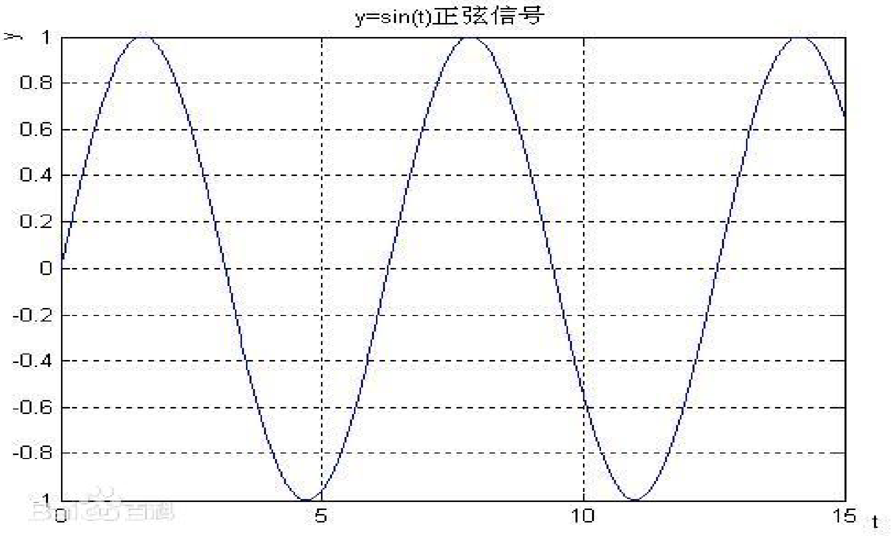
$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

正弦量

一、正弦量及其描述

按**正弦规律**随时间变化的物理量。

图示波形y=sin*t*也能用cos函数描述吗?



1. 正弦量的三要素

基本形式： $\boxed{f(t)=F_m\cos(\omega t+\varphi)}$

F_m ——振幅； (正数)

ω ——角频率； (>0,rad/s)

$\omega t+\varphi$ ——相位； 弧度(rad)或度(°)

φ ——初相位。 $|\varphi|\le\pi$

三要素

2. 角频率、频率、周期的关系

f：频率(Hz)

$T=1/f$ $\qquad$ $\omega=2\pi f$

$\omega=2\pi/T$

T：周期(s) $\qquad$ ω：角频率(rad/s)

钟表
秒针

周期： $T=60$ s

频率： $f=1/T=1/60=0.0167$Hz

角频率: $\omega=2\pi f=0.104$rad/s

【例1】：试求正弦量 $f(t)=-10\sin(100\pi t-\dfrac{\pi}{6})$ 的振幅F_m、初相φ与频率f。

解：将正弦量表达式化为基本形式：

$$f(t)=10\sin(100\pi t-\frac{\pi}{6}+\pi)=10\sin(100\pi t+\frac{5\pi}{6})$$

$$=10\cos(100\pi t+\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2})=10\cos(100\pi t+\frac{\pi}{3})$$

$F_m=10$， $\varphi=\pi/3\text{rad}$,

$\omega=100\pi\text{rad/s}$, $f=\omega/2\pi=50\text{Hz}$

已知正弦电压 $u = -40\sin(314t + \pi/4)$V
试求振幅、周期、频率、角频率和初相；

$$f(t) = 40\sin(314t + \frac{\pi}{4} + \pi) = 40\sin(314t + \frac{5\pi}{4})$$

$$= 40\cos(314t + \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = 40\cos(314t + \frac{3\pi}{4})$$

二、正弦量间的相位差

两个正弦量相位之差，称为相位差。

对于两个同频率的正弦量 $f_1(t)=F_{m\,1}\cos(\omega t+\varphi_1)$

$f_2(t)=F_{m\,2}\cos(\omega t+\varphi_2)$

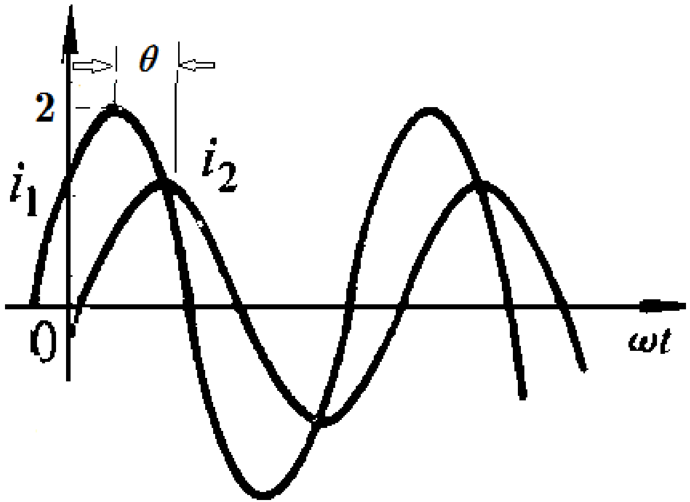
$$\theta=(\omega t+\varphi_1)-(\omega t+\varphi_2)=\varphi_1-\varphi_2$$

两个同频率正弦量在任意时刻的相位差均等于它们初相之差，与时间t无关。

规定：相位差$|\theta|\leq\pi$。否则$\theta\pm2\pi$变换到范围内。

南京邮电大学 Nanjing University of Posts and Telecommunications

【例2】： $i_1(t)=2\cos(\omega t-45°)$，$i_2(t)=1.2\cos(\omega t-100°)$，试求$i_1(t)$与$i_2(t)$间的相位差。



解： $\theta=\varphi_1-\varphi_2=-45°-(-100°)$

$=55°$

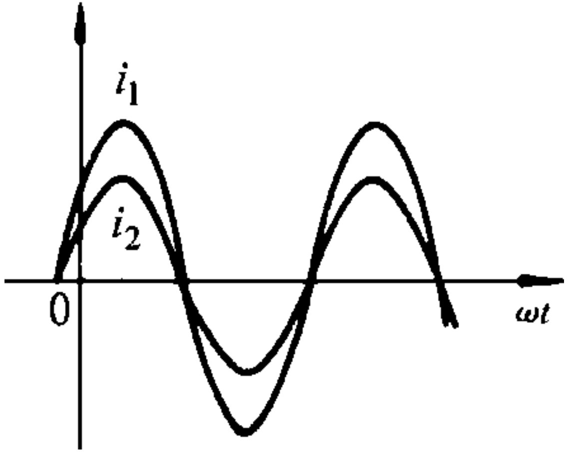
由波形看出： $i_1(t)$超前$i_2(t)$

一般情况：

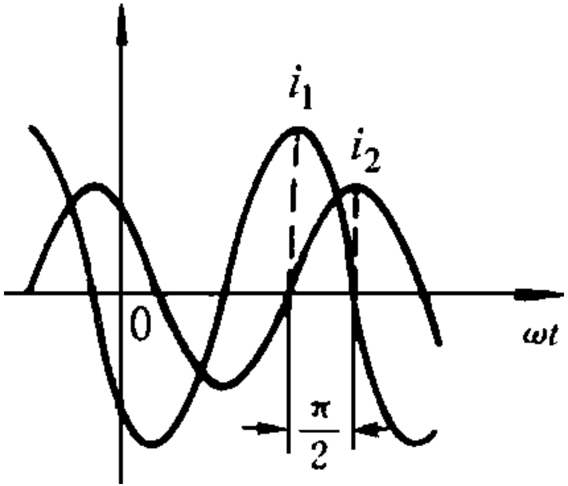
当$\theta>0$时，表明$i_1(t)$超前$i_2(t)$，超前的角度为θ。

当$\theta<0$时，表明$i_1(t)$滞后$i_2(t)$，滞后的角度为$|\theta|$。

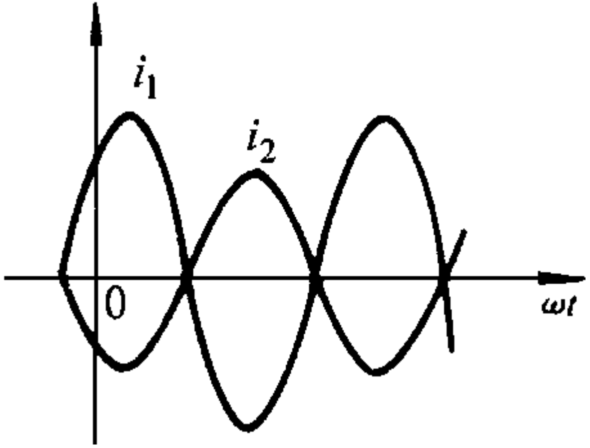
当θ=0时，$i_1(t)$与$i_2(t)$**同相**



当θ=±π/2时，$i_1(t)$与$i_2(t)$**正交**



当θ=±π时，$i_1(t)$与$i_2(t)$**反相**



注意：角频率不同的两个正弦间的相位差为

$$\theta(t)=(\omega_1 t+\phi_1)-(\omega_2 t+\phi_2)=(\omega_1-\omega_2)t+(\phi_1-\phi_2)$$

是时间t的函数，不再等于初相之差。

例 已知正弦电压$u(t)$和电流$i_1(t)$, $i_2(t)$的表达式为

$$u(t)=311\cos(\omega t-180^\circ)\ \mathrm{V}$$

$$i_1(t)=5\cos(\omega t-45^\circ)\ \mathrm{A}$$

$$i_2(t)=10\cos(\omega t+60^\circ)\ \mathrm{A}$$

试求: $u(t)$与$i_1(t)$和$i_2(t)$的相位差。

解: $u(t)$与$i_1(t)$的相位差为 $\theta_1=(-180^\circ)-(-45^\circ)=-135^\circ$

$u(t)$滞后$i_1(t)$ 135°

$u(t)$与$i_2(t)$的相位差为 $\theta_2=(-180^\circ)-60^\circ=-240^\circ+360^\circ=120^\circ$

不能说$u(t)$滞后$i_2(t)$ 240° ， 而是$u(t)$超前$i_2(t)$ 120°

已知两个正弦电压

$$u_1 = U_{1m}\cos(1000t - 60^\circ)V$$

$$u_2 = U_{2m}\sin(1000t + 150^\circ)V$$

试求这两个正弦电压的相位差。

$$u_2 = U_{2m}\sin(1000t + 150^\circ) = U_{2m}\cos(1000t + 150^\circ - 90^\circ)$$

$$= U_{2m}\cos(1000t + 60^\circ)$$

$$\theta = \varphi_1 - \varphi_2 = -60^\circ - 60^\circ = -120^\circ$$

8-2 正弦量的相量表示法

(1) 复数的表示

直角坐标形式：$A=a_1+\mathrm{j}a_2$

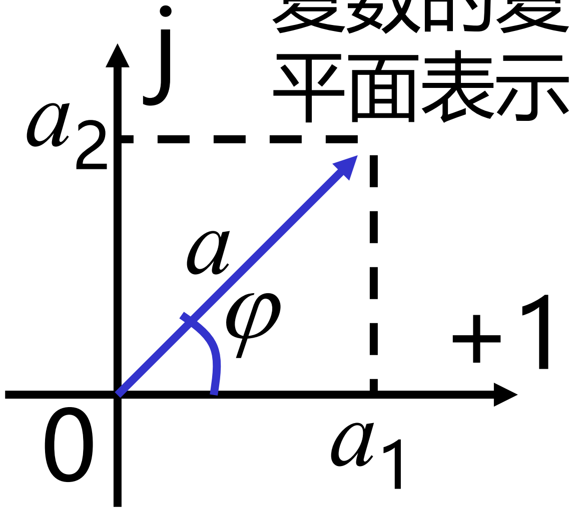
三角形式：$A=a(\cos\varphi+\mathrm{j}\sin\varphi)$

指数形式：$A=a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

极坐标形式：$A=a\angle\varphi$

$a_1=a\cos\varphi \quad a_2=a\sin\varphi$

$$a=|A|=\sqrt{a_1^2+a_2^2} \qquad \varphi=\arctan\frac{a_2}{a_1}$$



复数的复平面表示

(2)复数运算

$A=a_1+\mathrm{j}a_2=a\angle\varphi$， $B=b_1+\mathrm{j}b_2=b\angle\Phi$

加减运算 $A\pm B=a_1\pm b_1+\mathrm{j}(a_2\pm b_2)$

乘法运算 $A\times B=ab\angle(\varphi+\Phi)$

除法运算 $$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}\angle\varphi-\phi$$

相等运算 若$A=B$

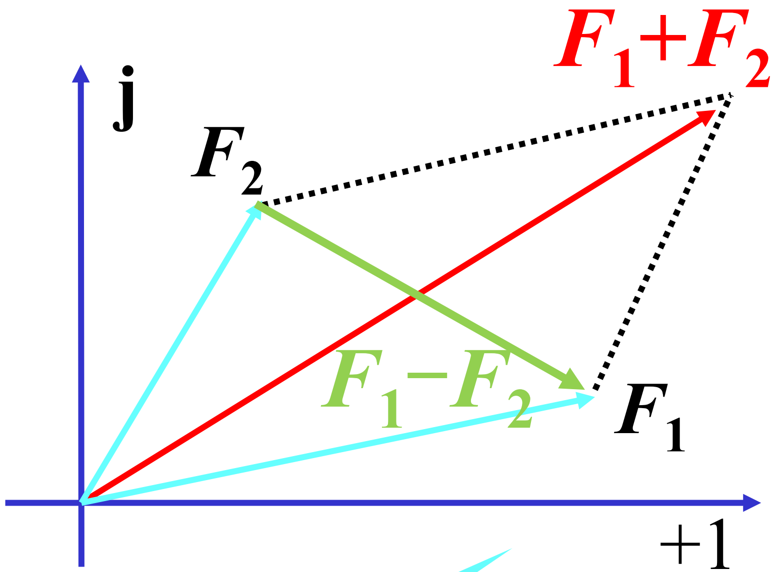
则$a1=b1$， $a2=b2$ 或,$a=b$,$\angle\varphi=\angle\Phi$

模相乘
角相加

模相除
角相减

若 $F_1=a_1+jb_1$， $F_2=a_2+jb_2$

则 $F_1 \pm F_2=(a_1 \pm a_2)+j(b_1 \pm b_2)$



图解法

[例3-2] 已知A=4+j3,B=10∠-60° 。试求：A+B，A-B，A·B，A/B。

解：A=4+j3 =5∠36.9° , B=10∠-60° =5-j8.66

A+B=4+j3+5-j8.66=9-j5.66;

A-B=4+j3-(5-j8.66)=-1+j11.66

A·B=5∠36.9° -10∠-60° =50∠-23.1°

$$\frac{A}{B}=\frac{5\angle 36.9^\circ}{10\angle -60^\circ}=0.5\angle 96.9^\circ$$

或 $$\frac{A}{B}=\frac{4+j3}{5-j5\sqrt{3}}=\frac{(4+j3)(5+j5\sqrt{3})}{(5-j5\sqrt{3})(5+j5\sqrt{3})}=\frac{-5.98+j49.64}{100}$$

8.2.2正弦量的相量（复数）表示

已知

正弦量 $f(t)=F_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$

$$F_{\mathrm{m}}e^{j(\omega t+\varphi)}=F_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)+\mathrm{j}F_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$f(t)=F_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$$

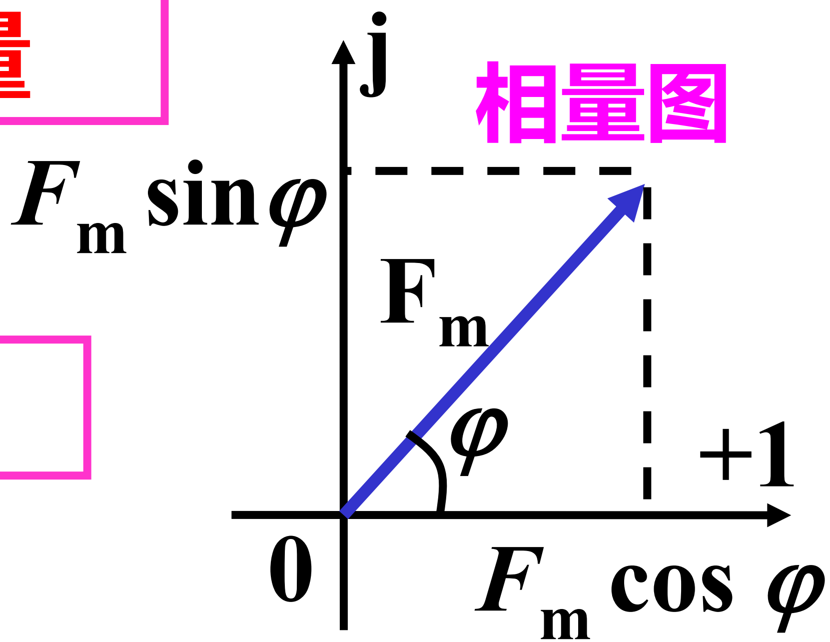
$$=\mathrm{Re}[F_{\mathrm{m}}e^{j(\omega t+\varphi)}]=\mathrm{Re}[F_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{j\varphi}\mathrm{e}^{j\omega t}]$$

$$f(t)=F_m\cos(\omega t+\varphi)=\sqrt{2}F\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=\mathrm{Re}[F_m e^{j(\omega t+\varphi)}]=\mathrm{Re}[F_m e^{j\varphi}e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{F}_m e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{F}e^{j\omega t}]$$

造一个复函数 $$\boxed{\dot{F}_m=F_m e^{j\varphi}=F_m\angle\varphi}$$ 无物理意义

称为：f(t)的振幅相量



$$\dot{F}=Fe^{j\varphi}=F\angle\varphi$$

f(t)的有效值相量

$$\dot{F}_m=\sqrt{2}\dot{F}$$

正弦量与相量的关系

对应关系，不是相等关系！

$$f(t)=F_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)\longleftrightarrow \dot{F}_{\mathrm{m}}=F_{\mathrm{m}}\angle\varphi$$

$$f(t)=\sqrt{2}F\cos(\omega t+\varphi)\longleftrightarrow \dot{F}=F\angle\varphi$$

i, u	瞬时值，正弦量
$I_{\mathrm{m}}, U_{\mathrm{m}}$	最大值，振幅
I, U	有效值

实数

i, u	瞬时值，正弦量
$\dot{I}_{\mathrm{m}}, \dot{U}_{\mathrm{m}}$	振幅相量
$\dot{I}, \dot{U}$	有效值相量

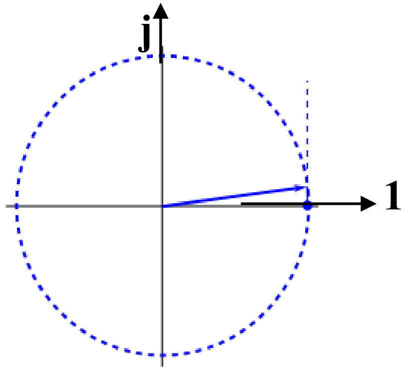
复数

旋转的相量（复数）和正弦量的对应关系

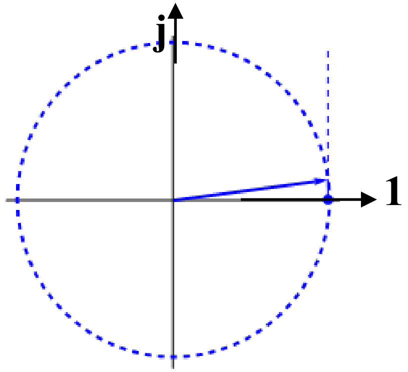
$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \mathrm{Re}[F_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}]$$

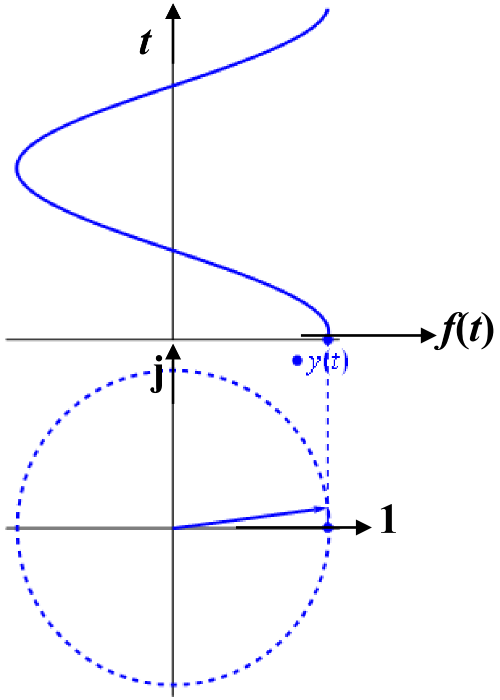
$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi)$$



(1)振幅相量$F_m e^{j\varphi}$



(2)旋转相量$F_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$



(3)投影 $\mathrm{Re}[F_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}]$

结论 $f(t)$是以ω沿反时针旋转相量 $F_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$在实轴投影

正弦量和相量转换步骤：

$$f(t)=4\cos(5t+30^\circ)$$

振幅相量：$\dot{F}_\mathrm{m}=4\angle 30^\circ$

有效值相量：$\dot{F}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\angle 30^\circ=2\sqrt{2}\angle 30^\circ$

例 4　已知电流 $i_1(t)$=5cos(314t+60°)A　，$i_2(t)$=-10sin(314t+60°)A。写出它们的振幅相量，并求它们的振幅和有效值，画出相量图。

解：　$\dot{I}_{1\mathrm{m}} = 5\angle 60^\circ\ \mathrm{A}$

$$i_2(t) = -10\sin(314t + 60^\circ) = -10\cos(314t - 30^\circ)$$

$$= 10\cos(314t + 150^\circ) \longrightarrow \dot{I}_{2\mathrm{m}} = 10\angle 150^\circ\ \mathrm{A}$$

１。试求下列正弦量的振幅相量和有效值相量

$$(1)\quad i_1(t) = 5\cos\omega t\,\text{A}$$

$$(2)\quad i_2(t) = -10\cos(\omega t + \pi/2)\,\text{A}$$

２。试写出下列相量所代表的正弦量。已知 $\omega = 314 rad/s$

$(1)\dot{I} = 10\angle\frac{\pi}{2}\ \text{A}$ $(2)\dot{I}_{\text{m}} = 10\angle\frac{\pi}{2}\ \text{A}$

$(3)\ \dot{\text{U}} = 4 + j4\text{V}$ $(4)\ \dot{\text{U}}_{\text{m}} = 4 + j4\text{V}$

基尔霍夫定律的相量形式

一、基尔霍夫电流定律的相量形式

$$\text{KCL:}\quad \sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0$$

电路中全部电流都具有同一频率ω，则

$$i_k(t) = \sqrt{2} I_k \cos(\omega t + \varphi_k)$$

$$= \mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{I}_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

代入KCL，得

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{I}_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{2}\dot{I}_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]) = 0$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0 \quad \text{或} \quad \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_{km} = 0}$$

相量形式的KCL定律： $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0 \quad \text{或} \quad \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_{km} = 0}$

对于具有相同频率的正弦电路中的任一节点，流出该节点的全部支路电流相量的代数和等于零。

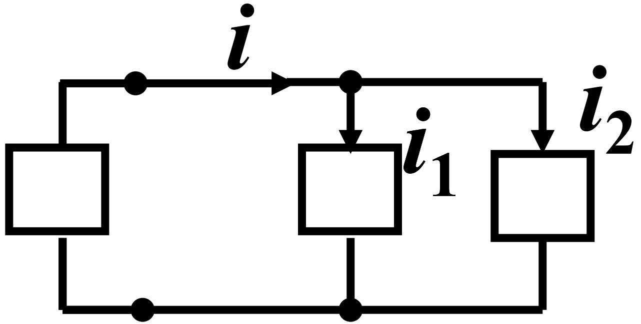
(1) 流出任一节点的全部支路电流振幅(或有效值)的代数和并不一定等于零。$\sum_{k=1}^{n} I_{km} \neq 0 \quad \sum_{k=1}^{n} I_k \neq 0$

(2) 若流出节点的电流取“+”号，则流入节点的电流取“-”号。

【例1】：已知图中电流$i_1(t)=10\sqrt{2}\cos(\omega t+60°)$A，$i_2(t)=5\sqrt{2}\sin(\omega t)$A。试求电流有效值相量及其$i(t)$。

解：有效值相量: $\dot{I}_1=10\angle 60°$A

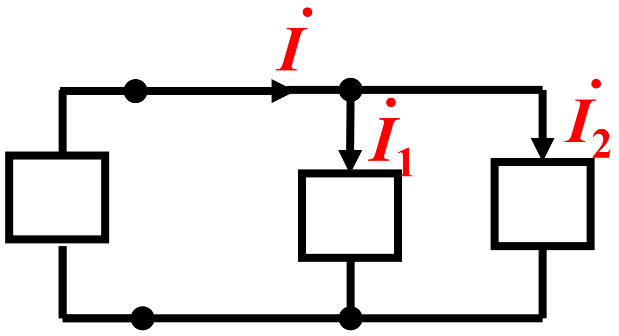
$\dot{I}_2=5\angle -90°$A。作相量模型



【例1】：已知图中电流$i_1(t)=10\sqrt{2}\cos(\omega t+60°)\text{A}$，$i_2(t)=5\sqrt{2}\sin(\omega t)\text{A}$。试求电流有效值相量及其$i(t)$。

解： 有效值相量：$\dot{I}_1=10\angle 60°\text{A}$

$\dot{I}_2=5\angle -90°\text{A}$。作相量模型



相量KCL　$-\dot{I}+\dot{I}_1+\dot{I}_2=0$

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=10\angle 60°+5\angle -90°$$

【例1】：已知图中电流$i_1(t)=10\sqrt{2}\cos(\omega t+60°)$A，$i_2(t)=5\sqrt{2}\sin(\omega t)$A。试求电流有效值相量及其$i(t)$。

解： 有效值相量: $\dot{I}_1=10\angle 60°$A

$\dot{I}_2=5\angle -90°$A。作相量模型

相量KCL $\quad -\dot{I}+\dot{I}_1+\dot{I}_2=0$

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=10\angle 60°+5\angle -90°$$

$$I=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta=arctg\frac{b}{a}$$

$$I\angle\theta \qquad a+jb$$

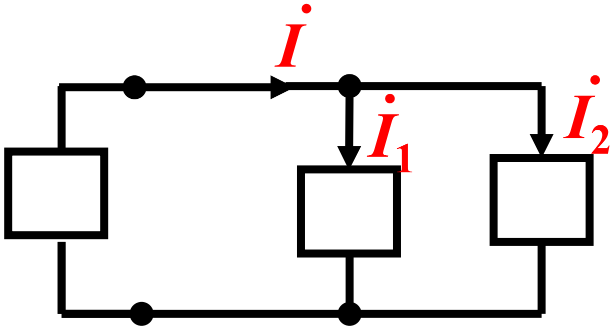
$$a=I\cos\theta$$

$$b=I\sin\theta$$

【例1】：已知图中电流$i_1(t)=10\sqrt{2}\cos(\omega t+60°)$A，$i_2(t)=5\sqrt{2}\sin(\omega t)$A。试求电流有效值相量及其$i(t)$。

解：有效值相量：$\dot{I}_1=10\angle 60°$A

$\dot{I}_2=5\angle -90°$A。作相量模型

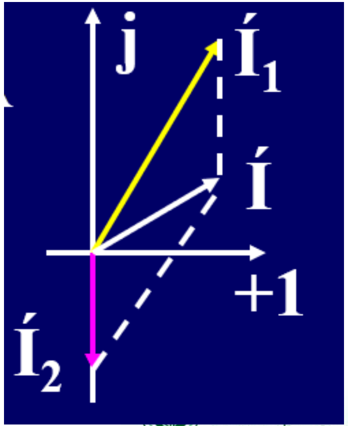


相量KCL $-\dot{I}+\dot{I}_1+\dot{I}_2=0$

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=10\angle 60°+5\angle -90°$$

$$=5+j8.66-j5=5+j3.66=6.2?36.2°\text{A}$$

$$i(t)=6.2\sqrt{2}\cos(\omega t+36.2°)\text{A}$$



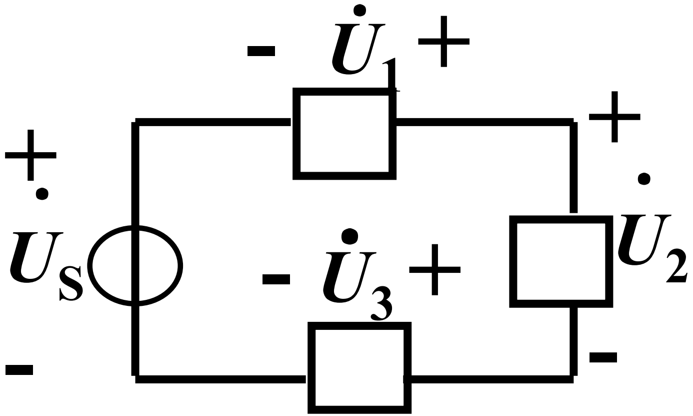
二、基尔霍夫电压定律的相量形式

$$\text{KVL:}\ \sum_{k=1}^{n} u_k(t) = 0 \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \dot{U}_k = 0 \quad \text{或} \quad \sum_{k=1}^{n} \dot{U}_{km} = 0$$

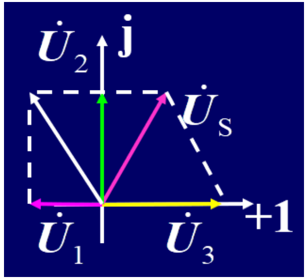
相量形式的KVL定律：对于具有相同频率的正弦电流电路中的任一回路，沿该回路全部支路电压相量的代数和等于零。

【例2】：已知$\dot{U}_1=6\angle 0°\text{V}$，$\dot{U}_2=8\angle 90°\text{V}$，$\dot{U}_3=12\angle 0°\text{V}$。试求电压有效值相量$\dot{U}_S$。

解：相量形式KVL:



$$\dot{U}_S = -\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3$$
$$= -6\angle 0° + 8\angle 90° + 12\angle 0°$$
$$= -6 + j8 + 12 = 6 + j8$$
$$= 10\angle 53.1°\text{V}$$



电路元件伏安关系的相量形式

1. 电阻

时域：　$u(t) = R\,i(t)$

设 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi_i)$，　$u(t)=U_m\cos(\omega t+\phi_u)$则

$$u(t) = U_m\cos(\omega t+\phi_u) = Ri(t) = RI_m\cos(\omega t+\phi_i)$$

$$\mathrm{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = R\,\mathrm{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[R\dot{I}_m e^{j\omega t}]$$

$$\boxed{\dot{U}_m = R\dot{I}_m}$$

$$\boxed{\dot{U} = R\dot{I}}$$

$$u(t) = R\,i(t)$$

$$\dot{U}_{\mathrm{m}} = R\dot{I}_{\mathrm{m}}$$

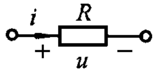
$$\dot{U} = R\dot{I}$$

$U_{\mathrm{m}} = RI_{\mathrm{m}}$ 或 $U = RI$

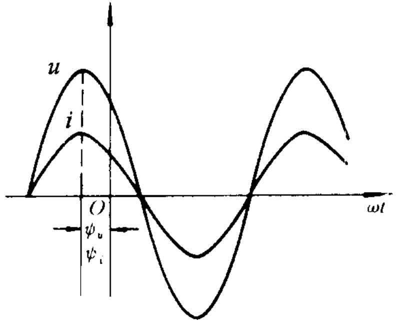
$\phi_{\mathrm{u}} = \phi_{\mathrm{i}}$

时域

复数域

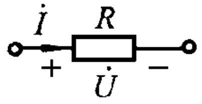


(a)

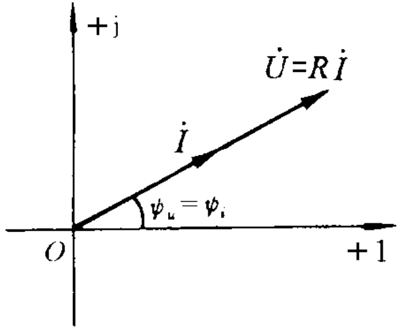


(b)

电阻的相量模型



(a)



(b)

在任一时刻，电压的瞬时值是电流的R倍，电压与电流同相位

2. 电容元件伏安关系的相量形式

VCR: $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

$$u(t) = U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi_{\mathrm{u}}) = \mathrm{Re}[\dot{U}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$i(t) = I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) = \mathrm{Re}[\dot{I}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{U}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$= \mathrm{Re}[\sqrt{2}\,C\dot{U}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{\mathrm{j}\omega t})] = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\mathrm{j}\omega C\dot{U}e^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\boxed{\dot{I} = \mathrm{j}\omega C\dot{U}}$$

$$\boxed{\dot{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}}$$

$$\boxed{\dot{I} = j\omega C\dot{U}}$$

或

$$\boxed{\dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}}$$

$$\because \dot{U} = U\angle\phi_{\mathrm{u}},\ \dot{I} = I\angle\phi_{\mathrm{i}},\ j\omega C = \omega C\angle 90^{\circ}$$

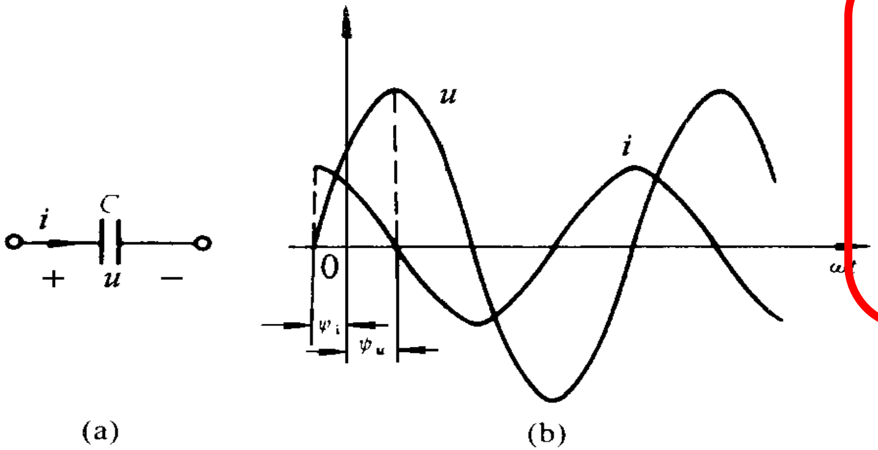
$$I = \omega C U$$

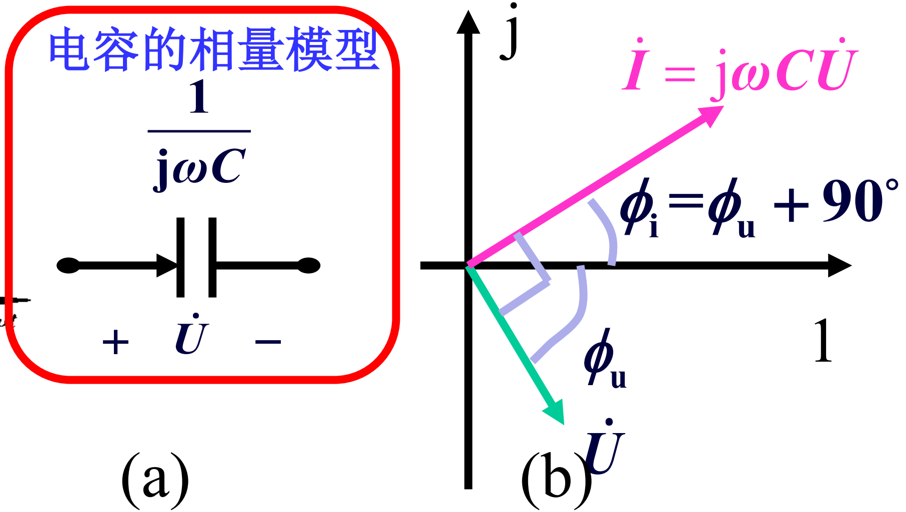
$$\phi_{\mathrm{i}} = \phi_{\mathrm{u}} + 90^{\circ}$$

容抗： $X_c = \dfrac{U}{I} = \dfrac{U_m}{I_{\mathrm{m}}} = \dfrac{1}{\omega c}$

容纳： $B_c = \dfrac{I}{U} = \dfrac{I_m}{U_m} = \omega c$

$\dot{U} = -jX_c\dot{I}$ 或 $\dot{I} = jB_c\dot{U}$





由此可看出**电容电流超前于电容电压90°**

3. 电感元件伏安关系的相量形式

$$\dot{I} = \frac{1}{j\omega L}\dot{U}$$

或

$$\dot{U} = j\omega L\,\dot{I}$$

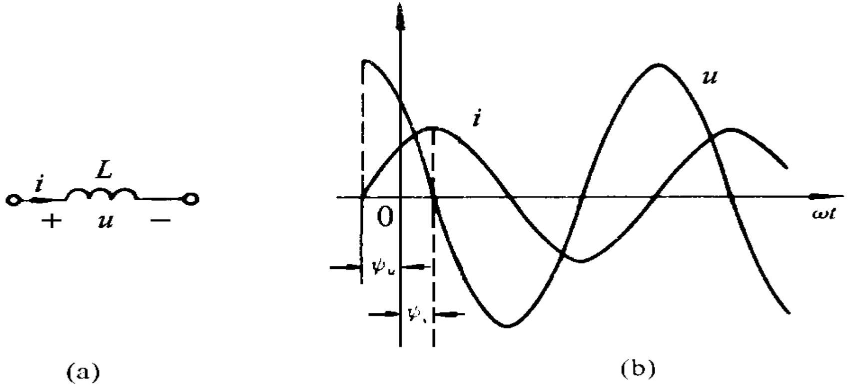
$$\because \dot{U} = \mathrm{U}\angle\phi_{\mathrm{u}},\ \dot{\mathrm{I}} = I\angle\phi_{i},\ j\omega L = \omega L\angle 90^{\circ}$$

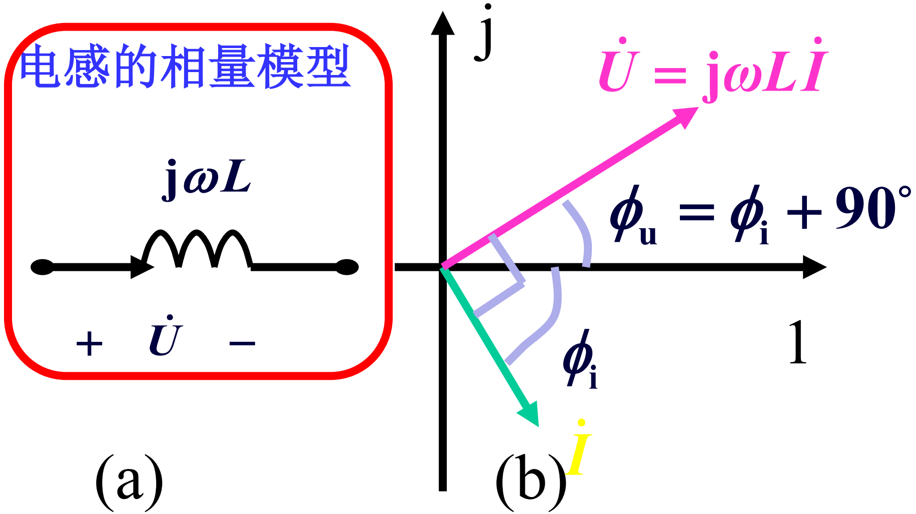
感抗 $X_L = \dfrac{U}{I} = \omega L$

$$U = \omega L I$$

$$\phi_{\mathrm{u}} = \phi_{\mathrm{i}} + 90^{\circ}$$

感纳 $B_L = \dfrac{I}{U} = \dfrac{1}{\omega L}$





可看出电感电压超前于电流90°，当电感电流由负值增加经过零点时，其电压达到正最大值.

统一

电阻 → $\dot{U} = R\dot{I}$

电容 → $\dot{U} = \dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}$

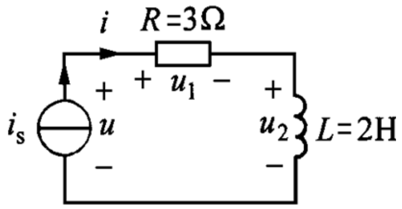
电感 → $\dot{U} = j\omega L\dot{I}$

欧姆定律 Ω

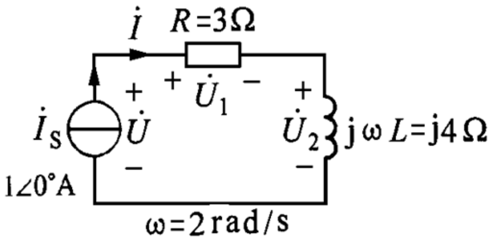
复数域里，电阻、电容和电感的电压电流关系具有同样的数学形式，符合欧姆定律形式。

例1 图示电路，已知 $i_S(t)=\sqrt{2}\cos 2t\text{A}$

求: $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u(t)$**及有效值相量。**



(a)

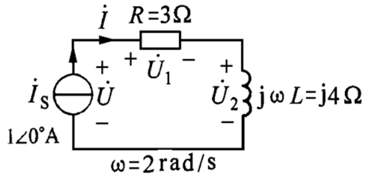


(b)

解：相量模型如图(b)，根据相量形式的KCL求电流相量

$$\dot{I}=\dot{I}_S=1\angle 0^{\circ}\text{A}=1\text{A}$$

根据相量形式的VCR，得：



(b)

$$\dot{U}_1=R\dot{I}=R\dot{I}_S=3\times1\angle0^\circ=3\angle0^\circ\,\mathrm{V}$$

$$\dot{U}_2=\mathrm{j}\omega L\,\dot{I}=\mathrm{j}2\times2\times1\angle0^\circ=\mathrm{j}4=4\angle90^\circ\,\mathrm{V}$$

根据相量形式的KVL，得到

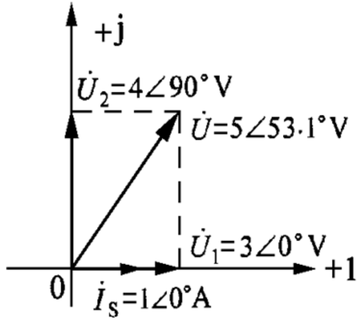
$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=3+\mathrm{j}4=5\angle53.1^\circ\,\mathrm{V}$$

时域表达式

$$u_1(t)=3\sqrt{2}\cos 2t\ \mathrm{V}$$

$$u_2(t)=4\sqrt{2}\cos(2t+90^\circ)\ \mathrm{V}$$

$$u(t)=5\sqrt{2}\cos(2t+53.1^\circ)\ \mathrm{V}$$



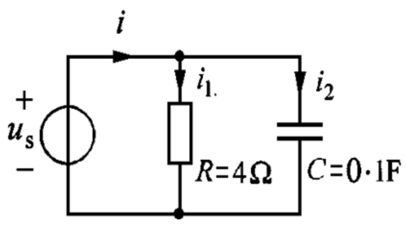
(c)

相量图如图(c)所示。

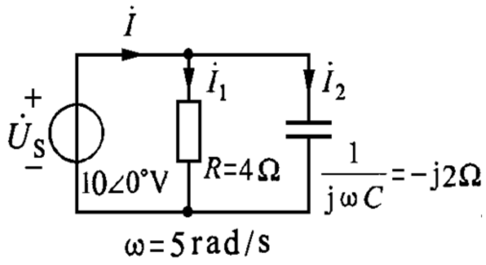
例8 电路如图(a)所示,已知

$$R=4\Omega, C=0.1\text{F}, u_S(t)=10\sqrt{2}\cos 5t\ \text{V}$$

求： $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i(t)$及其有效值相量。



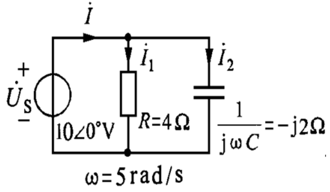
(a)



(b)

解:相量模型如图(b),电压相量$\dot{U}_S=10\angle 0^\circ\text{V}$ 根据RLC元件相量形式的VCR方程求电流。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_S}{R}=\frac{10\angle 0^\circ}{4}=2.5\angle 0^\circ=2.5\text{A}$$



(b)

$$\dot{I}_2=j\omega C\dot{U}_S=j5\times 0.1\times 10\angle 0^\circ=j5=5\angle 90^\circ\ \text{A}$$

相量形式的KCL，得到

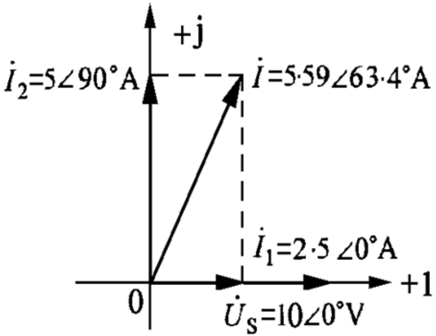
$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=2.5+j5=5.59\angle 63.4^\circ\ \text{A}$$

时域表达式：

$$i_1(t)=2.5\sqrt{2}\cos 5t\ \text{A}$$

$$i_2(t)=5\sqrt{2}\cos(5t+90^\circ)\ \text{A}$$

$$i(t)=5.59\sqrt{2}\cos(5t+63.4^\circ)\ \text{A}$$

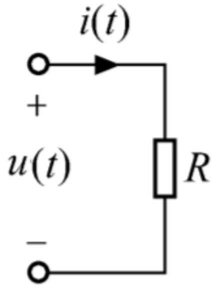


(c)

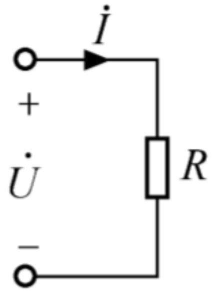
相量图如图(c)所示。

RLC元件VCR关系

时域 | **复数域**



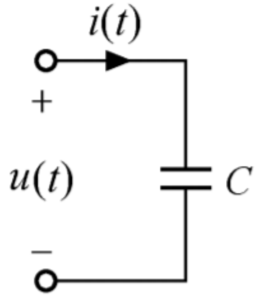
$$u(t) = Ri(t)$$



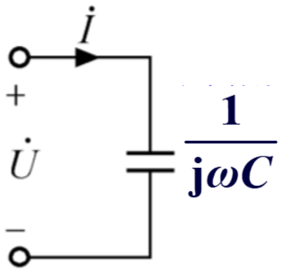
$$\dot{U} = R\dot{I}$$

$$\varphi_u - \varphi_i = 0$$

同相
电阻性



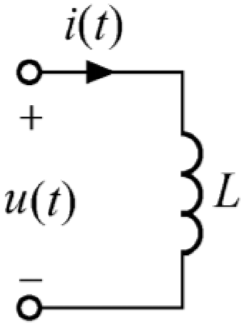
$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$



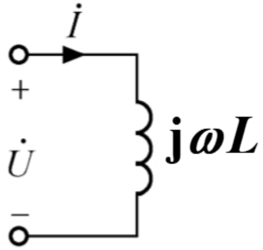
$$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

$$\varphi_u - \varphi_i = -90^\circ < 0$$

容性



$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



$$\dot{U} = j\omega L\dot{I}$$

$$\varphi_u - \varphi_i = 90^\circ > 0$$

感性

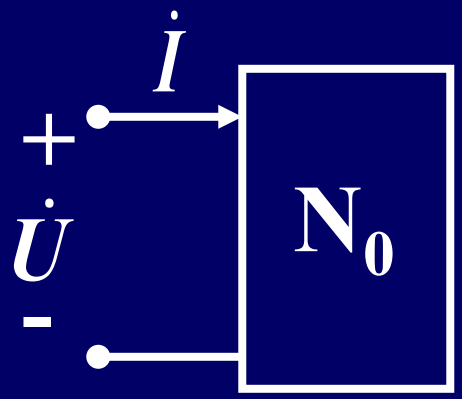
根据相位，判断课后作业8-10元件性质

8-4 阻抗与导纳

一般无源二端网络N_0相量模型

阻抗： $Z(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=\dfrac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}$ 单位：Ω

导纳： $Y(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\dot{I}}{\dot{U}}$ 单位：S



显然： $Z=\dfrac{1}{Y}$ $Y=\dfrac{1}{Z}$

可得**欧姆定律**的**相量形式**：

$$\boxed{\dot{U}=Z\dot{I} \quad \dot{I}=Y\dot{U}}$$

电压与电流相量之比是一个与时间无关，与频率相关的量，是**复数**。

特殊情况：Z或者Y只有实部或者虚部，即RLC元件。

RLC元件电压与电流相量间的关系类似欧姆定律。

RLC元件的阻抗

$$\dot{U}_{\mathrm{R}} = R\dot{I}_{\mathrm{R}} \qquad Z_R = \frac{\dot{U}_{\mathrm{R}}}{\dot{I}_{\mathrm{R}}} = R$$

$$\dot{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_{\mathrm{L}} \qquad Z_L = \frac{\dot{U}_{\mathrm{L}}}{\dot{I}_{\mathrm{L}}} = \mathrm{j}\omega L$$

$$\dot{U}_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_{\mathrm{C}} \qquad Z_C = \frac{\dot{U}_{\mathrm{C}}}{\dot{I}_{\mathrm{C}}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

RLC元件的导纳

$$\dot{I}_{\mathrm{R}} = G\dot{U}_{\mathrm{R}} \qquad Y_R = \frac{\dot{I}_{\mathrm{R}}}{\dot{U}_{\mathrm{R}}} = G$$

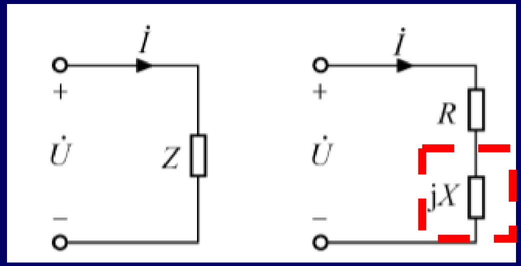
$$\dot{I}_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\dot{U}_{\mathrm{L}} \qquad Y_L = \frac{\dot{I}_{\mathrm{L}}}{\dot{U}_{\mathrm{L}}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{C}} = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_{\mathrm{C}} \qquad Y_C = \frac{\dot{I}_{\mathrm{C}}}{\dot{U}_{\mathrm{C}}} = \mathrm{j}\omega C$$

电阻元件的阻抗和导纳只有实部，电容和电感元件阻抗和导纳只有虚部。

一般情况： $Z = R + \mathrm{j}X = |Z|\angle\theta_Z = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = \dfrac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i} = \dfrac{U}{I}\angle\varphi_u - \varphi_i$

实部R:电阻分量，虚部X:电抗分量



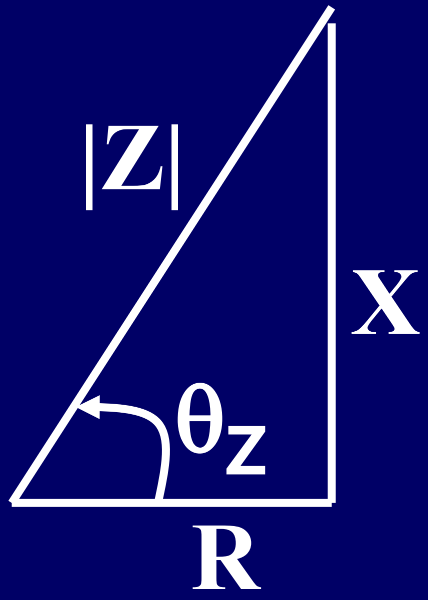
幅角 $\theta_Z = \varphi_u - \varphi_i$**：<u>阻抗角</u>**(-90° ~ 90°)

阻抗的模 $|Z| = U/I$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \theta_Z = arctg\frac{X}{R}$$

$$R = |Z|\cos\theta_Z \qquad X = |Z|\sin\theta_Z$$

$$= \frac{U}{I}\cos\theta_Z \qquad = \frac{U}{I}\sin\theta_Z$$



阻抗三角形

当$X>0$时，$\theta_Z>0$，端口电压超前电流，网络呈感性，电抗元件X可等效为一个电感；

$$X=\omega L$$

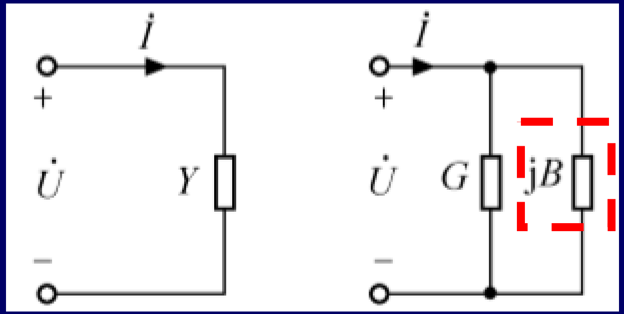
当$X<0$时，$\theta_Z<0$，端口电流超前电压，网络呈容性，电抗元件X可等效为一个电容；

$$\left|X\right|=\frac{1}{\omega C}$$

当$X=0$时，$\theta_Z=0$，端口电压与电流同相，网络呈电阻性，可等效为一个电阻。

$$Y = |Y|\angle\theta_Y = G + jB = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I\angle\varphi_i}{U\angle\varphi_u} = \frac{I}{U}\angle\varphi_i - \varphi_u$$

实部G：电导分量，虚部B：电纳分量，

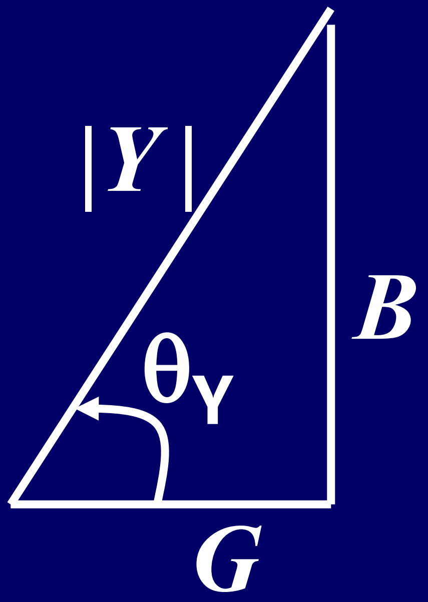


导纳角： $\theta_Y = \varphi_i - \varphi_u = -\theta_Z$, **模：** $|Y| = I/U$

$$|Y| = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2 + B^2} \qquad \theta_Y = arctg\frac{B}{G}$$

$$G = |Y|\cos\theta_Y \qquad B = |Y|\sin\theta_Y$$

$$= \frac{I}{U}\cos\theta_Z \qquad = -\frac{I}{U}\sin\theta_Z$$



导纳三角形：

当$B>0$时，$\theta_Y>0$，端口电流超前电压，网络呈容性，电纳元件B可等效为一个电容；

$$B=\omega c$$

当$B<0$时，$\theta_Y<0$，端口电压超前电流，网络呈感性，电纳元件B可等效为一个电感；

$$|B|=\frac{1}{\omega L}$$

当$B=0$时，$\theta_Y=0$，端口电压与电流同相，网络呈电阻性，可等效为一个电阻。

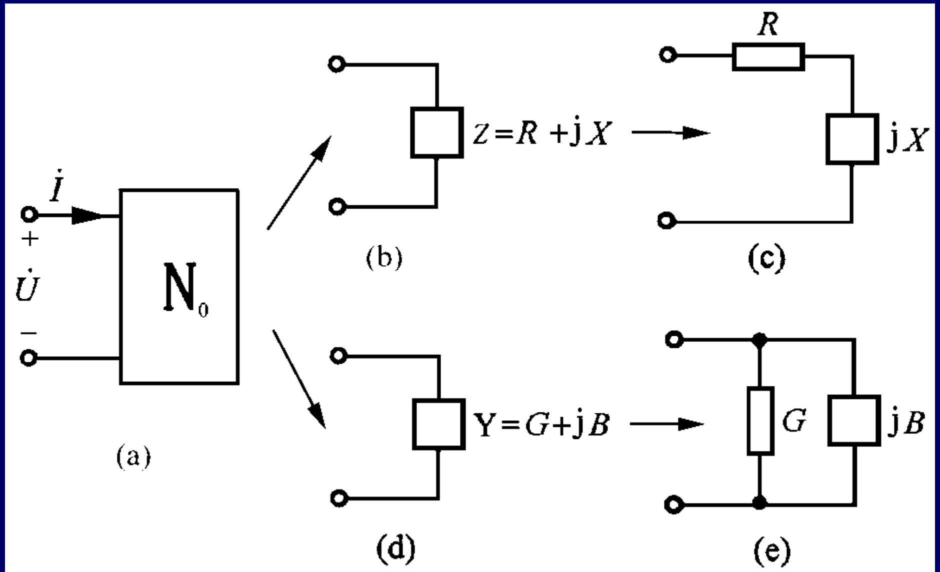
二、无源网络两种等效电路

- 阻抗$Z=R+jX$,

电阻R与电抗jX串联电路

- 导纳$Y=G+jB$,

电导G与电纳jB并联电路

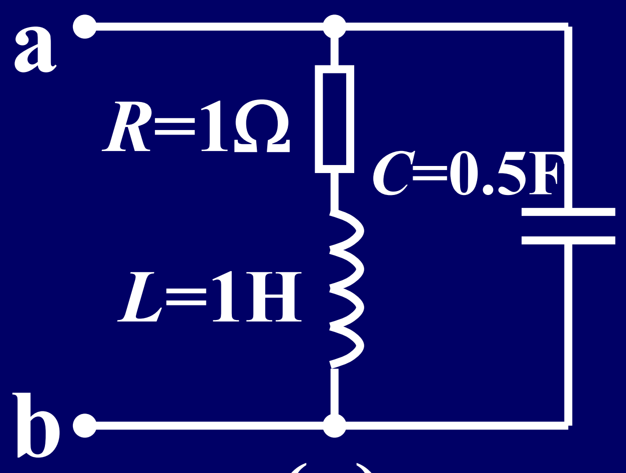


注意，在一般情况下：

$$R \neq \frac{1}{G}, \quad R = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

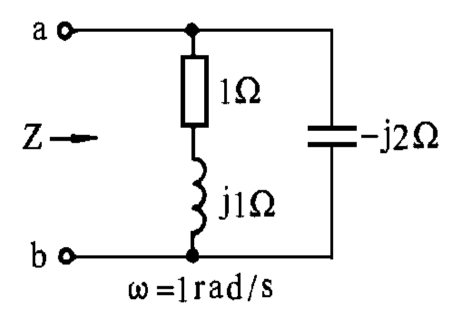
$$|X| \neq \frac{1}{|B|}, \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

例1 求图(a)网络在ω=1rad/s和ω=2rad/s时的(等效阻抗和等效电路)（等效串联电路）。

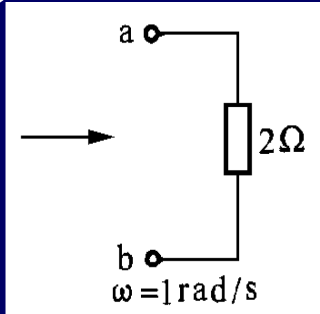


(a)

解：ω =1rad/s时的相量模型如图(b)所示，等效阻抗 .



(b)

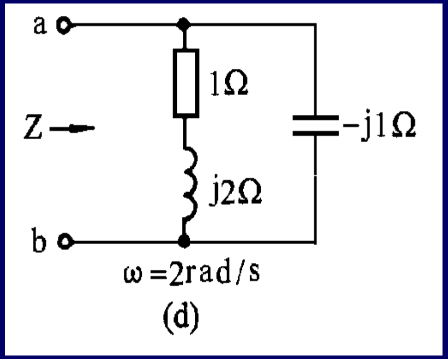


(c)

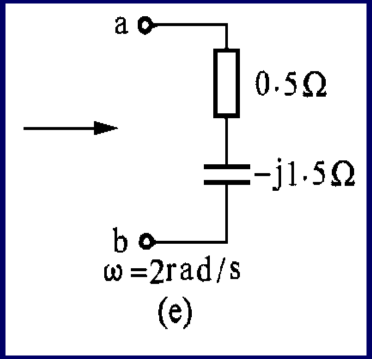
$$Z(\mathrm{j}1)=\frac{(1+\mathrm{j}1)(-\mathrm{j}2)}{1+\mathrm{j}1-\mathrm{j}2}=\frac{2-\mathrm{j}2}{1-\mathrm{j}}=2\Omega$$

等效电路如图(c)所示

同理，ω=2rad/s时的相量模型如图(b)所示，求得等效阻抗为



(d)

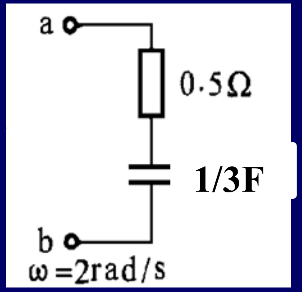


(e)

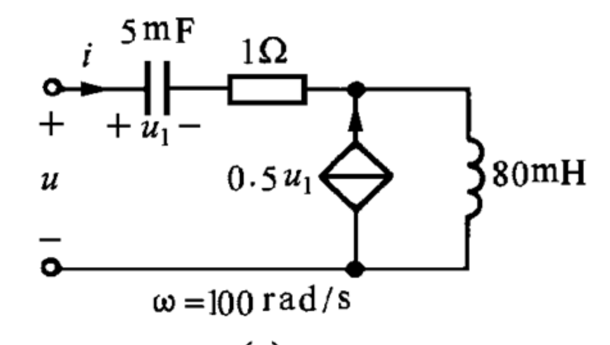
$$Z(\mathrm{j}2)=\frac{(1+\mathrm{j}2)(-\mathrm{j}1)}{1+\mathrm{j}2-\mathrm{j}1}=\frac{2-\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}=\frac{1-\mathrm{j}3}{2}=0.5-\mathrm{j}1.5\ \Omega$$

$$\frac{1}{\omega C}=1.5 \qquad C=1/3\mathrm{F}$$

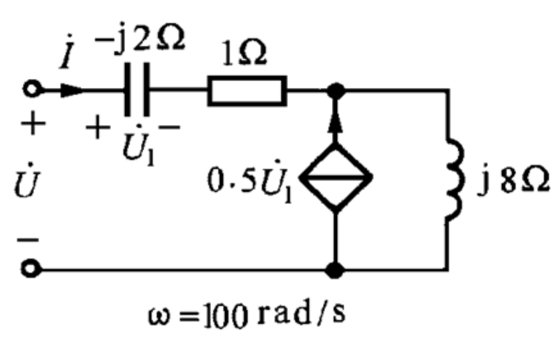
等效电路如图(e)，相应的时域等效电路为一个0.5Ω的电阻与1/3F电容的串联。



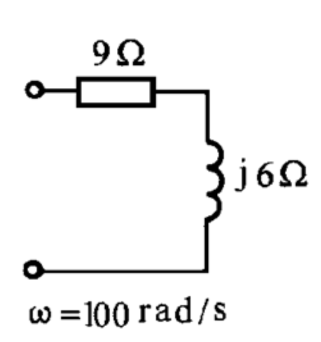
例2 试求等效阻抗和相应的等效电路。



(a)



(b)



(e)

解：相量模型如图(b)。设在端口加电流源，用相量形式KVL方程求电压相量

$$\dot{U} = (-\mathrm{j}2+1)\dot{I} + \mathrm{j}8(\dot{I}+0.5\dot{U}_1)$$

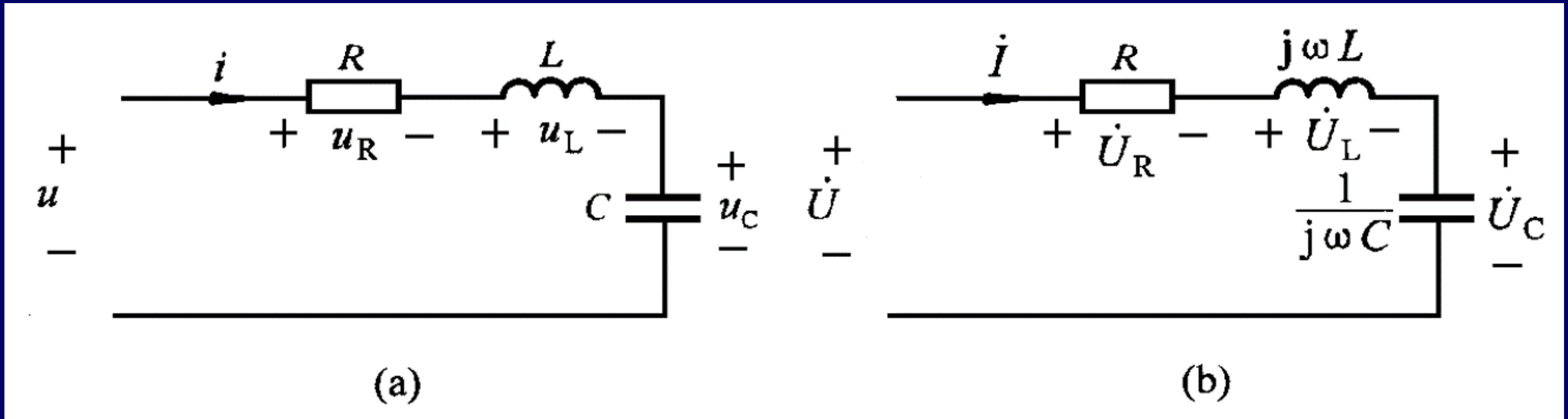
$$\dot{U}_1 = 0.5\times(-\mathrm{j}2\dot{I})$$

等效阻抗为 $$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = 9+\mathrm{j}6\ \Omega$$

其等效电路如图(c)所示。

阻抗和导纳电路举例：

1、RLC串联电路



相量模型如图(b)所示。等效阻抗

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}=R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})=R+jX$$

其中：$X=(\omega L-\frac{1}{\omega C})$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\theta_Z = arctg\frac{X}{R} = arctg\frac{X_L - X_C}{R}$$

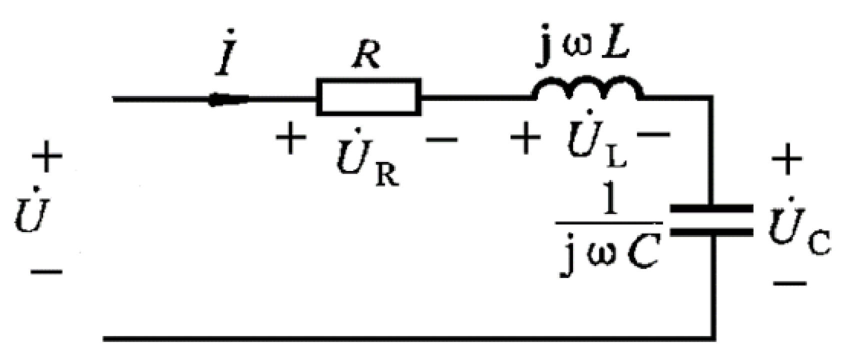
当$X=X_L-X_C>0$时，$\theta_Z>0$，电压超前于电流，电路呈感性，等效为R串联电感；
当$X=X_L-X_C<0$时，$\theta_Z<0$，电流超前于电压，电路呈容性，等效为R串联电容；
当$X=X_L-X_C=0$时，$\theta_Z=0$，电压与电流同相，电路呈电阻性，等效为R。

$$\dot{U}=Z\dot{I}=R\dot{I}+\mathrm{j}(X_L-X_C)\dot{I}=R\dot{I}+\mathrm{j}X\dot{I}=\dot{U}_R+\dot{U}_X$$

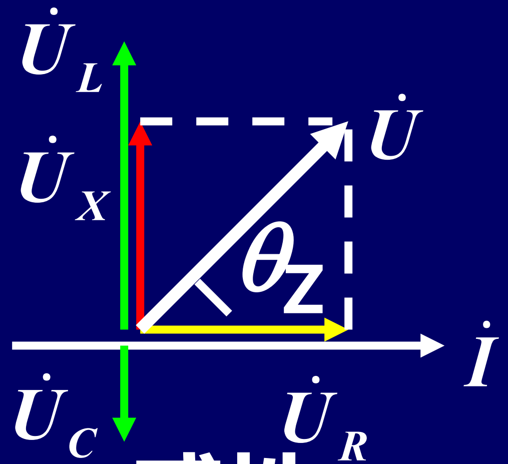
$$U=\sqrt{U_R^2+U_X^2}=\sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2}$$

$$U_R=U\cos\theta_Z$$

$$U_X=U\,|\sin\theta_Z|$$

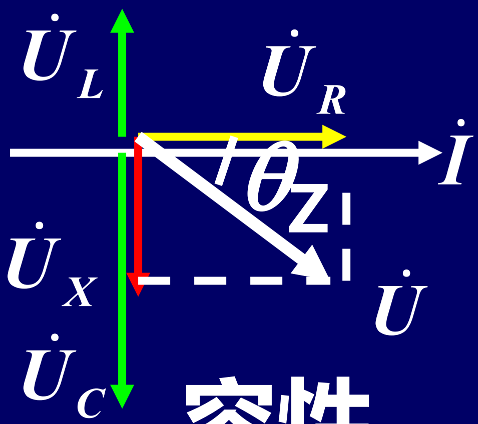


电压三角形如下：



感性

$X_L>X_C$

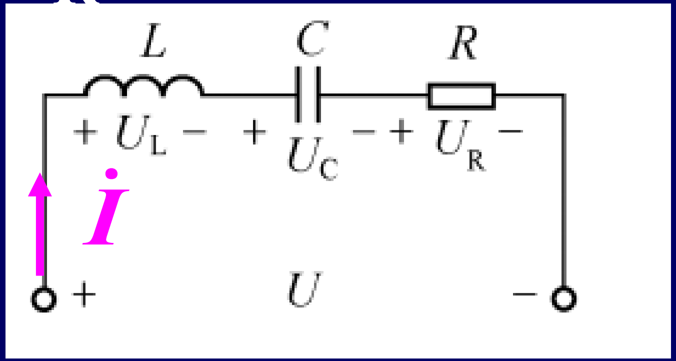


容性

$X_L<X_C$

（串联电路选取电流为参考相量）

在图题中所示电路中，已知U_C=15V,U_L=12V U_R=4V,求电压U的值。（作业8-16）



解一：

设流过RLC串联回路的电流相量为**参考相量**,参考方向如图所示：

即 $\dot{I}=I\angle 0^\circ$

$$\dot{U}_C=\frac{1}{j\omega C}\dot{I}=\frac{1}{\omega C}\angle -90^\circ\times I\angle 0^\circ=\frac{1}{\omega C}I\angle -90^\circ=15\angle -90^\circ$$

$$\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}=\omega L\angle 90^\circ\times I\angle 0^\circ=\omega LI\angle 90^\circ=12\angle 90^\circ$$

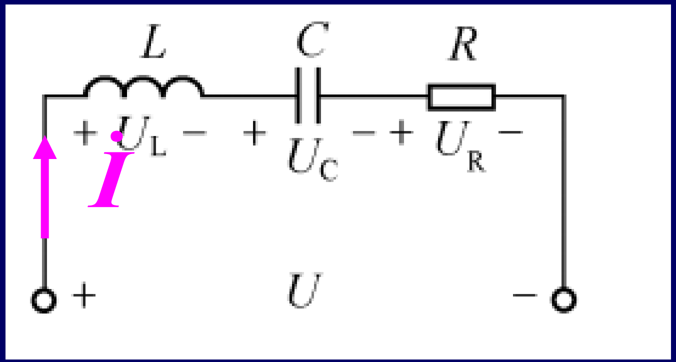
$$\dot{U}_R=R\dot{I}=RI\angle 0^\circ=4\angle 0^\circ$$

$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_c+\dot{U}_L=4+15\angle -90^\circ+12\angle 90^\circ=4-15j+12j$$

$$=4-3j \qquad U=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{V}$$

（串联电路选取电流为参考相量）

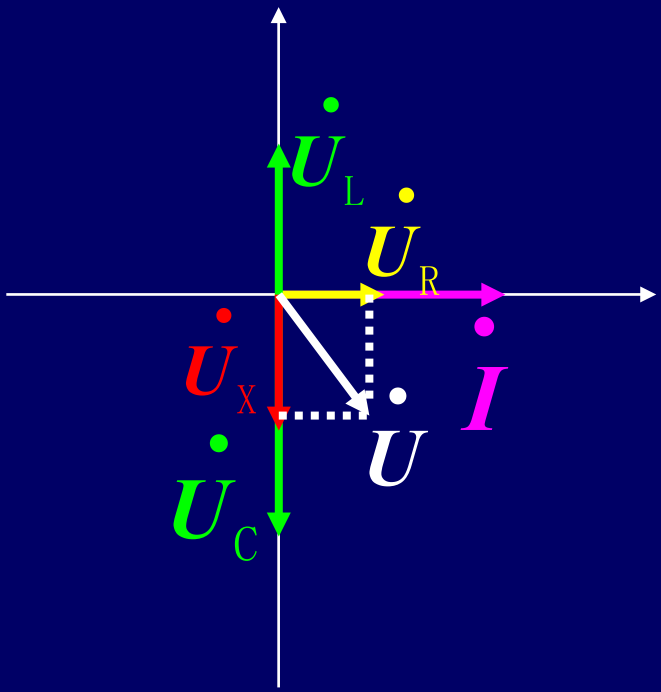
在图题中所示电路中，已知U_c=15V,U_L=12V U_R=4V,求电压U的值。



解二：

设流过RLC串联回路的电流相量为参考相量,参考方向如图所示：

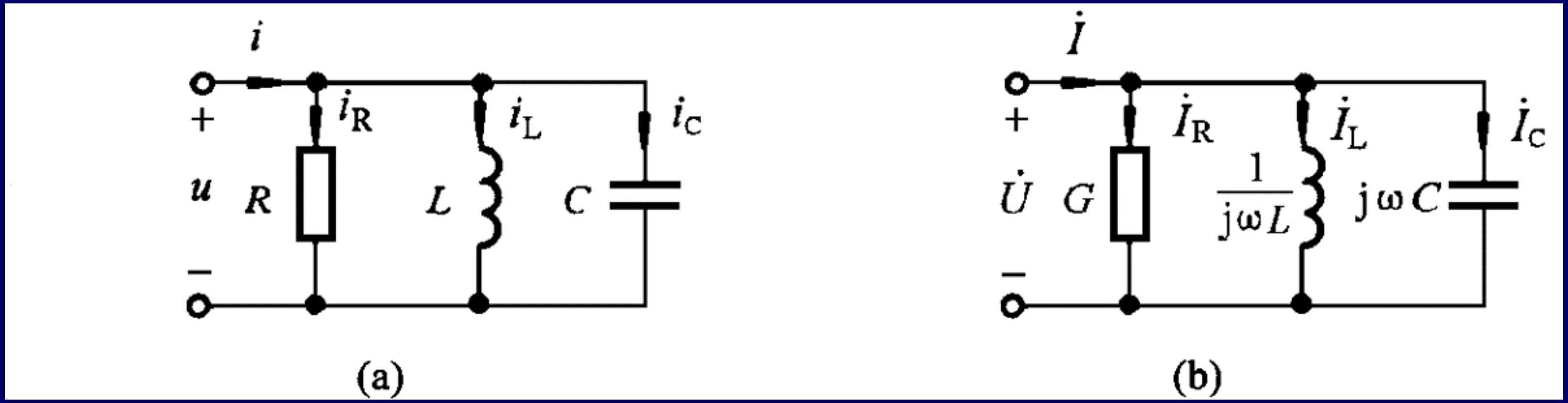
即 $\dot{I}=I\angle 0^\circ$



$$U_X=15-12=3\text{V}$$

$$U=\sqrt{U_X^2+U_R^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{V}$$

2、 GCL并联电路



相量模型如图(b)所示。等效导纳

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=G+j\omega C+\frac{1}{j\omega L}=G+j(\omega C-\frac{1}{\omega L})=G+jB$$

$$B=\omega C-\frac{1}{\omega L}=B_C-B_L$$

$$|Y|=\sqrt{G^2+B^2}=\sqrt{G^2+(B_C-B_L)^2}$$

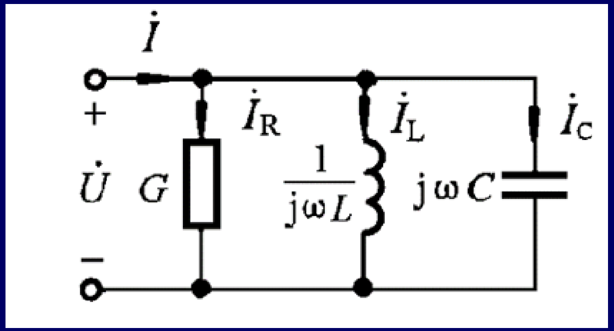
$$\theta_Y=arctg\frac{B}{G}=arctg\frac{B_C-B_L}{G}$$

当$B=B_C-B_L>0$时，$\theta_Y>0$，电流超前于电压，电路呈容性，等效为G并联电容；

当$B=B_C-B_L<0$时，$\theta_Y<0$，电压超前于电流，电路呈感性，等效为G并联电感；

当$B=B_C-B_L=0$时，$\theta_Y=0$，电压与电流同相，电路呈电阻性，等效为G。

$$\dot I = Y\dot U = G\dot U + \mathrm{j}(\mathrm{B}_{\mathrm{C}} - \mathrm{B}_{\mathrm{L}})\dot U = G\dot U + \mathrm{j}B\dot U = \dot I_G + \dot I_B$$

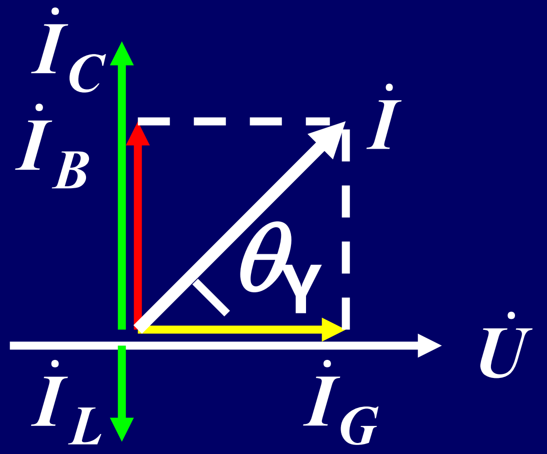


$$I = \sqrt{I_G{}^2 + I_B{}^2} = \sqrt{I_G{}^2 + (I_L - I_B)^2}$$

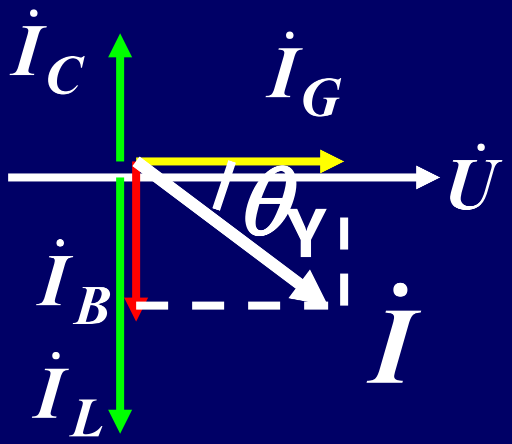
$$I_G = I\cos\theta_Y$$

$$I_B = I\,|\sin\theta_Y\,|$$

电流三角形如下：

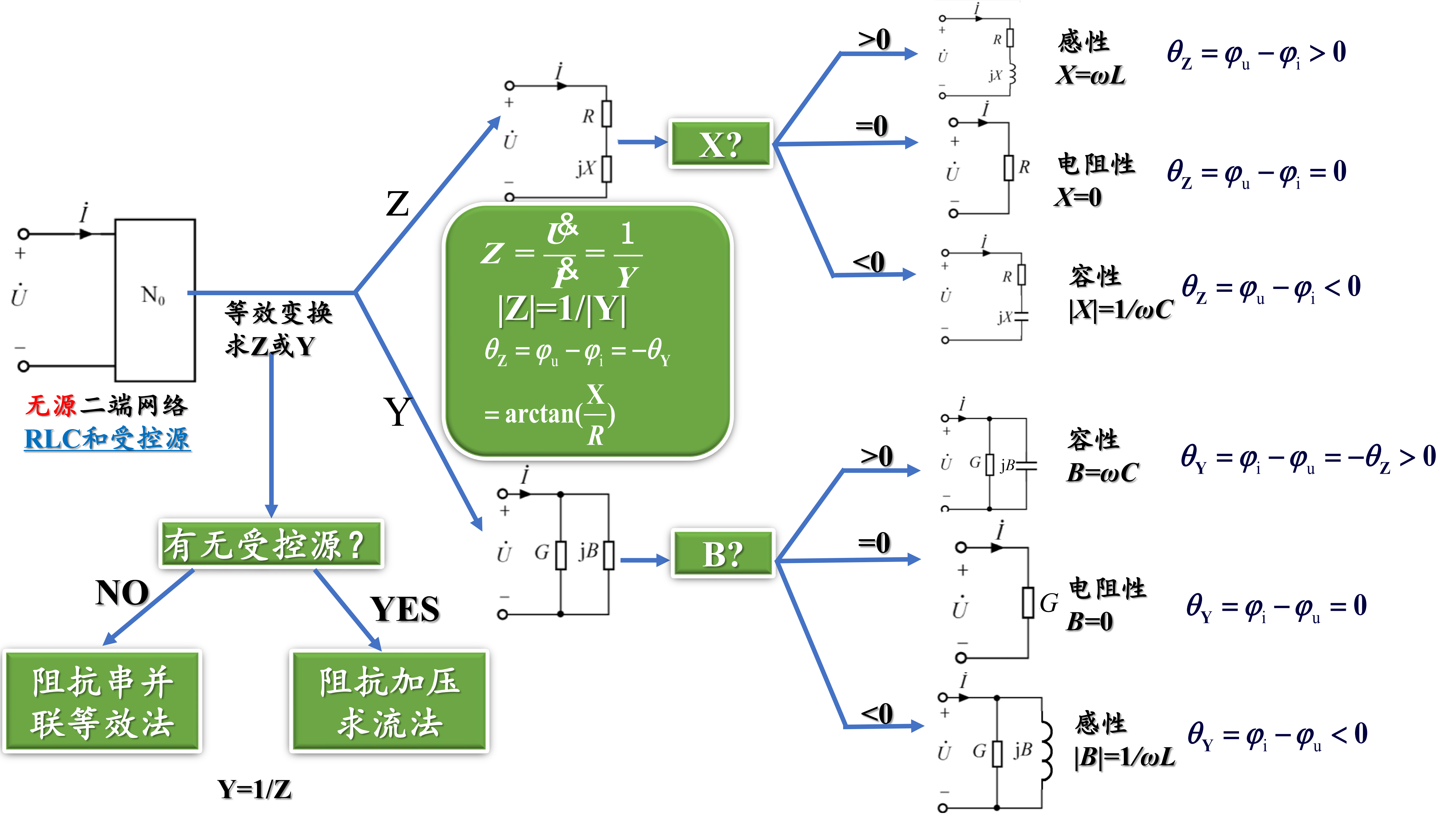


容性$B_C>B_L$



感性$B_C<B_L$

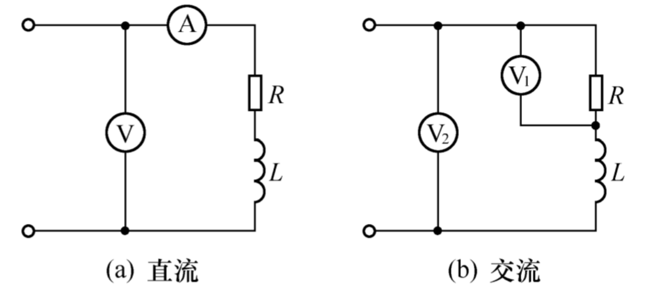
(并联电路选取电压为参考相量 ）



无源二端网络
RLC和受控源
N0
等效变换
求Z或Y
Z
Y
有无受控源？
NO
YES
阻抗串并
联等效法
阻抗加压
求流法
Y=1/Z
X?
B?
Z = U̇/İ = 1/Y
|Z|=1/|Y|
θZ = φu − φi = −θY
= arctan(X/R)
>0
=0
<0
感性
X=ωL
θZ = φu − φi > 0
电阻性
X=0
θZ = φu − φi = 0
容性
|X|=1/ωC
θZ = φu − φi < 0
容性
B=ωC
θY = φi − φu = −θZ > 0
电阻性
B=0
θY = φi − φu = 0
感性
|B|=1/ωL
θY = φi − φu < 0

练习：求下图所示二端网络电路最简串联电路（Z）和并联电路（Y），并画出他们对应时域电路。

8-18　RL 串联电路，在题图 8-18（a）所示的直流情况下，电流表的读数为 50mA，电压表读数为 6V；在 $f=10^3$Hz 交流情况下，电压表 V_1 读数为 6V，V_2 读数为 10V，如图 8-18（b）所示。试求 R、L 的值。



题图 8-18

8 - 5 正弦稳态的相量分析

相量形式的基尔霍夫定律和欧姆定律与电阻电路中同一定律的形式完全相同，其差别仅在于电压电流用相应的相量替换，电阻和电导用阻抗和导纳替换。因此，分析电阻电路的方法完全可以用到正弦稳态电路的分析中来。如：等效变换，各种一般分析法和网络定理等。

相量法分析正弦稳态的主要步骤：

一 画电路的相量模型

1，将时域模型中各正弦量用相应的相量表示在电路图上。

$$u(t)=U\sqrt{2}\cos(\omega t+\phi_{\mathrm{u}}) \quad \rightarrow \quad \dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{\mathrm{v}}}=U\angle\phi_{\mathrm{u}}$$

$$i(t)=I\sqrt{2}\cos(\omega t+\phi_{\mathrm{i}}) \quad \rightarrow \quad \dot{I}=I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{\mathrm{i}}}=I\angle\phi_{\mathrm{i}}$$

2，时域模型中RLC元件的参数，用相应的阻抗(或导纳)表示。

$$R \rightarrow R \text{ 或 } \mathrm{G}$$

$$L \rightarrow \mathrm{j}\omega L \text{ 或 } \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$$

$$C \rightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \text{ 或 } \mathrm{j}\omega C$$

二 根据KCL、KVL和元件VCR相量形式（第一章），及导出的等效变换（第二章）一般分析方法（第三章）网络定理（第四章）列电路方程，求解响应的相量表达式。

$$\text{KCL:}\quad \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0 \qquad \text{KVL:}\quad \sum_{k=1}^{n} \dot{U}_k = 0$$

$$\text{欧姆定律}\qquad \dot{U} = Z\dot{I} \qquad \dot{I} = Y\dot{U}$$

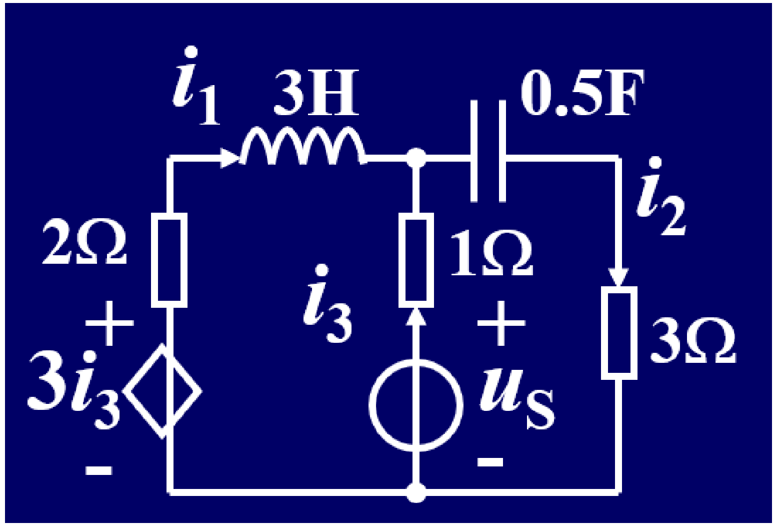
三 写出相应的时间表达式。

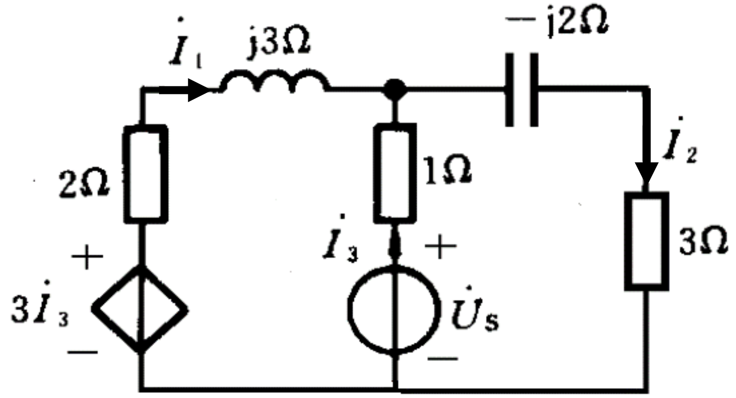
$$\dot{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{\mathrm{u}}} = U\angle\phi_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\ \omega\ } u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_{\mathrm{u}})$$

$$\dot{I} = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{\mathrm{i}}} = I\angle\phi_{\mathrm{i}} \xrightarrow{\ \omega\ } i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_{\mathrm{i}})$$

例13 用网孔法和求$i_2(t)$。已知：

$$u_S(t) = 5\sqrt{2}\cos(t + 30^\circ)\text{V}$$



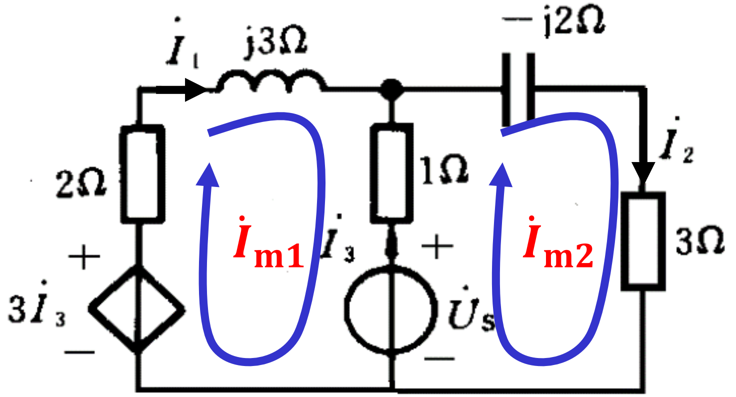


(b)

解：相量模型如图(b)所示，

$$\dot{U}_S = 5\angle 30^\circ \text{V}$$

1、网孔分析



(b)

设网孔电流如右图，直接列出网孔方程

$$\begin{cases}(3+j3)\dot I_{m1}-\dot I_{m2}=3\dot I_3-5\angle 30^\circ\\ -\dot I_{m1}+(4-j2)\dot I_{m2}=5\angle 30^\circ\end{cases}$$

自阻抗×本网孔的网孔电流相量+∑(互阻抗×相邻网孔的网孔电流相量)=本网孔中沿网孔电流方向所含电压源电压相量升的代数和。

辅助方程 $\dot I_3=\dot I_{m2}-\dot I_{m1}$

得方程 $$\begin{cases}(6+j3)\dot I_{m1}-4\dot I_{m2}=-5\angle 30^\circ\\ -\dot I_{m1}+(4-j2)\dot I_{m2}=5\angle 30^\circ\end{cases}$$

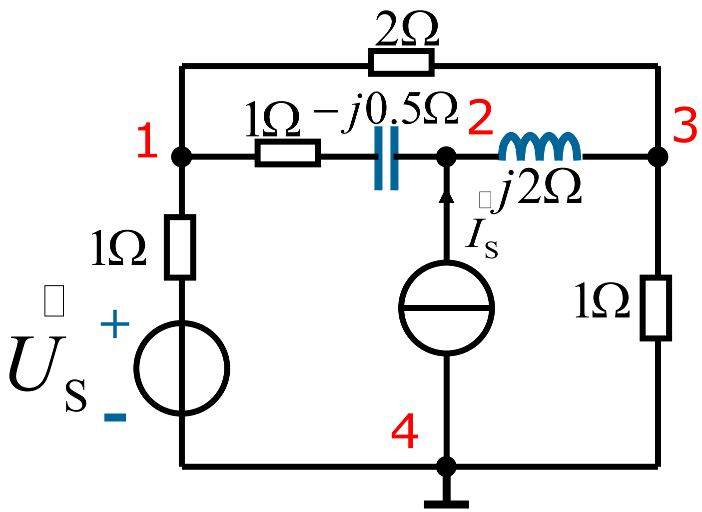
解得 $\dot I_2=\dot I_{m2}=1.121\angle 60.96^\circ\ \mathrm{A}$

$\dot I_1=\dot I_{m1}$

$i_2(t)=1.121\sqrt{2}\cos(t+60.96^\circ)\mathrm{A}$

节点分析法：

已知电源有效值相量：$\dot{I}_S = \dfrac{0.5\angle -30°}{\sqrt{2}}$ A　$\dot{U}_S = \dfrac{10\angle 0°}{\sqrt{2}}$ V



自导纳 × 本节点的节点电压相量 +∑ (互导纳 × 相邻节点的节点电压相量) =流入本节点电流源电流相量的代数和。

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{1-0.5j})\dot{U}_1-\frac{1}{1-0.5j}\dot{U}_2-\frac{1}{2}\dot{U}_3=\frac{10\angle 0°}{\sqrt{2}}$$

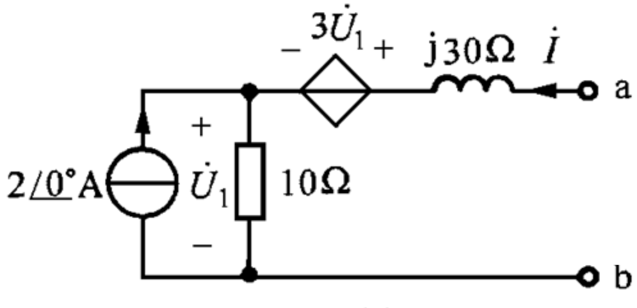
$$-\frac{1}{1-0.5j}\dot{U}_1+(\frac{1}{2j}+\frac{1}{1-0.5j})\dot{U}_2-\frac{1}{2j}\dot{U}_3=\frac{0.5\angle -30°}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\dot{U}_1-\frac{1}{2j}\dot{U}_2+(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2j})\dot{U}_3=0$$

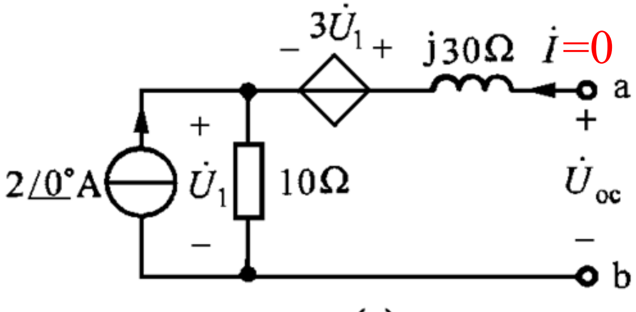
注意：一条支路上的阻抗或者导纳要合在一起写！

注：**1-0.5j**是一条支路，作为一个整体，是一个阻抗

例14 求图(a)的戴维南和诺顿等效电路。

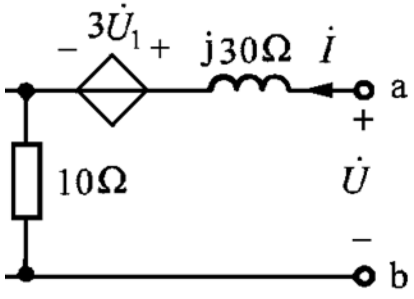


(a)



(a)

解：**开路电压**： $\dot{U}_{oc} = 4\dot{U}_1 = 4\times 2\times 10 = 80\angle 0^\circ \mathrm{V}$



(a)

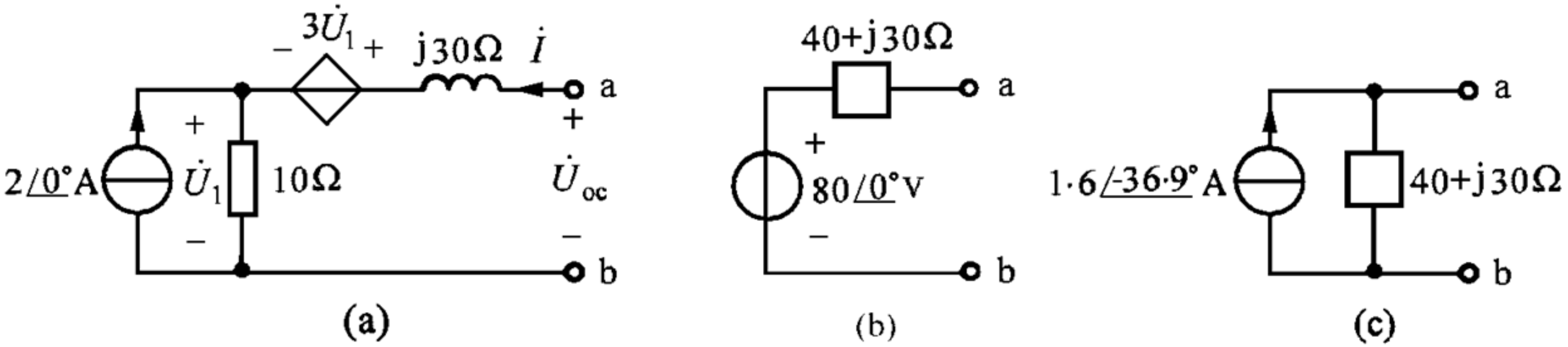
将电流源置零，加流求压法求**等效阻抗**

$$Z_o = \frac{j30\dot{I} + 3\dot{U}_1 + 10\dot{I}}{\dot{I}} = \frac{j30\dot{I} + 3\times 10\dot{I} + 10\dot{I}}{\dot{I}}$$

$$= 40 + j30\ \Omega$$

短路电流： $\dot{I}_{sc}=\dfrac{\dot{U}_{oc}}{Z_o}=\dfrac{80\angle 0^\circ}{40+j30}=1.6\angle -36.9^\circ\ \mathrm{A}$

戴维南和诺顿等效电路如图b,c

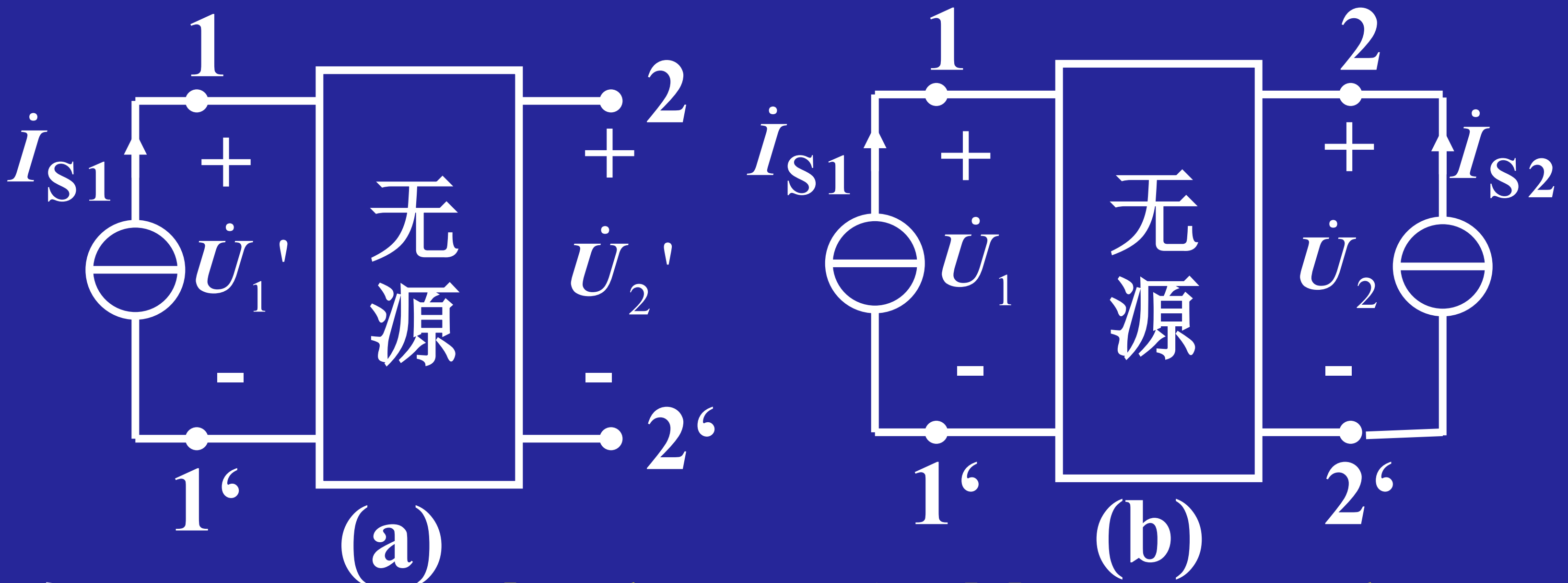


END

例15 已知图(a)中， $\dot{I}_{S1}=1\angle 0^\circ\ \text{A}$

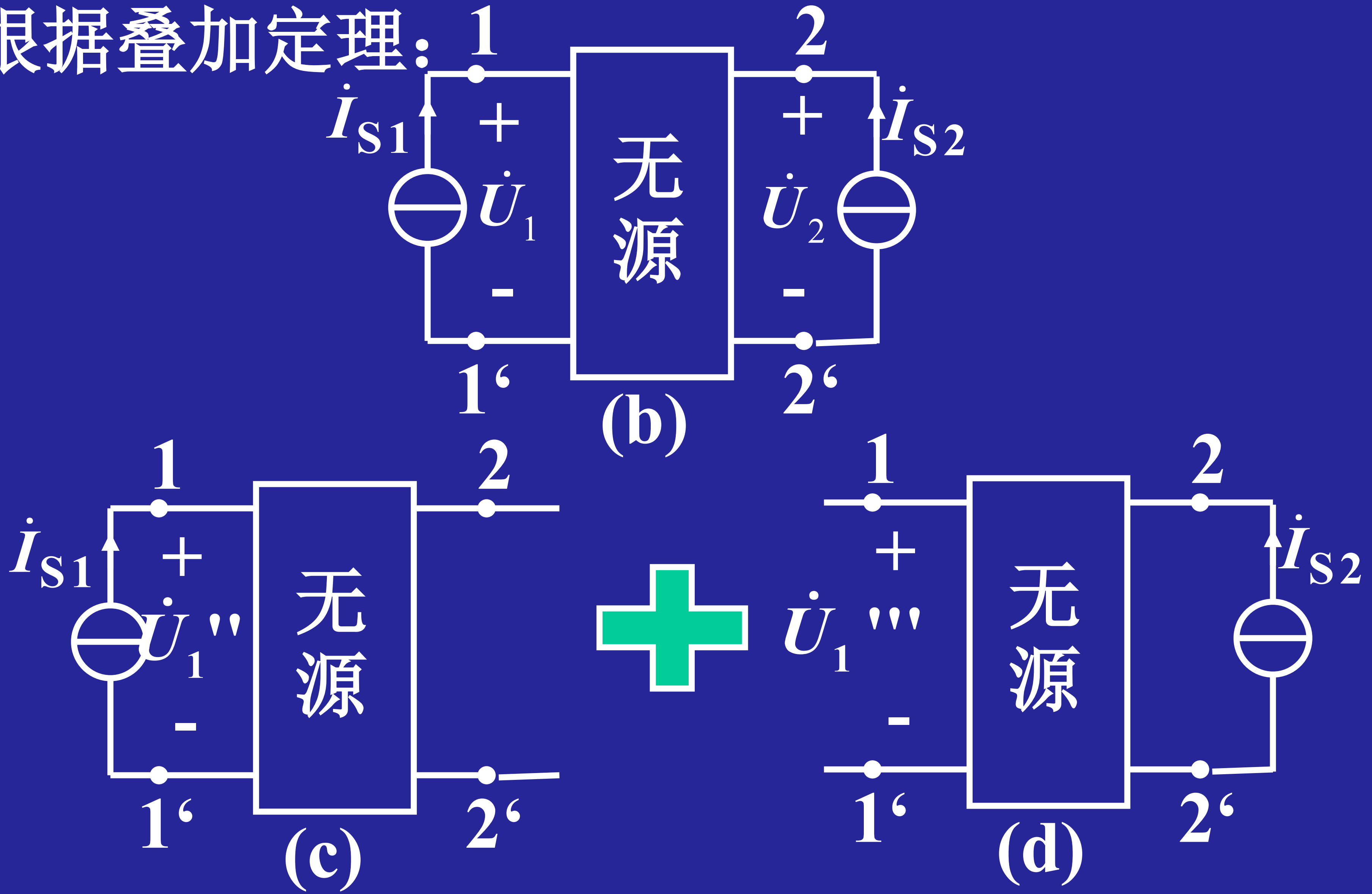
$\dot{U}_1'=20\angle 30^\circ\ \text{V}$， $\dot{U}_2'=30\angle 90^\circ\ \text{V}$

求图(b)中 $\dot{I}_{S2}=2\angle -30^\circ\ \text{A}$ 时，$\dot{U}_1=?$

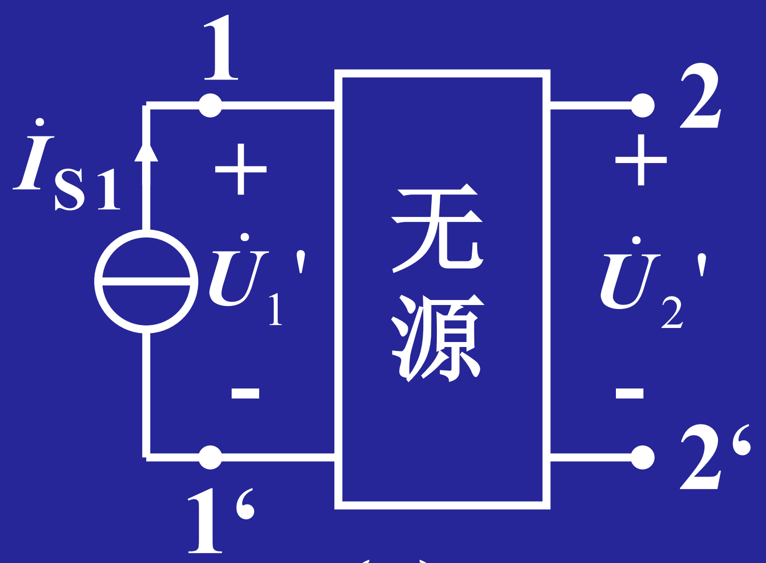


解：**利用叠加定理、线性、互易定理**

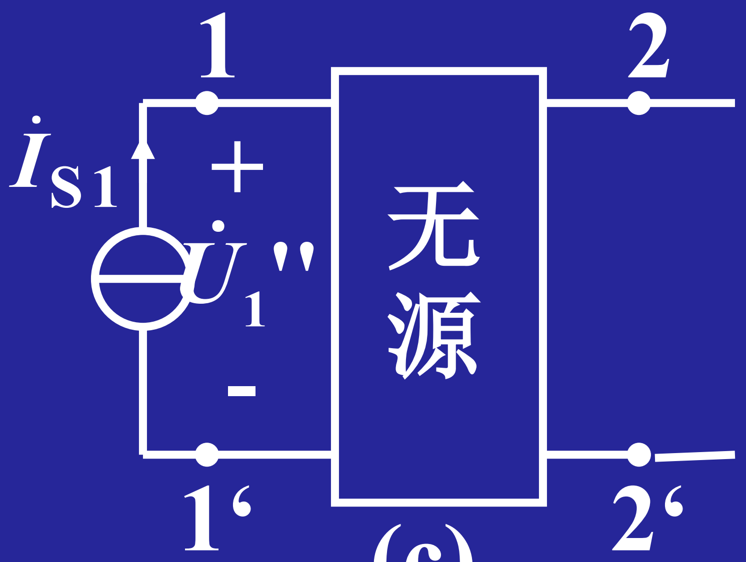
根据叠加定理：



$$\dot{U}_1=\dot{U}_1''+\dot{U}_1'''$$

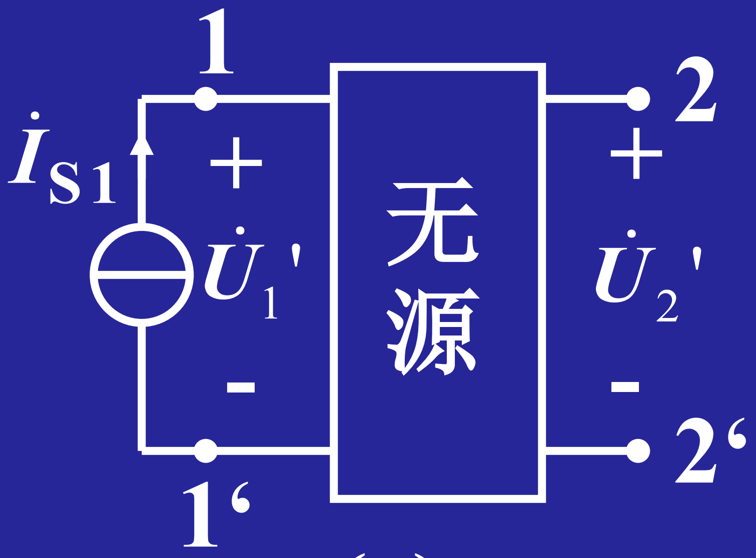


(a)

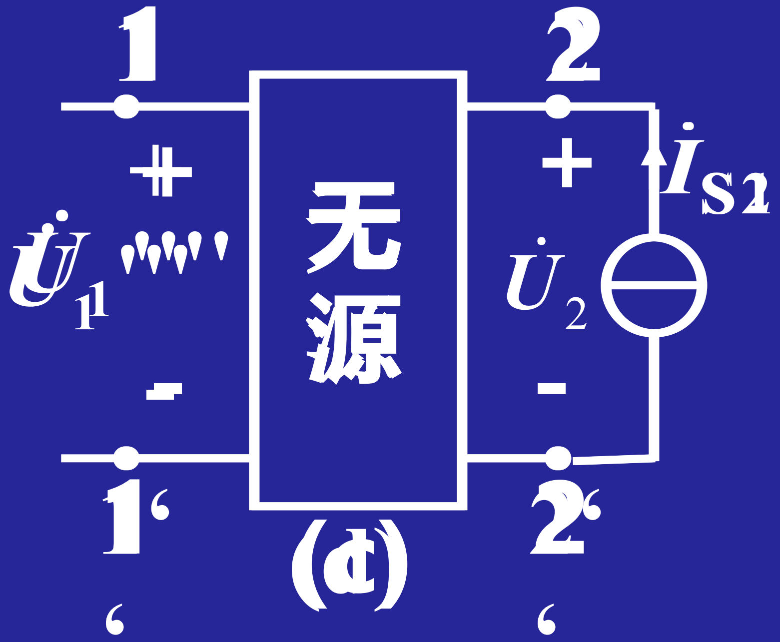


(c)

$$\dot{U}_1{}' = \dot{U}_1{}''$$



(a)



(d)

由互易形式二，得： $\dot U_1'''' = \dot U_2' = 30\angle 90^\circ \text{ V}$

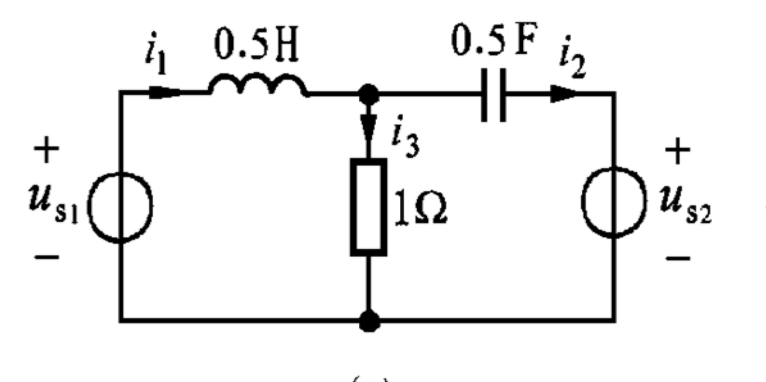
由齐次性，得图(d)中$\dot I_{S2}$单独作用时：

$$\dot U_1''' = \frac{\dot I_{S2}}{\dot I_{S1}}\dot U_1'''' = \frac{2\angle -30^\circ}{1}30\angle 90^\circ = 60\angle 60^\circ \text{ V}$$

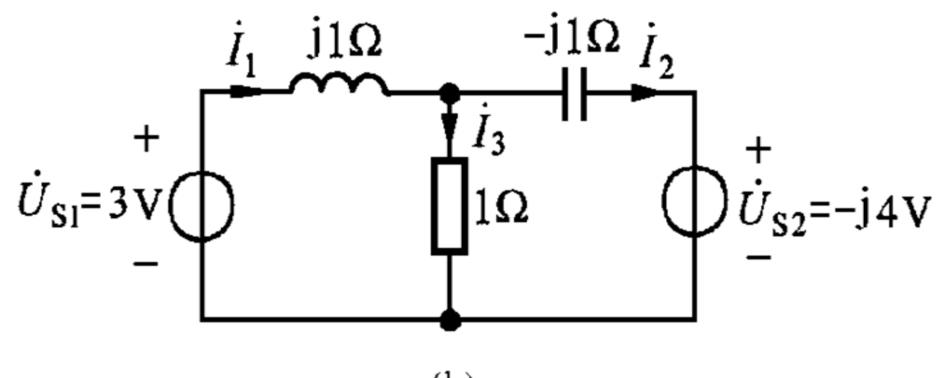
$$\dot U_1 = \dot U_1'' + \dot U_1''' = 20\angle 30^\circ + 60\angle 60^\circ \text{ V} = 78\angle 58.5^\circ \text{ V}$$

例16 试求电流$i_1(t)$。已知：

$$u_{S1}(t)=3\sqrt{2}\cos 2t\ \text{V},\ u_{S2}(t)=4\sqrt{2}\sin 2t\ \text{V}$$



(a)



(b)

解：相量模型如图(b)所示，其中

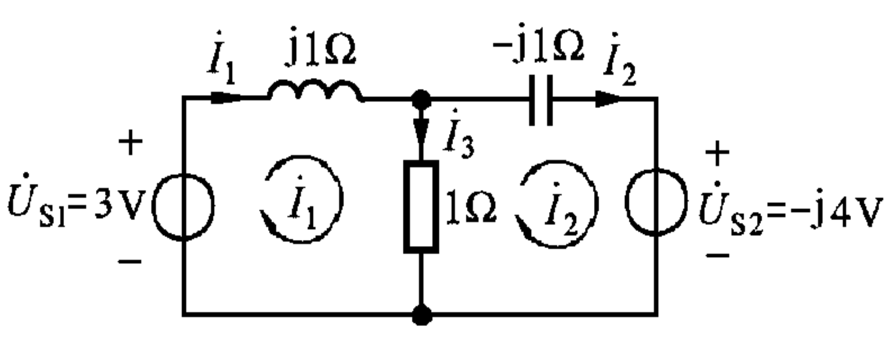
$$\dot{U}_{S1}=3\angle 0^\circ\ \text{V},\qquad \dot{U}_{S2}=-\text{j}4=4\angle -90^\circ\ \text{V}$$

$$Z_L=\text{j}\omega L=\text{j}1\Omega,\qquad Z_C=\frac{1}{\text{j}\omega C}=-\text{j}1\Omega$$

法1：网孔分析

设网孔电流如图(b)所示列出网孔电流方程

$$\begin{cases}(1+\mathrm{j}1)\dot{I}_1-\dot{I}_2=3\angle 0^\circ \\ -\dot{I}_1+(1-\mathrm{j}1)\dot{I}_2=\mathrm{j}4\end{cases}$$



(b)

解得

$$\dot{I}_1=\frac{\begin{vmatrix}3 & -1\\ \mathrm{j}4 & 1-\mathrm{j}1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+\mathrm{j}1 & -1\\ -1 & 1-\mathrm{j}1\end{vmatrix}}=\frac{3-\mathrm{j}3+\mathrm{j}4}{2-1}=3+\mathrm{j}1=3.162\angle 18.43^\circ\ \mathrm{A}$$

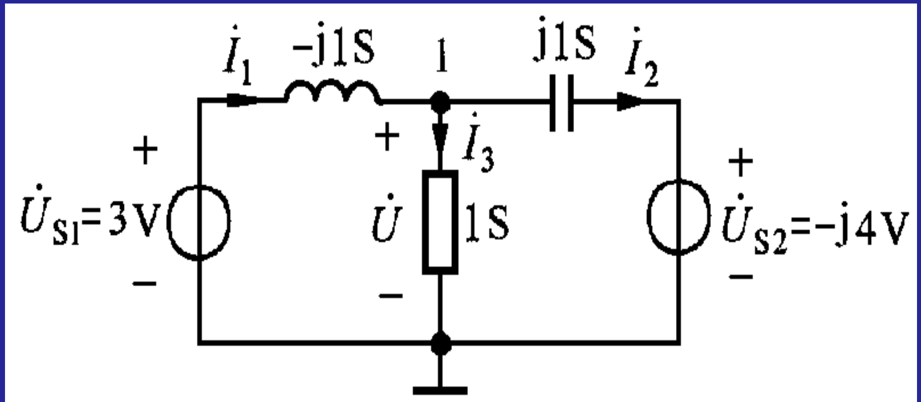
时间表达式 $i_1(t)=3.162\sqrt{2}\cos(2t+18.43^\circ)\mathrm{A}$

法3：节点分析

用导纳参数的相量模型如图所示，其中

$$\frac{1}{j\omega L} = -j1S$$

$$j\omega C = j1S$$



参考节点如图，直接列出节点电压方程

$$(1-j1+j1)\dot{U} = (-j1)\dot{U}_{S1} + j1\dot{U}_{S2}$$

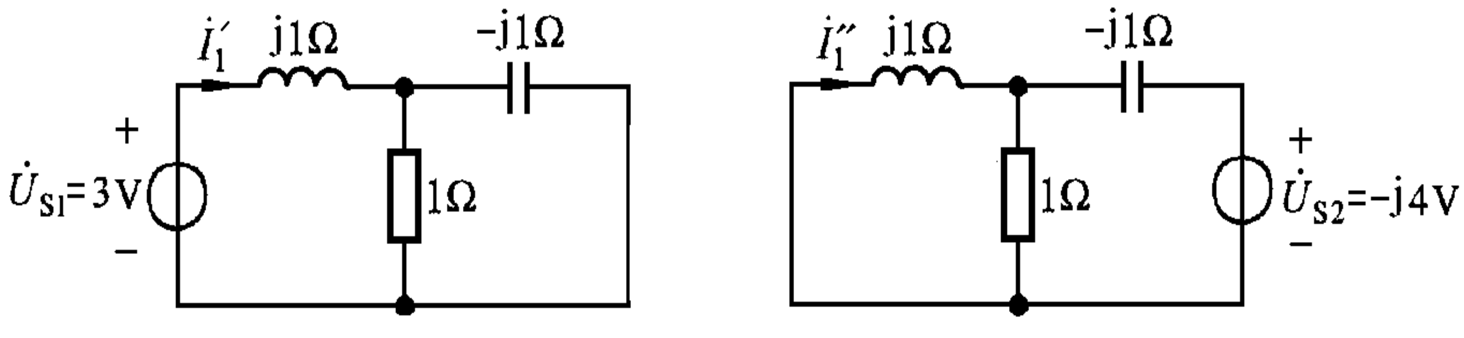
解得

$$\dot{U} = -j1\dot{U}_{S1} + j1\dot{U}_{S2} = -j1\times 3 + j1\times(-j4) = 5\angle -36.9^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = -j1\times(\dot{U}_{S1} - \dot{U}) = -j1\times(3-4+j3) = 3.162\angle 18.43^\circ \text{ A}$$

法4：叠加定理

两个独立电源单独作用的电路如下图

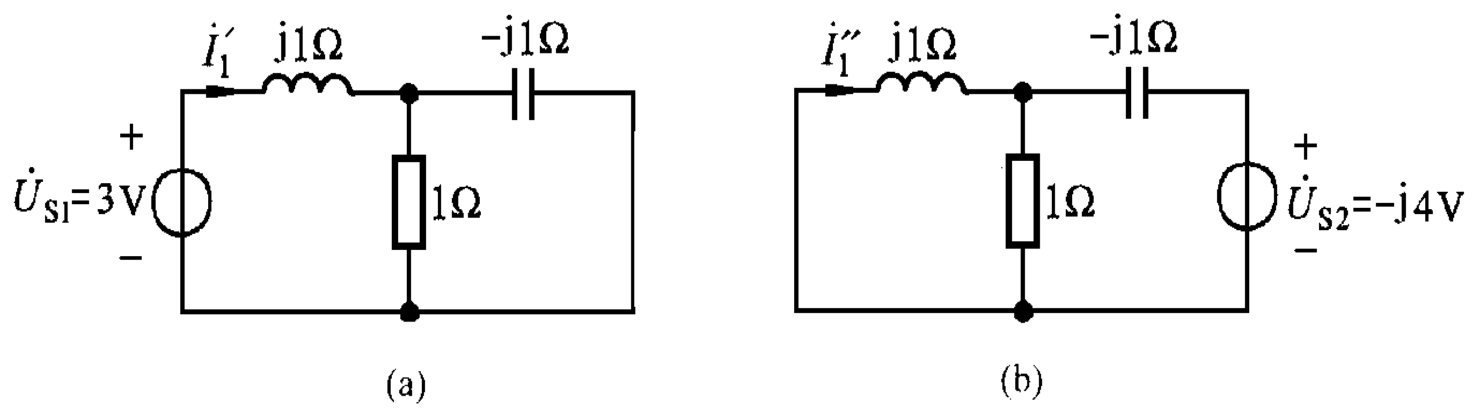


(a) (b)

1求电压源U_{S1}单独作用分响应，电路如图(a)

$$\dot{I}_1' = \frac{\dot{U}_{S1}}{j1 + 1//(-j1)} = \frac{3}{j1 + 0.5 - j0.5}$$

$$= 3 - j3\text{A}$$



2求电压源U_{S2}单独作用分响应，电路如图(b)

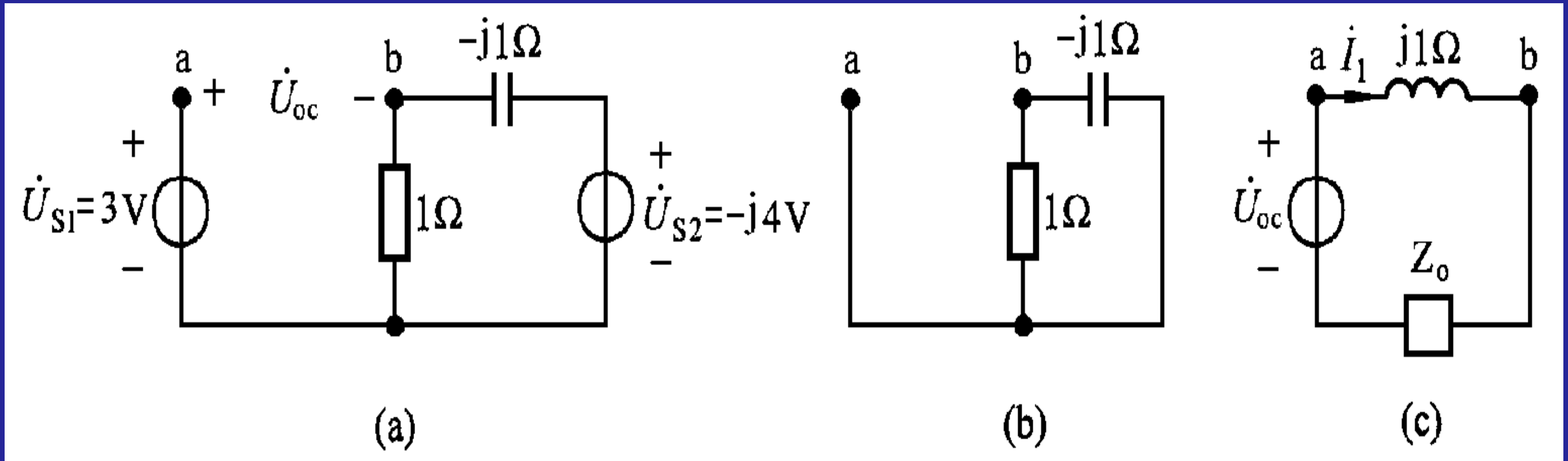
$$\dot{I}_1'' = \frac{-\dot{U}_{S2}}{-\mathrm{j}1+1//j1} \times \frac{1}{1+\mathrm{j}1}$$

$$= \frac{\mathrm{j}4}{0.5-\mathrm{j}0.5} \times \frac{1}{1+\mathrm{j}1} = j4A$$

3由叠加定理得

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' + \dot{I}_1'' = 3 - j3 + \mathrm{j}4 = 3.126\angle 18.43^\circ \mathrm{A}$$

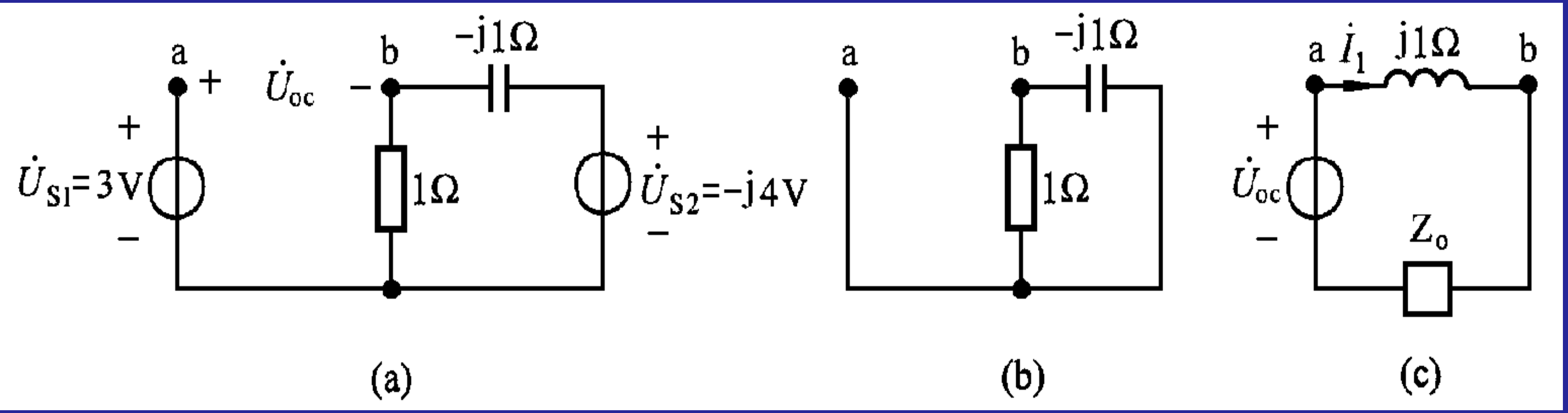
法5：戴维南定理



先求连接电感的网络的戴维南等效电路

(1) 断开电感支路得图(a)电路，求端口开路电压

$$\dot U_{oc}=\dot U_{S1}-\frac{1}{1-j1}\times\dot U_{S2}=3-\frac{-j4}{1-j1}=3-(2-j2)=1+j2$$



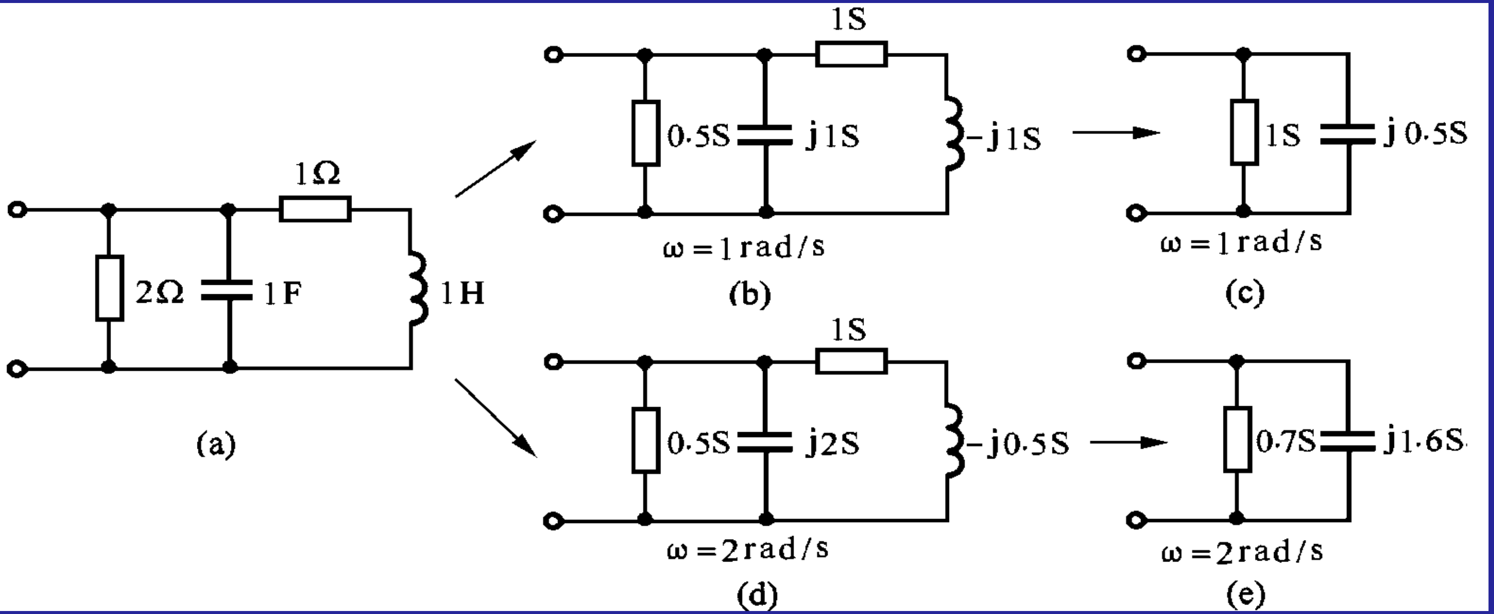
(2) 将图(a)电路中独立电源置零，得图(b)电路，求单口网络的输出阻抗

$$Z_o = \frac{1\times(-j1)}{1-j1} = \frac{-j1\times(1+j1)}{2} = 0.5-j0.5\,\Omega$$

得图(c)电路，求电流

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_{oc}}{Z_o + j1} = \frac{1+j2}{0.5+j0.5} = 3+j1 = 3.162\angle 18.43^\circ\ \text{A}$$

例16 试求图(a)所示单口网络在 ω=1rad/s和ω=2rad/s时的等效导纳



注意：

$$G=\frac{1}{\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}}=\frac{G_1\times G_2}{G_1+G_2}$$

解：由图(b)和(d)相量模型可得等效导纳

$$Y(\mathrm{j}1)=0.5+\mathrm{j}1+\frac{1\times(-\mathrm{j}1)}{1-\mathrm{j}1}=0.5+\mathrm{j}1+0.5-\mathrm{j}0.5=(1+\mathrm{j}0.5)\mathrm{S}$$

$$Y(\mathrm{j}2)=0.5+\mathrm{j}2+\frac{1\times(-\mathrm{j}0.5)}{1-\mathrm{j}0.5}=0.5+\mathrm{j}2+0.2-\mathrm{j}0.4=(0.7+\mathrm{j}1.6)\mathrm{S}$$

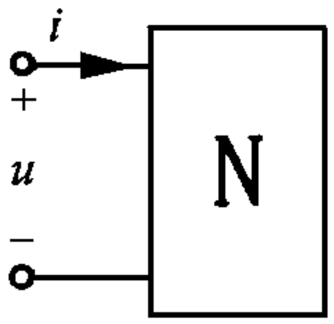
8-6 正弦稳态电路的功率

本节讨论正弦稳态单口网络的**瞬时功率、平均功率(有功功率)、无功功率、视在功率、复功率和功率因数**。正弦稳态单口网络向可变负载传输最大功率的问题。

8-6-1 二端网络的功率

1、瞬时功率

端口电压和电流采用关联参考方向，它吸收的功率为



$$p(t)=u(t)i(t)$$

正弦稳态时，端口电压和电流是相同频率的正弦量，即

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{u}})=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{u}})$$

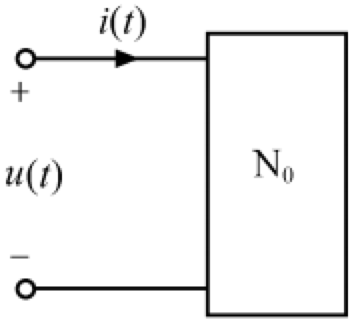
$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})$$

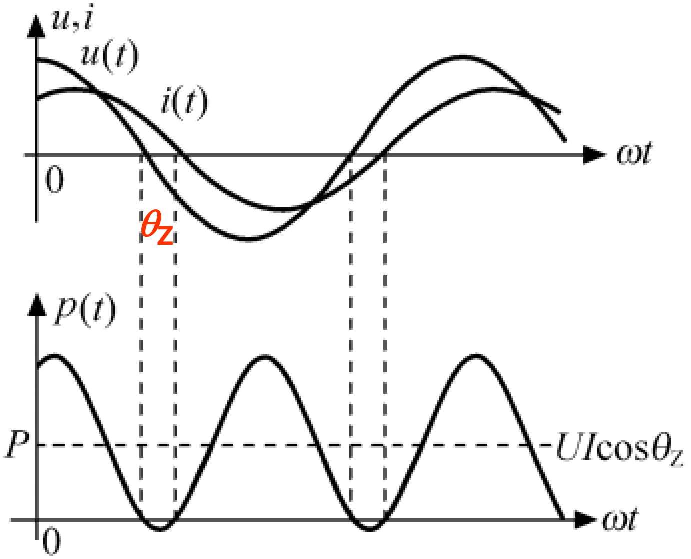
瞬时功率为 $p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{u}})?\sqrt{2}I\cos(\omega t\quad\varphi_{\mathrm{i}})$

$$=UI[\cos(\varphi_{\mathrm{u}}-\varphi_{\mathrm{i}})+\cos(2\omega t+\varphi_{\mathrm{u}}+\varphi_{\mathrm{i}})]$$

$$=UI\cos\theta_Z+UI\cos(2\omega t+2\varphi_{\mathrm{u}}-\theta_Z)$$

$\theta_Z=\varphi_{\mathrm{u}}-\varphi_{\mathrm{i}}$是电压与电流的相位差。瞬时功率由一个恒定分量和一个频率为2ω的正弦分量组成，周期性变化，当$p(t)>0$时，该网络吸收功率；当$p(t)<0$时，该网络发出功率。瞬时功率的波形如图所





2、平均功率(有功功率)

简称**功率**:在一个周期内的平均值:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T [UI\cos\theta_Z - UI\cos(2\omega t + \varphi_\mathrm{u} + \varphi_\mathrm{i})]\mathrm{d}t$$

$$= UI\cos\theta_Z$$

平均功率不仅取决于电压电流有效值乘积UI，还与阻抗角$\theta_Z=\varphi_u-\varphi_I$有关。

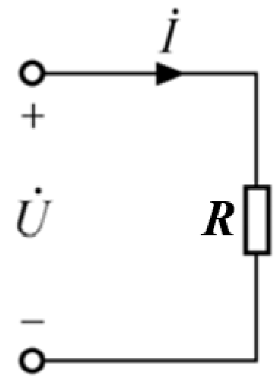
几种特殊情况。

1）网络等效阻抗为一个电阻。

此时网络电压与电流相位相同，即

$\theta_Z=\varphi_u-\varphi_i=0$, $\cos\theta_Z=1$,

$$P=UI\cos\theta_Z=UI=I^2R=\frac{U^2}{R}$$

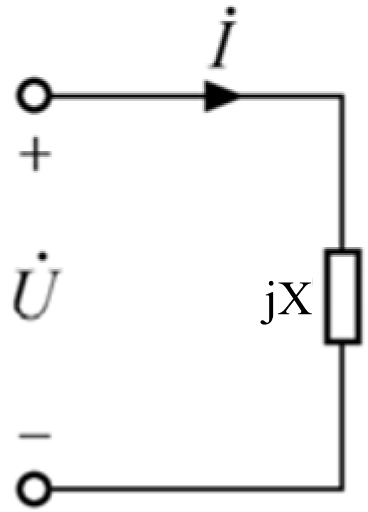


用电压、电流有效值后，计算电阻消耗的平均功率公式，与直流电路中相同。

若用电流、电压的振幅值，上述公式为

$$P=\frac{1}{2}U_mI_m=\frac{1}{2}I_m^2R=\frac{1}{2}\frac{U_m^2}{R}$$

2）网络等效阻抗为一个电抗。



此时单口网络电压与电流相位为正交关系，即$\theta_Z = \varphi_u - \varphi_i = \pm 90°$, (+电感 - 电容)

显然，平均功率为 $P = UI\cos\theta_Z = 0$

注意

1.电感和电容不消耗能量(有功功率），它们是储能元件。

2.它们的瞬时功率并不为零，**只与外电路进行能量的交换。**

$$p(t) = UI\cos\theta_Z + UI\cos(2\omega t + 2\phi_u - \theta_Z)$$

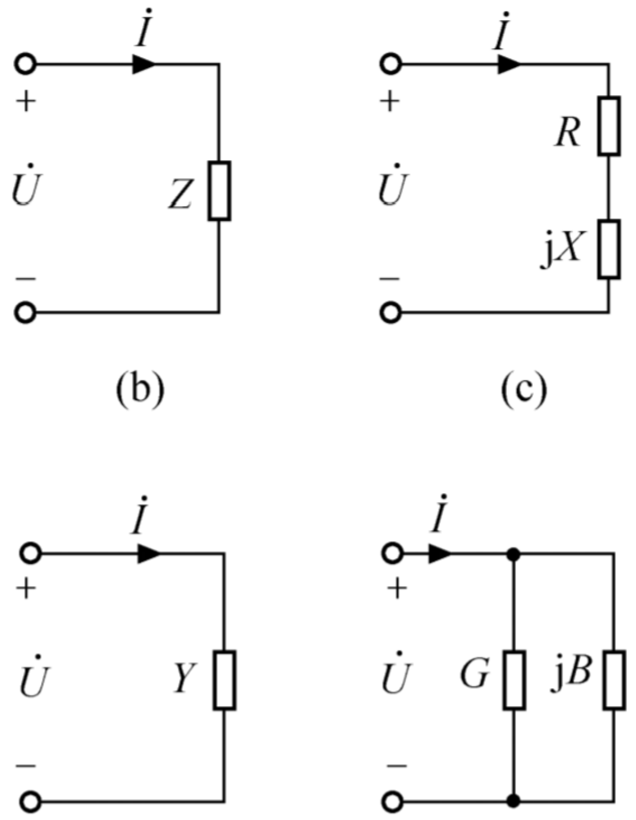
3）任意二端网络的功率：

$$Z = R + \mathrm{j}X \qquad Y = G + \mathrm{j}B$$

$$P = UI\cos\theta_Z = \frac{RI}{\cos\theta_Z} \times I\cos\theta_Z = \boxed{I^2 R} = U^2 G$$

$$P \neq \frac{I^2}{G} \qquad P \neq \frac{U^2}{R}$$

$G \neq \frac{1}{R}$



结论 电阻分量消耗的有功功率，就是单口网络吸收的有功功率。

3、视在功率

$$S = UI$$

表示一个电气设备的容量，是单口网络所吸收平均功率的最大值，单位：伏安(VA)。例如我们说某个发电机的容量为100kVA，而不说其容量为100kW。

4、功率因数

网络吸收的平均功率P与阻抗角$\cos\theta_Z$的大小密切相关，$\cos\theta_Z$表示功率的利用程度，称为功率因数

$$pf = \cos\theta_Z = \frac{P}{S}$$

$\theta_Z=\varphi_u-\varphi_i$为功率因数角。当二端网络为无源元件R、L、C组成时：

$|\theta_Z|<90°$,$0< pf <1$。

$\theta_Z<0$,电路呈容性，电流导前电压；

$\theta_Z>0$,电路呈感性，电流滞后电压。

5、无功功率

$$Q = UI\sin\theta_Z$$

无功功率反映电源(或外电路)和单口网络内储能元件之间的能量交换情况，单位为乏(var)。

纯电阻网络：　$Q_R = 0$

纯电感网络：　$Q_L = UI$

纯电容网络：　$Q_C = -UI$

一般网络：　$Q = UI\sin\theta_Z = I^2X = -U^2B$

结论　电抗分量消耗的无功功率，就是单口网络的无功功率。

电阻、电感、电容的功率情况比较

	u和i相位差 θ_Z	平均功率	无功功率	无功功率
定义	$\theta_z = \varphi_u - \varphi_i$	$P = UI\cos\theta_z$	$Q = UI\sin\theta_z$	$S = UI$
电阻 R	$\theta_z = 0^\circ$	$P_R = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}$	$Q_R = 0$	
电容 C	$\theta_z = 90^\circ$	$P_L = 0$	$Q_L = UI > 0$	
电感 L	$\theta_z = -90^\circ$	$P_C = 0$	$Q_C = -UI < 0$	
阻抗$Z=R+jX$	$\theta_z = \arctan\frac{X}{R}$	$P = UI\cos\theta_z = I^2R$	$Q = UI\sin\theta_z = I^2X$	

$pf = \cos\theta_Z$ 导前或者滞后

结论

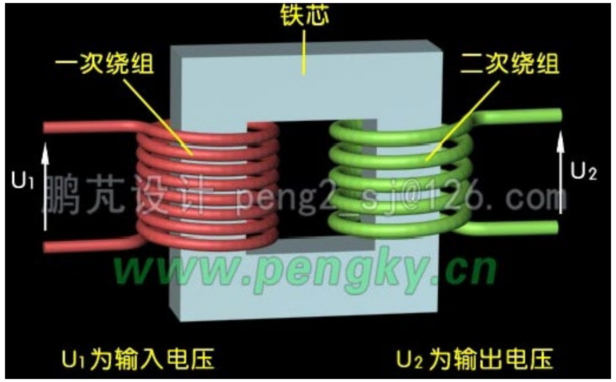
1.电阻只消耗有功功率，不消耗无功功率。

2.电感和电容只消耗无功功率，不消耗有功功率。

无功功率决不是无用功率。
电动机需要利用无功功率建立和维持旋转磁场，使转子转动。
变压器也同样需要无功功率。

电动机

变压器



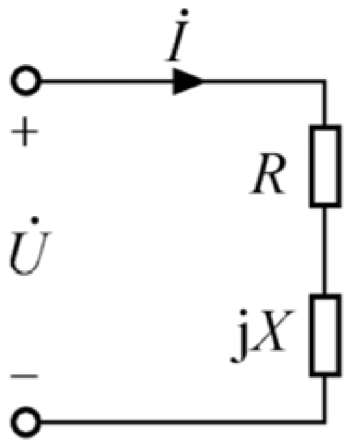
变压器等效图

6、复功率

为了便于用相量来计算平均功率，引入复功率。工作于正弦稳态的网络，其电压电流采用关联的参考方向，设

$$\dot{U}=U\angle\varphi_{u}$$

$$\dot{I}=I\angle\varphi_{i}$$



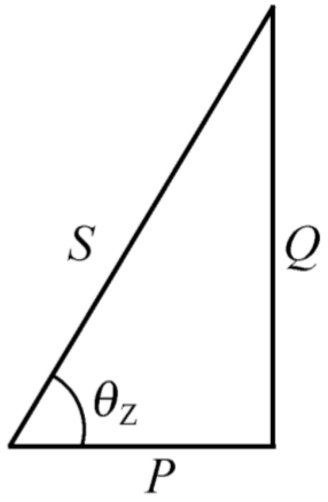


图 8-27　功率三角形

$$\tilde{S}=\dot{U}\overset{*}{I}=UI\angle\varphi_{u}-\varphi_{i}=UI\angle\theta_{Z}=S\angle\theta_{Z}$$

$$=UI\cos\theta_{Z}+\mathrm{j}UI\sin\theta_{Z}=P+\mathrm{j}Q$$

单位：VA

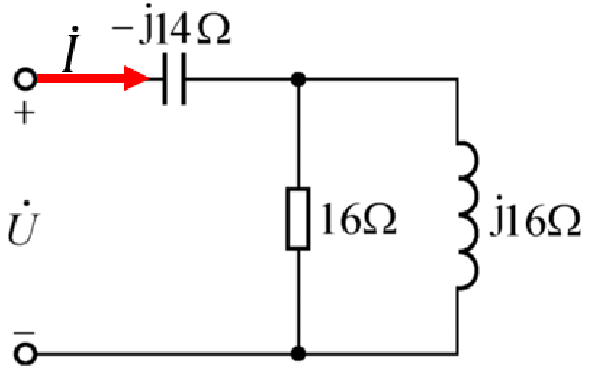
复功率还有两个常用的公式：

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = Z\dot{I}\overset{*}{I} = I^2 Z$$

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = \dot{U}(\dot{U}Y)^* = \dot{U}\overset{*}{U}\overset{*}{Y} = U^2\overset{*}{Y}$$

注意：电流、电压若用振幅值时，不要忘了要乘1/2。

例1 电路相量模型如图，端口电压的有效值U=100V.试求该网络的P、Q、 、S、pf。



解:设端口电压相量为： $\dot{U}=100\angle 0^\circ\,\mathrm{V}$

网络的等效阻抗：

$$Z=-\mathrm{j}14+\frac{16\times \mathrm{j}16}{16+\mathrm{j}16}=-\mathrm{j}14+8+\mathrm{j}8$$

$$=8-\mathrm{j}6=10\angle -36.9^\circ\ \Omega$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{100\angle 0^\circ}{10\angle -36.9^\circ}=10\angle 36.9^\circ\,\mathrm{A}$$

$$\tilde{S}=\dot{U}\cdot\overset{*}{I}=100\angle 0^\circ\cdot 10\angle -36.9^\circ$$

$$=1000\angle -36.9^\circ=800-j600\,\mathrm{VA}$$

$$S=\left|\tilde{S}\right|=1000\,\mathrm{VA}$$

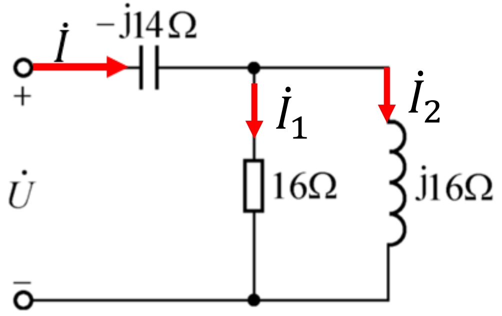
$$P=\mathrm{Re}[\tilde{S}]=800\,\mathrm{W}$$

$$Q=\mathrm{Im}[\tilde{S}]=-600\,\mathrm{Var}$$

$$\theta_Z=-36.9^\circ$$

$$pf=\cos\theta_Z=\cos(-36.9^\circ)=0.8$$ （导前）

例1 电路相量模型如图，端口电压的有效值U=100V.试求该网络的P、Q、 、S、pf。



解:设端口电压相量为：$\dot{U}=100\angle 0^\circ\,\mathrm{V}$

网络的等效阻抗：

$$Z=-\mathrm{j}14+\frac{16\times \mathrm{j}16}{16+\mathrm{j}16}=-\mathrm{j}14+8+\mathrm{j}8$$

$$=8-\mathrm{j}6=10\angle-36.9^\circ\ \Omega$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{100\angle 0^\circ}{10\angle-36.9^\circ}=10\angle 36.9^\circ\,\mathrm{A}$$

如果仅仅求（有功）功率P，可以有如下求解方法。

解一：上页求解复功率

$$\tilde{S}=\dot{U}\cdot\overset{*}{I}=100\angle 0^\circ\cdot 10\angle-36.9^\circ$$

$$=1000\angle-36.9^\circ=800-j600\,\mathrm{VA}$$

$$P=\mathrm{Re}[\tilde{S}]=800\,\mathrm{W}$$

解二：直接用定义

$$P=UI\cos\theta_Z=100\times 10\cos(-36.9^\circ)=800\,\mathrm{W}$$

解三：原理：二端网络消耗的（有功）功率就是电阻消耗的（有功）功率，电抗不消耗（有功）功率

$$\dot{I}_1=\dot{I}\times\frac{\mathrm{j}16}{16+\mathrm{j}16}=10\angle 36.9^\circ\times\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ=5\sqrt{2}\angle 81.9^\circ\,\mathrm{A}$$

$$P=I_1^{\,2}R=(5\sqrt{2})^2\times 16=800\,\mathrm{W}$$

例2感性负载接在U=220V,f=50Hz的交流电源上,其平均功率P=1.1KW,功率因数pf=0.5，欲并联电容使负载的功率因数提高到0.8(滞后),求电容。

解：未并联电容时候：

$$I=\frac{P}{U\cdot pf}=\frac{1.1\times10^{3}}{220\times0.5}=10\mathrm{A}$$

感性负载阻抗角：

$$\theta_Z = \arccos 0.5 = 60?$$

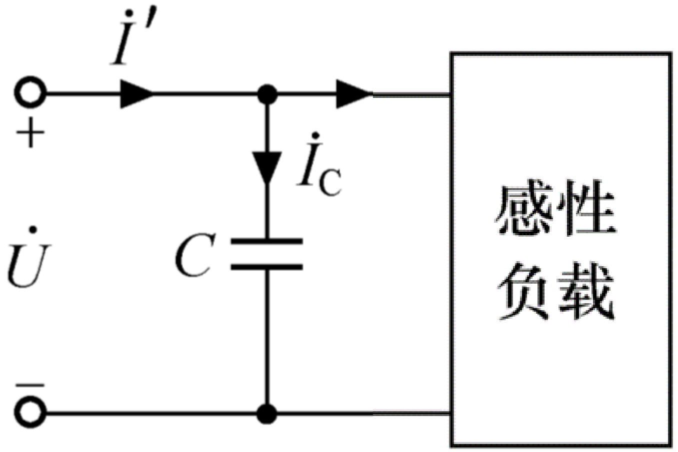
设电压源的电压相量为：

$$\dot{U}=220\angle0^{\circ}\,\mathrm{V}$$

则电流相量为：

$$\dot{I}=10\angle-60^{\circ}\mathrm{A}$$

并联电容后：



$$I'=\frac{P}{U\cdot pf'}=\frac{1.1\times10^{3}}{220\times0.8}=6.25\mathrm{A}$$

根据pf=0.8(滞后)

$$\theta_Z' = \arccos 0.8 = 36.9?$$

$$\dot{I}'=6.25\angle-36.9^{\circ}\mathrm{A}$$

$$C=\frac{I_C}{\omega U}=\frac{4.91}{314\times220}=71\mu\mathrm{F}$$

流过电容的电流相量为

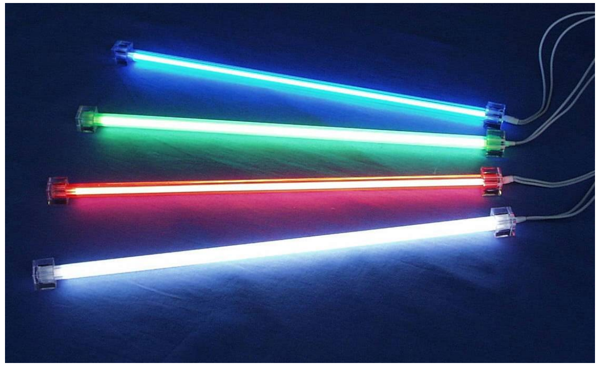
$$\dot{I}_C=\dot{I}'-\dot{I}=6.25\angle-36.9^{\circ}-10\angle-60^{\circ}$$

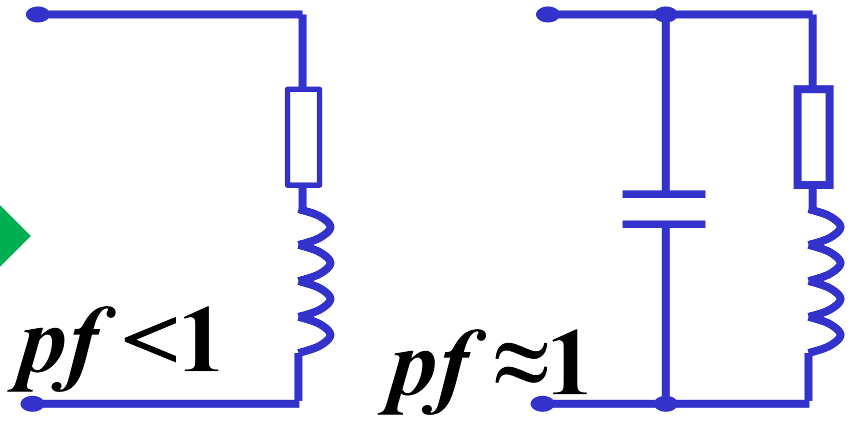
$$=5-\mathrm{j}3.75-(5-\mathrm{j}8.66)=\mathrm{j}4.91=4.91\angle90^{\circ}\mathrm{A}$$

$$\dot{U}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C$$ 两边取模：$$U=\frac{1}{\omega C}I$$

为了提高电能的利用效率，电力部门采用各种措施力求提高功率因数。例如使用镇流器的日光灯电路，它等效于一个电阻和电感的串联，其功率因数小于1，它要求线路提供更大的电流。

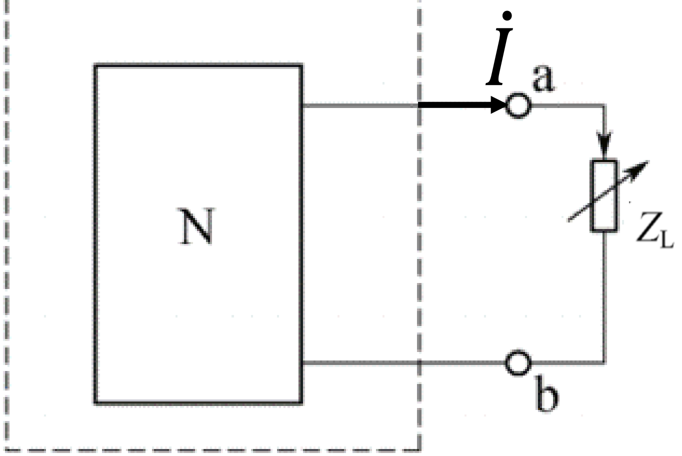
提高功率因数:并联一个适当数值的电容。





8-6-2 最大功率传输

Z_L=?　有功功率P_{max}=?



$$Z_L=R_L+jX_L$$

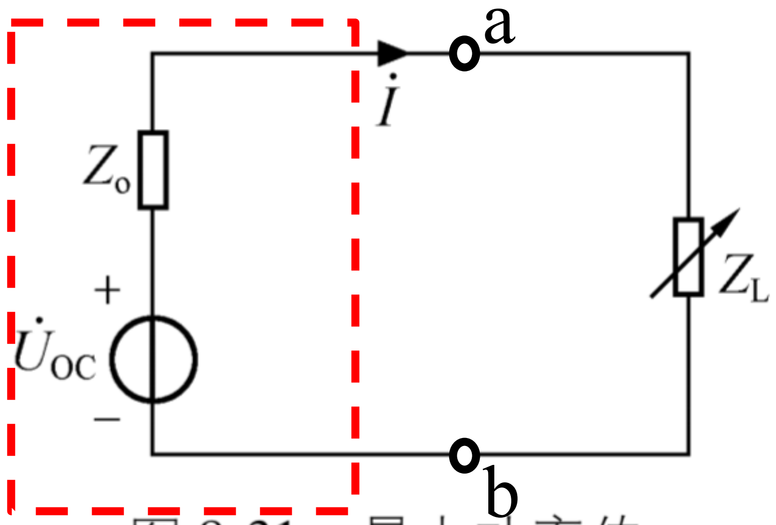


图 8-31　最大功率传输的相量模型

$$Z_o=R_o+jX_o$$

负载电流相量：

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_{oc}}{Z_0+Z_L}=\frac{\dot{U}_{oc}}{R_0+jX_0+R_L+jX_L}$$

两边取模负载电流有效值：

$$I=\frac{U_{oc}}{\sqrt{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2}}$$

负载Z_L吸收的平均功率就是电阻分量的功率：

$$P=I^2R_L=\frac{U_{oc}{}^2R_L}{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2}$$

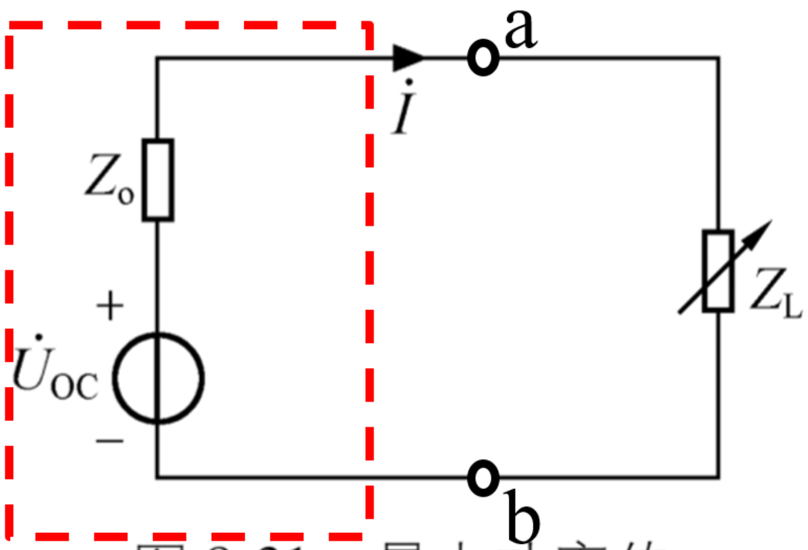


图 8-31 最大功率传输的相量模型

$$Z_0=R_0+jX_0$$

$$P = I^2 R_L = \frac{U_{oc}^{\ 2} R_L}{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + X_L)^2}$$

式中2个变量R_L和X_L,当X_L=-X_0时分母最小

$$P = I^2 R_L = \frac{U_{oc}^{\ 2} R_L}{(R_0 + R_L)^2}$$

此时式中1个变量R_L

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}R_L} = \frac{(R_0 + R_L)^2 - 2R_L(R_0 + R_L)}{(R_0 + R_L)^4} U_{OC}^2 = 0$$

R_L=R_0可获得最大功率

综上可得 $Z_L = \overset{*}{Z}_0 = R_0 - \mathrm{j}X_0$

$$P_{max} = \frac{U_{oc}^{\ 2}}{4R_0}$$

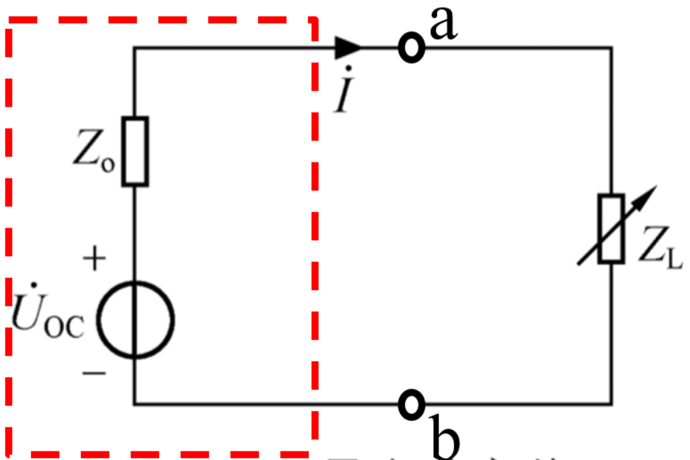


图 8-31 最大功率传输的相量模型

Z_0=R_0+jX_0

最大功率传输定理：工作于正弦稳态的二端网络向一个负载$Z_L=R_L+jX_L$供电，则在负载阻抗等于含源网络输出阻抗的共轭复数(即 $Z_L=\overset{*}{Z}_0$ ）时，负载可以获得最大平均功率：

$$P_{max}=\frac{U_{oc}^{2}}{4R_0}$$

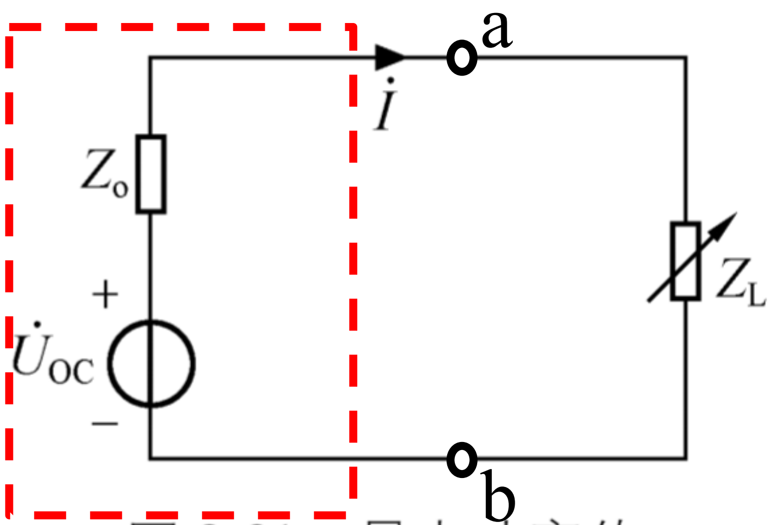
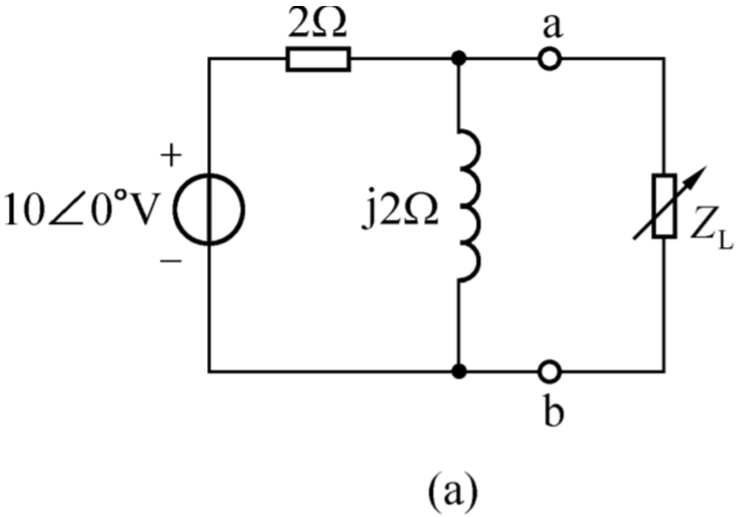


图 8-31　最大功率传输的相量模型

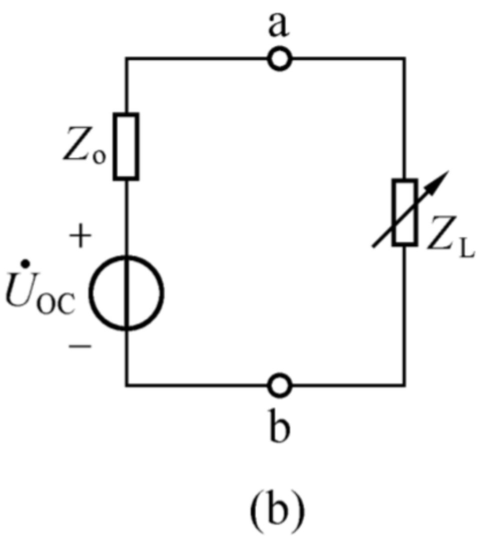
$Z_0=R_0+jX_0$

此种阻抗匹配称为共轭匹配。

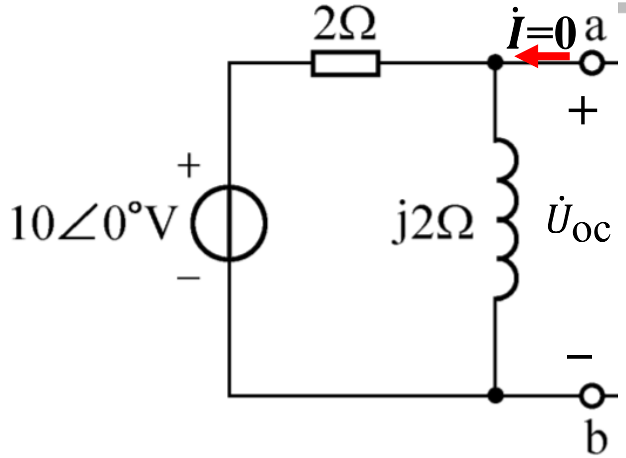
例3 图示电路，已知Z_L为可调负载,试求Z_L为何值时可获最大功率?最大功率为多少?

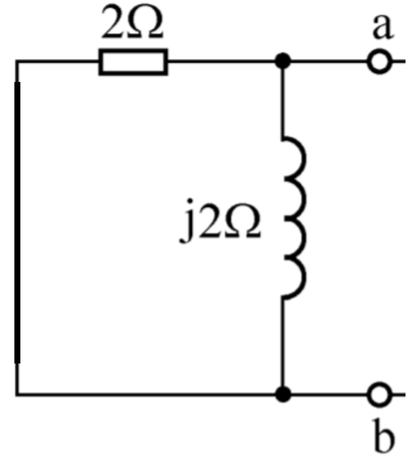


(a)



(b)





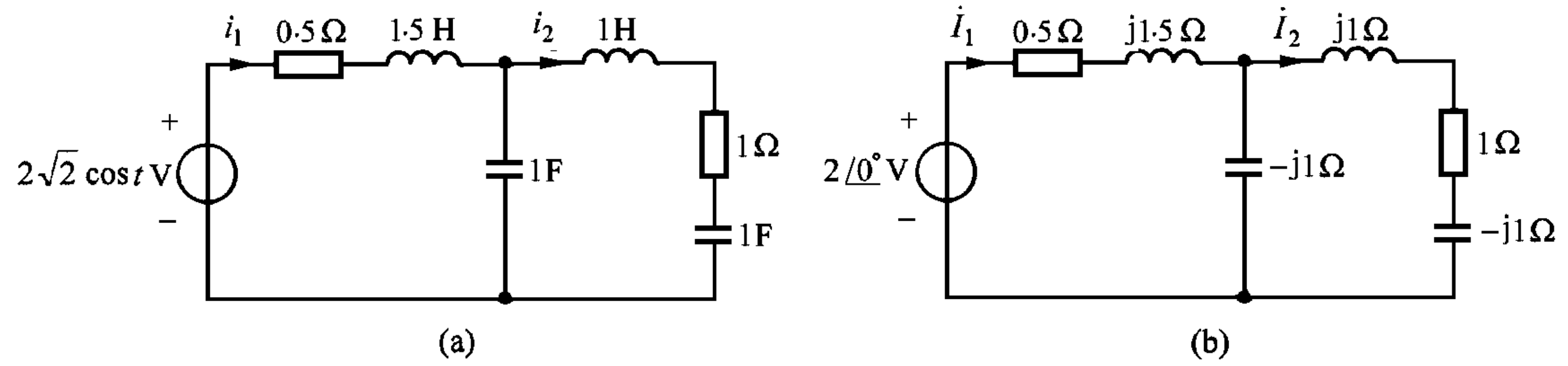
$$\dot{U}_{oc}=\frac{10\angle 0^\circ}{2+j2}\times j2=5\sqrt{2}\angle 45^\circ\text{V}\qquad Z_0=2//j2=\frac{2\times j2}{2+j2}=1+j1\Omega$$

当 $Z_L=\overset{*}{Z}_0=1-j1\Omega$

$$P_{max}=\frac{U_{oc}^{\ 2}}{4R_0}=\frac{(5\sqrt{2})^2}{4\times 1}=12.5\text{W}$$

END

例19 电路工作于正弦稳态，已知电压源电压为 $u_S(t)=2\sqrt{2}\cos t\ \text{V}$。试求该电压源供出的平均功率。



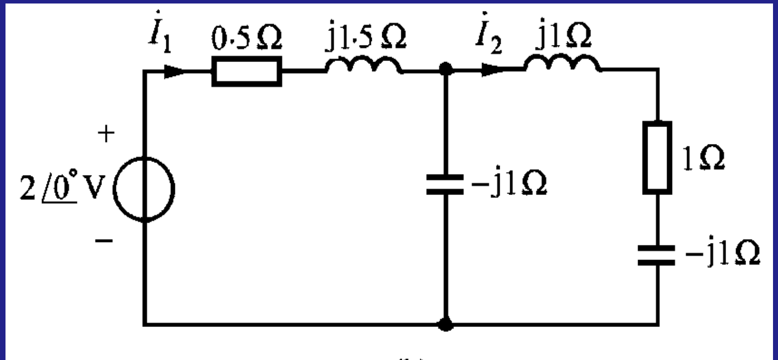
解：电路的相量模型如图(b)所示。先求出连接电压源单口网络的等效阻抗

$$Z=0.5+\text{j}1.5+\frac{(-\text{j}1)(\text{j}1+1-\text{j}1)}{1-\text{j}1}=0.5+\text{j}1.5+0.5-\text{j}0.5=1+\text{j}1\ \Omega$$

$$Z = 1 + \mathrm{j}1\ \Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{\mathrm{S}}}{Z} = \frac{2\angle 0^\circ}{1+\mathrm{j}1} = \sqrt{2}\angle -45^\circ\ \mathrm{A}$$

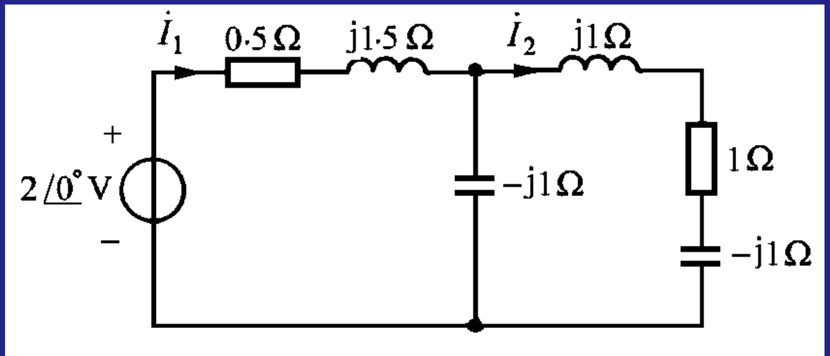
$$\dot{I}_2 = \frac{-\mathrm{j}1}{1-\mathrm{j}1} \times \dot{I}_1 = \frac{-\mathrm{j}1}{\sqrt{2}\angle -45^\circ} \times \sqrt{2}\angle -45^\circ = -\mathrm{j}1 = 1\angle -90^\circ\ \mathrm{A}$$



(b)

该电压源供出的平均功率：

可用以下几种方法求电源供出的平均功率：



(b)

1.电源吸收的平均功率为

$$P_{U\ \mathrm{S吸收}} = -U_S I_1 \cos\theta_Z = -2\times\sqrt{2}\times\cos45^\circ = -2\mathrm{W}$$

电源供出的平均功率为：$P_{\mathrm{Us供出}}=2\mathrm{W}$

2.计算二端网络吸收的平均功率为

$$\tilde{S} = \dot{U}_S \overset{*}{I}_1 = 2\times\sqrt{2}\angle 45^\circ = 2+\mathrm{j}2 \rightarrow P = \mathrm{Re}(\tilde{S}) = 2\mathrm{W}$$

能量守恒，电源供出的平均功率等于二端网络吸收的平均功率，：$P_{\mathrm{Us供出}}=P=2\mathrm{W}$

3.电阻消耗（吸收）平均功率，电抗不消耗，电阻消耗的平均功率由电源提供

$$P_{\mathrm{R\ 吸收}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 2\times0.5+1\times1 = 2\mathrm{W}$$

$$P_{\mathrm{Us供出}}=P_{\mathrm{R吸收}}=2\mathrm{W}$$

8-7 三相电路

思考：1.世界上各国电压标准不同。美国，中国，英国，日本?

2.生活中电工师傅说的220V,311V，380V,537V是什么意思？

3.中国的电力系统采用三相四线制是什么意思？

4.插座和插头为什么有三脚和两脚插座插头？

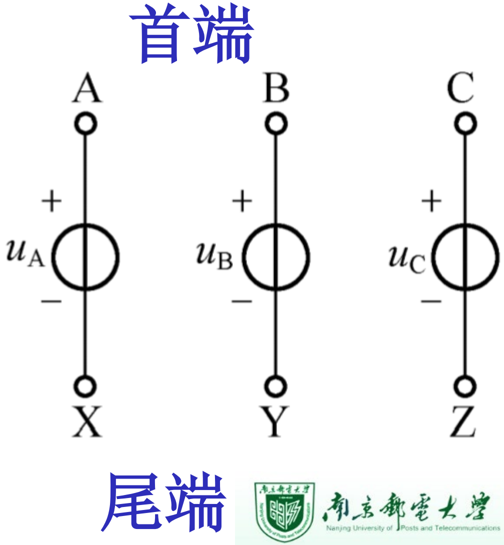
8-7-1 三相电路的基本概念

三相电路：由三相电源、三相线路和三相负载组成的电路。

三相电路的分析计算其实可以看成一个正弦稳态电路的分析计算问题。

三相电源是指能同时产生3个频率相同但相位不同的正弦电压的电源一定方式连接而成的总体。

如果三相电源产生的三个同频正弦电压的振幅相等、相位彼此互差120°，则称为对称三相电源。



$$u_A(t) = \sqrt{2}U_p \cos\omega t \qquad \dot{U}_A = U_p\angle 0^\circ$$

$$u_B(t) = \sqrt{2}U_p \cos(\omega t - 120^\circ) \qquad \dot{U}_B = U_p\angle -120^\circ$$

$$u_C(t) = \sqrt{2}U_p \cos(\omega t + 120^\circ) \qquad \dot{U}_C = U_p\angle 120^\circ$$

U_p:电源电压（相电压）有效值。

对于对称三相电源特点：

三相电源中，把各相电压经过同一值（如最大值）的先后次序称为相序。

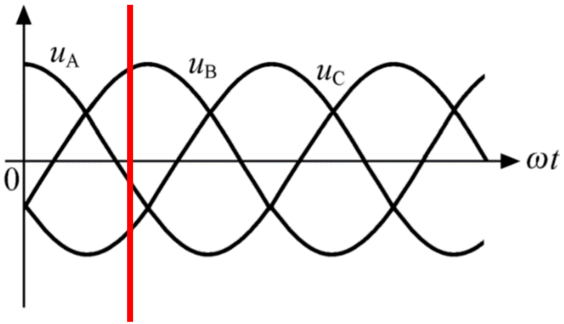
如果相序是A-B-C（或B-C-A;C-A-B）称为 **正序(顺序)**。

如果相序是A-C-B（或C-B-A;B-A-C）称为 **负序(逆序)**。

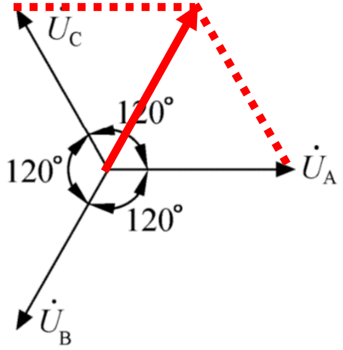
通常，非特别说明，本书三相电源均为**正序**连接。

$$u_A + u_B + u_C = 0$$

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$$



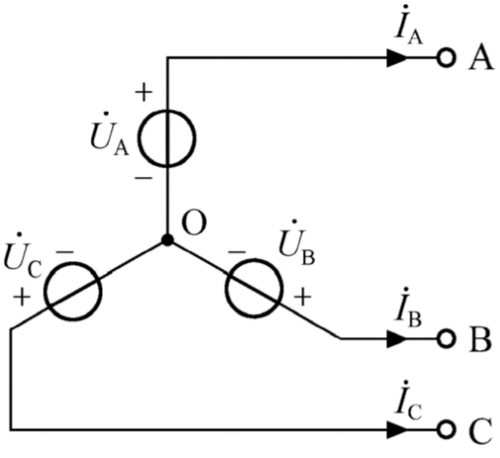
(a) 波形图



(b) 相量图

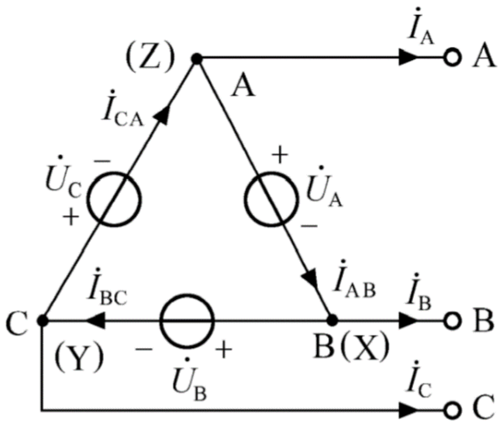
三相电源的两种基本联接方式：

1.星形联接（又称Y形联接）



(a) 星形连接

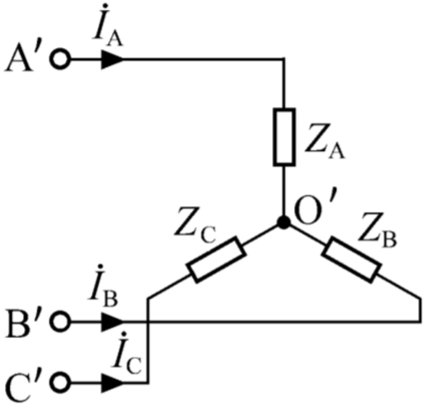
2.三角形联接 (又称Δ联接)



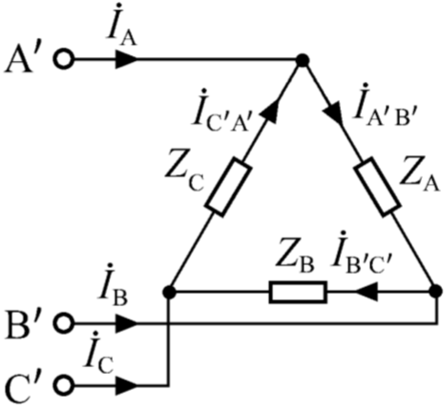
(b) 三角形连接

三相负载

三相电路中，负载一般也是三相的，即有三个负载阻抗组成，每个负载称为三相负载的一相。



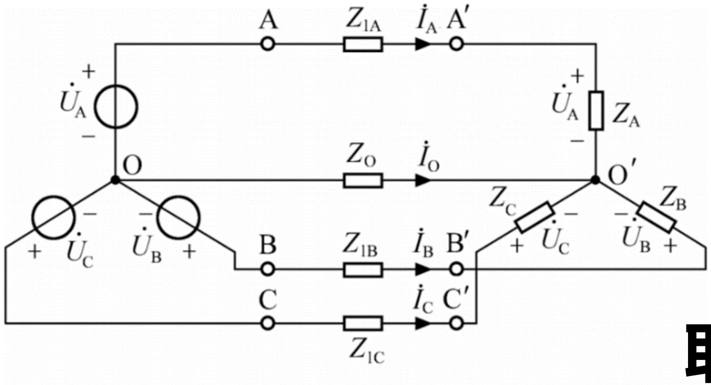
(a) 星形连接



(b) 三角形连接

对称三相负载： $Z_A = Z_B = Z_C = Z$

三相电路：**Page218~219**



(a) 三相四线制的Y-Y三相电路

OO’的连线称为中线或零线

这条线上的电压 $\dot{U}_{OO'}$ ？

对于对称三相电路：

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z, \quad Z_{1A} = Z_{1B} = Z_{1C} = Z_1$$

取 O′ 为参考节点列出电路的节点方程：

$$\dot{U}_{OO'}\left(\frac{3}{Z+Z_1}+\frac{1}{Z_O}\right)=-\frac{\dot{U}_A}{Z+Z_1}-\frac{\dot{U}_B}{Z+Z_1}-\frac{\dot{U}_C}{Z+Z_1}$$

代入 $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$

$$\dot{U}_{OO'} = 0$$

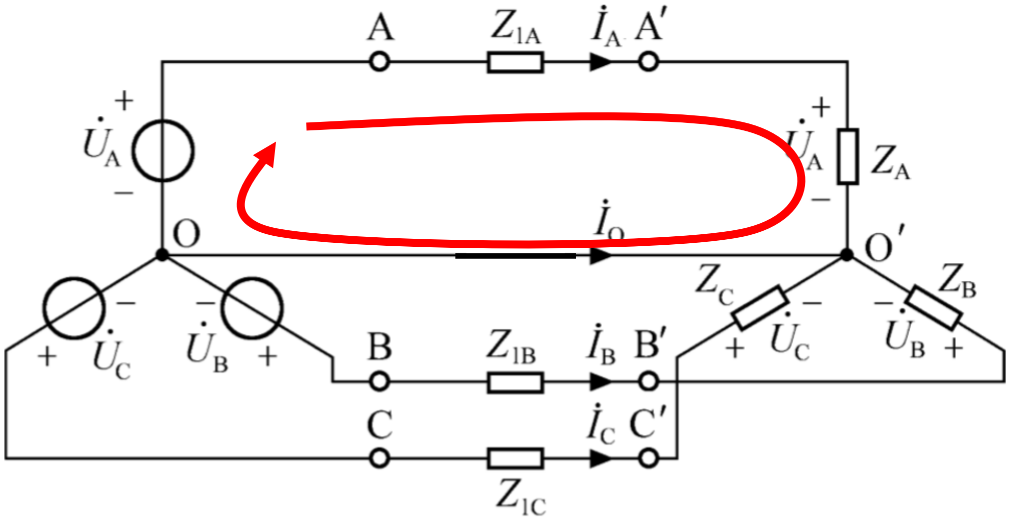
对称三相电路零线上电压为0

由于$\dot{U}_{OO'}$ 相当于中线短路，每其电流可以各相单独计算如下：

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z + Z_l}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z + Z_l}$$

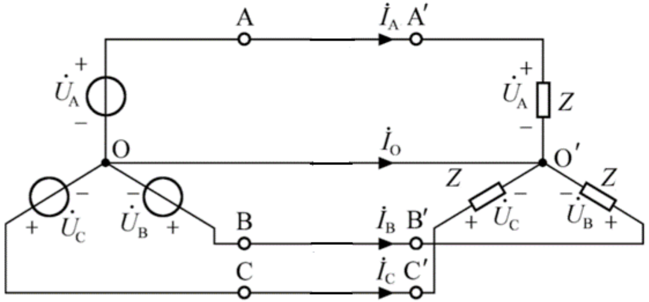
$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z + Z_l}$$



注意：在对称三相四线制电路中，中线阻抗并不影响电路。

例 对称Y-Y电路中，已知

$u_A(t) = 220\sqrt{2}\cos 314t$ V, $Z = (10 + \mathrm{j}10)\Omega$ 试求电流 $\dot{I}_A\ \dot{I}_B\ \dot{I}_C$ 。



解：根据正弦稳态电路知识：

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{10+\mathrm{j}10} = 15.56\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z} = \frac{220\angle -120^\circ}{10+\mathrm{j}10} = 15.56\angle -165^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = 15.56\angle(-45^\circ - 120^\circ) = 15.56\angle -165^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = 15.56\angle(-45^\circ + 120^\circ) = 15.56\angle 75^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z} = \frac{220\angle 120^\circ}{10+\mathrm{j}10} = 15.56\angle 75^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_A = U_p\angle 0^\circ$$

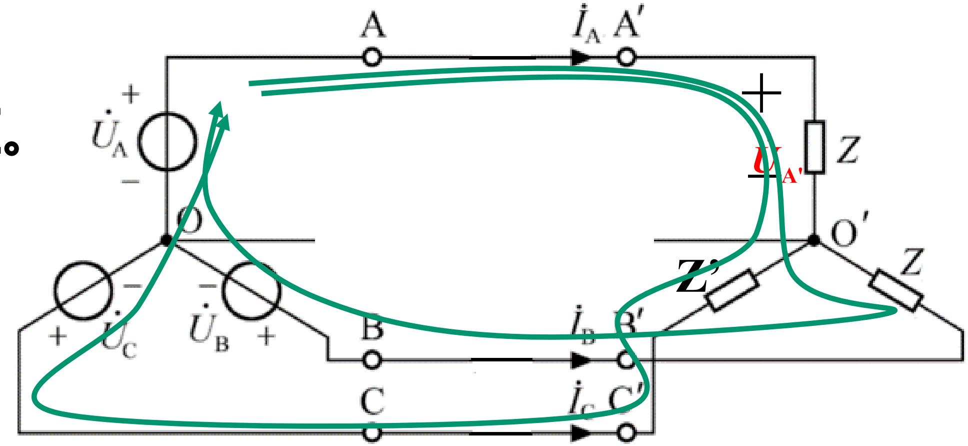
$$\dot{U}_B = U_p\angle -120^\circ$$

$$\dot{U}_C = U_p\angle 120^\circ$$

现实生活中中线能不能去掉？

对称三相电路的对称性

例如 将例上图中的C相负载阻抗为 Z_C=Z′ =(2+j2)Ω，求三相负载电压。



$$-\dot{U}_A + Z\dot{I}_A - Z\dot{I}_B + \dot{U}_B = 0$$

$$-\dot{U}_A + Z\dot{I}_A - Z'\dot{I}_C + \dot{U}_C = 0$$

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

求得：

$$\dot{U}_{A'} = Z\dot{I}_A = 303.1\angle -21.05^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{B'} = Z\dot{I}_B = 303.1\angle -98.95^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{C'} = Z'\dot{I}_C = 94.29\angle 120^\circ \text{ V}$$

可见，A相和B相的电压 由220伏升高到303伏，这两相的电气设备可能损坏；C相的电压降低到94伏，使得C相的电气设备不能正常工作。

8.7.2对称三相电路的分析

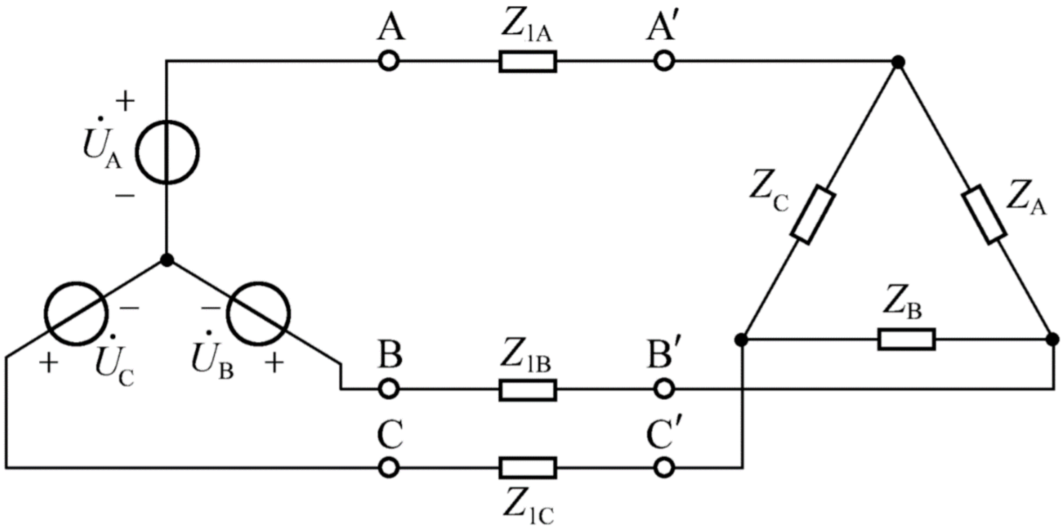
相电压：每相电源或负载端子间的电压。

线电压：电源侧或者负载侧火线间的电压。

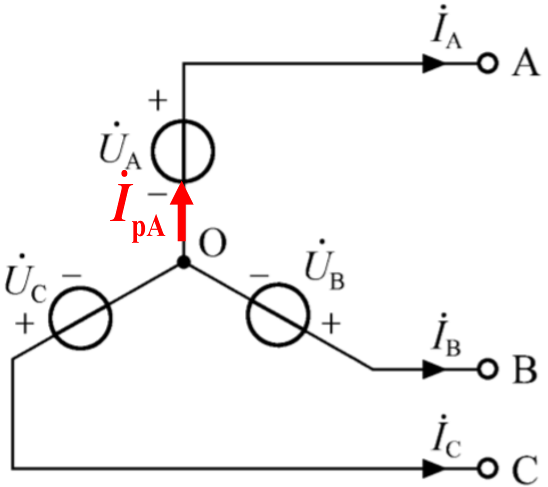
相电流：流过每相电源或负载上的电流。

线电流：流过火线上的电流。

注意：在对称三相电路中，以上各组电压电流均使用对称电路的对称性



1）对于Y形连接的对称电路其线电压、相电压；线电流、相电流间的关系（以电源为例）。



$$\dot{I}_A = \dot{I}_{pA}$$

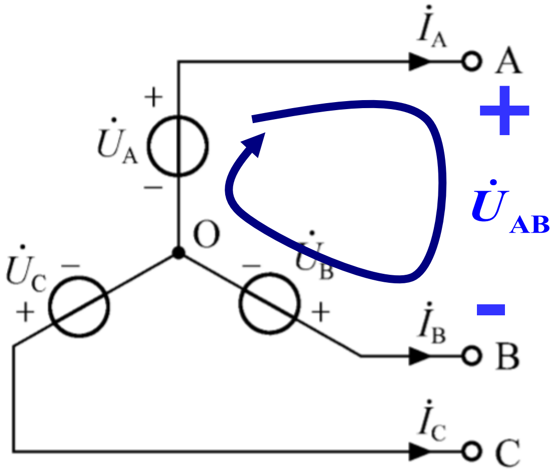
线电流 ＝ 相电流

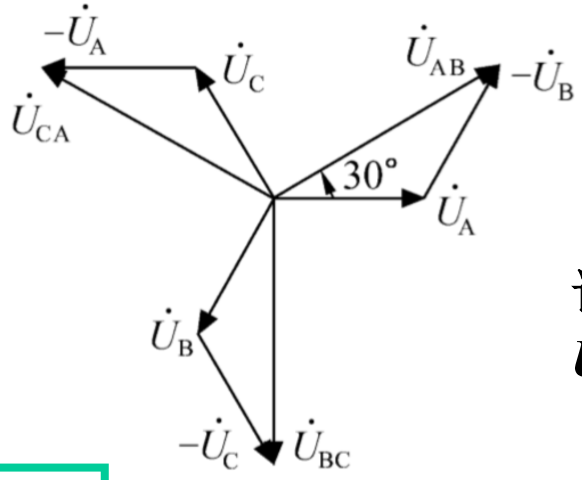
I_l:线电流有效值

I_p:相电流有效值

$$I_l = I_p$$

线电压 $\dot{U}_{AB},\dot{U}_{BC},\dot{U}_{CA}$ 与相电压 $\dot{U}_{A},\dot{U}_{B},\dot{U}_{C}$ 之间的关系：





设U_p是相电压的有效值
U_l是线电压的有效值

$$\dot{U}_{AB}=\dot{U}_A-\dot{U}_B=\sqrt{3}U_p\angle 30^\circ=\sqrt{3}\dot{U}_A\angle 30^\circ$$

$$\dot{U}_{BC}=\dot{U}_B-\dot{U}_C=\sqrt{3}U_p\angle -90^\circ=\sqrt{3}\dot{U}_B\angle 30^\circ$$

$$\dot{U}_{CA}=\dot{U}_C-\dot{U}_A=\sqrt{3}U_p\angle 150^\circ=\sqrt{3}\dot{U}_C\angle 30^\circ$$

线电压$=\sqrt{3}$ 相电压$\angle 30^\circ$

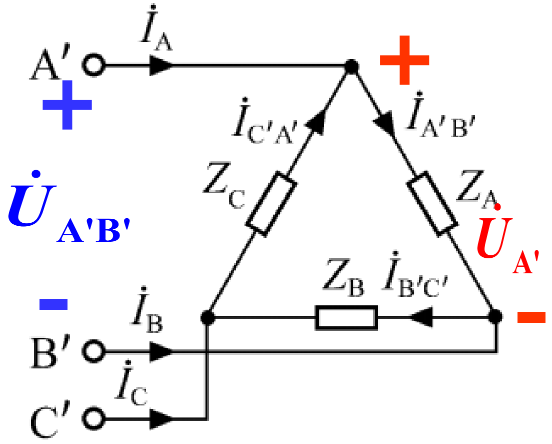
$$U_l=\sqrt{3}U_p$$

对称三相电路的对称性

以上结论对作星形连接的三相负载也适用!

南京邮电大学 Nanjing University of Posts and Telecommunications

2.对于三角形连接的对称电路其线电压、相电压；线电流、相电流间的关系（以负载为例）。

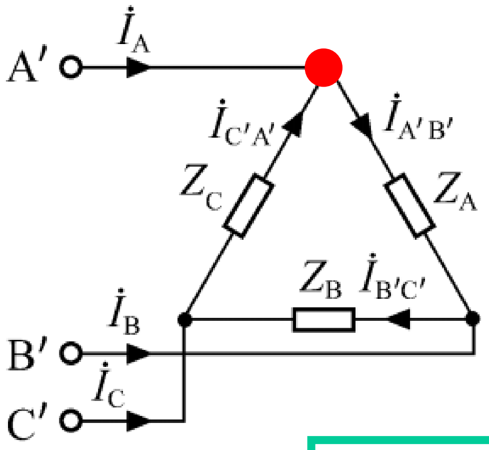


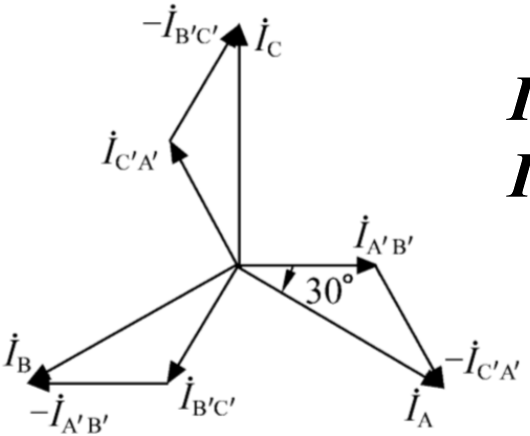
$$\dot{U}_{A'B'}=\dot{U}_{A'}$$

线电压 ＝ 相电压

$$U_l = U_p$$

线电流 $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ 与相电流 $\dot{I}_{A'B'}, \dot{I}_{B'C'}, \dot{I}_{C'A'}$ 你之间的关系。





I_l:线电流有效值
I_p:相电流有效值

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A'B'} - \dot{I}_{C'A'} = \boxed{\sqrt{3}I_p\angle -30^\circ} = \sqrt{3}\dot{I}_{A'B'}\angle -30^\circ$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{B'C'} - \dot{I}_{A'B'} = \boxed{\sqrt{3}I_p\angle -150^\circ} = \sqrt{3}\dot{I}_{B'C'}\angle -30^\circ$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{C'A'} - \dot{I}_{B'C'} = \boxed{\sqrt{3}I_p\angle 90^\circ} = \sqrt{3}\dot{I}_{C'A'}\angle -30^\circ$$

线电流 $= \sqrt{3}$ 相电流 $\angle -30^\circ$

$$I_l = \sqrt{3}I_p$$

以上结论对作三角形连接的三相电源也适用!

电源或者负载作Y形连接：

线电流 = 相电流

$I_l = I_p$

线电压 $= \sqrt{3}$ **相电压** $\angle 30°$

$U_l = \sqrt{3} U_p$

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} U_p \angle 30° = \sqrt{3} \dot{U}_A \angle 30°$$

$$\dot{U}_{BC} = \sqrt{3} U_p \angle -90° = \sqrt{3} \dot{U}_B \angle 30°$$

$$\dot{U}_{CA} = \sqrt{3} U_p \angle 150° = \sqrt{3} \dot{U}_C \angle 30°$$

电源或者负载作△形连接：

线电压 = 相电压

$U_l = U_p$

线电流 $= \sqrt{3}$ **相电流** $\angle -30°$

$I_l = \sqrt{3} I_p$

$$\dot{I}_A = \sqrt{3} I_p \angle -30° = \sqrt{3} \dot{I}_{A'B'} \angle -30°$$

$$\dot{I}_B == \sqrt{3} I_p \angle -150° = \sqrt{3} \dot{I}_{B'C'} \angle -30°$$

$$\dot{I}_C == \sqrt{3} I_p \angle 90° = \sqrt{3} \dot{I}_{C'A'} \angle -30°$$

满足对称三相电路的对称性

3 对称三相电路的功率

在三相电路中，无论负载如何连接及是否对称，其三相负载吸收的总平均功率：

$$P = P_{\mathrm{A}} + P_{\mathrm{B}} + P_{\mathrm{C}}$$

$$= U_{\mathrm{pA}} I_{\mathrm{pA}} \cos\theta_{\mathrm{A}} + U_{\mathrm{pB}} I_{\mathrm{pB}} \cos\theta_{\mathrm{B}} + U_{\mathrm{pC}} I_{\mathrm{pC}} \cos\theta_{\mathrm{C}}$$

其中：U_{px},I_{px}是各相负载的相电压和相电流的有效值；cosθ_{X}是各相的功率因数，θ_{X}是各相相电压与相电流的相位差(阻抗角)。

在对称三相电路中，无论负载为何连接：

$$\because U_{pA}=U_{pB}=U_{pC}=U_{p},I_{pA}=I_{pB}=I_{pC}=I_{p}$$

$$\cos\theta_{A}=\cos\theta_{B}=\cos\theta_{C}=\cos\theta_{Z}$$

负载吸收的总平均功率： $P=3U_{p}I_{p}\cos\theta_{Z}$

由于线电压和线电流容易测量，

对于Y负载，有： $U_{l}=\sqrt{3}U_{p},I_{l}=I_{p}$

对于Δ负载，有： $U_{l}=U_{p},I_{l}=\sqrt{3}I_{p}$

$$\underline{P=3U_{p}I_{p}\cos\theta_{Z}}=3\frac{U_{l}I_{l}}{\sqrt{3}}\cos\theta_{z}=\underline{\sqrt{3}U_{l}I_{l}\cos\theta_{z}}$$

电源或者负载作Y形连接：

线电流 = 相电流

$I_l = I_p$

线电压 = $\sqrt{3}$ 相电压$\angle 30°$

$U_l = \sqrt{3} U_p$

$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} U_p \angle 30^{\circ} = \sqrt{3} \dot{U}_A \angle 30°$

$\dot{U}_{BC} = \sqrt{3} U_p \angle -90^{\circ} = \sqrt{3} \dot{U}_B \angle 30°$

$\dot{U}_{CA} = \sqrt{3} U_p \angle 150^{\circ} = \sqrt{3} \dot{U}_C \angle 30°$

电源或者负载作△形连接：

线电压 = 相电压

$U_l = U_p$

线电流 = $\sqrt{3}$ 相电流$\angle -30°$

$I_l = \sqrt{3} I_p$

$\dot{I}_A = \sqrt{3} I_p \angle -30^{\circ} = \sqrt{3} \dot{I}_{A'B'} \angle -30°$

$\dot{I}_B == \sqrt{3} I_p \angle -150° = \sqrt{3} \dot{I}_{B'C'} \angle -30°$

$\dot{I}_C == \sqrt{3} I_p \angle 90^{\circ} = \sqrt{3} \dot{I}_{C'A'} \angle -30°$

满足对称三相电路的对称性

$$P = 3U_p I_p \cos\theta_Z = 3\frac{U_l I_l}{\sqrt{3}} \cos\theta_z = \sqrt{3} U_l I_l \cos\theta_z$$

下面讨论对称三相电路的瞬时功率:

$$p_A = u_{pA} \cdot i_{pA} = \sqrt{2} U_p \cos\omega t \cdot \sqrt{2} I_p \cos(\omega t - \theta_Z)$$
$$= U_p I_p [\cos\theta_Z + \cos(2\omega t - \theta_Z)]$$

$$p_B = u_{pB} \cdot i_{pB} = \sqrt{2} U_p \cos(\omega t - 120°) \cdot \sqrt{2} I_p \cos(\omega t - 120° - \theta_Z)$$
$$= U_p I_p [\cos\theta_Z + \cos(2\omega t - 240° - \theta_Z)]$$

$$p_C = u_{pC} \cdot i_{pC} = \sqrt{2} U_p \cos(\omega t + 120°) \cdot \sqrt{2} I_p \cos(\omega t + 120° - \theta_Z)$$
$$= U_p I_p [\cos\theta_Z + \cos(2\omega t + 240° - \theta_Z)]$$

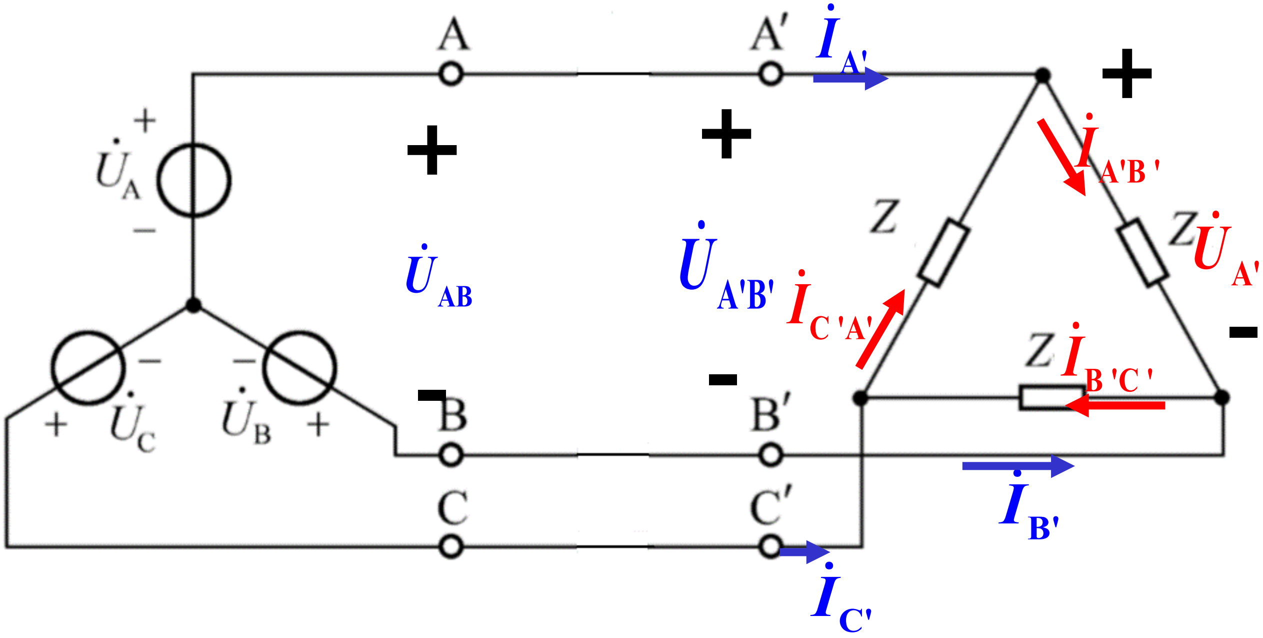
$$p(t) = p_A + p_B + p_C = 3 U_p I_p \cos\theta_Z$$

三相瞬时功率是不随时间变化的常数，并且等于其平均功率。

例 对称Y-Δ三相电路中，已知

$$u_{AB}(t) = 220\sqrt{2}\cos 314t\ \text{V},\ Z = 10\sqrt{2}?60^{o}\,\Omega$$

试求负载相电流和线电流及负载吸收功率。



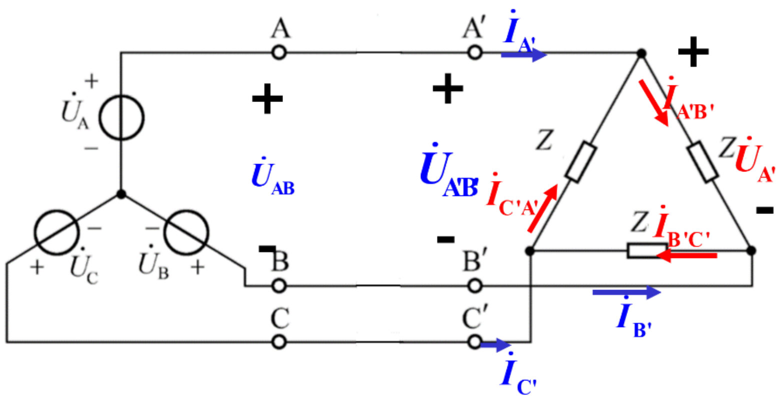
根据三角形连接负载的特点，线电压等于相电压

$$\dot{U}_{A'} = \dot{U}_{A'B'} = \dot{U}_{AB} = 220\angle 0^\circ$$

可得相电流

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{U}_{A'B'}}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{10\sqrt{2}\angle 60^\circ} = 15.56\angle -60^\circ \text{ A}$$

根据对称三相电路的对称性



$$\dot{I}_{B'C'} = 15.56\angle -180^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{C'A'} = 15.56\angle 60^\circ \text{ A}$$

根据三角形连接负载，线电流和相电流关系，线电流为：

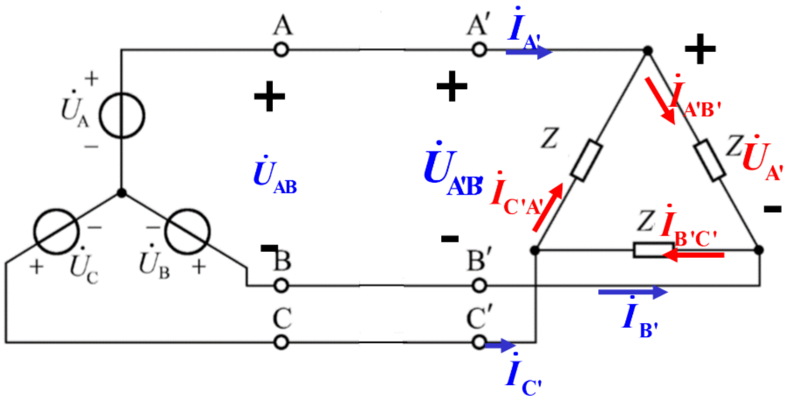
$$\dot{I}_{A'}=\sqrt{3}\dot{I}_{A'B'}\angle-30^{\circ}=\sqrt{3}\times15.56\angle-60^{\circ}-30^{\circ}=15.56\sqrt{3}\angle-90^{\circ}\text{ A}$$

根据对称三相电路的对称性

$$\dot{I}_{B'}=15.56\sqrt{3}\angle-90^{\circ}-120^{\circ}$$

$$=15.56\sqrt{3}\angle-210^{\circ}+360^{\circ}$$

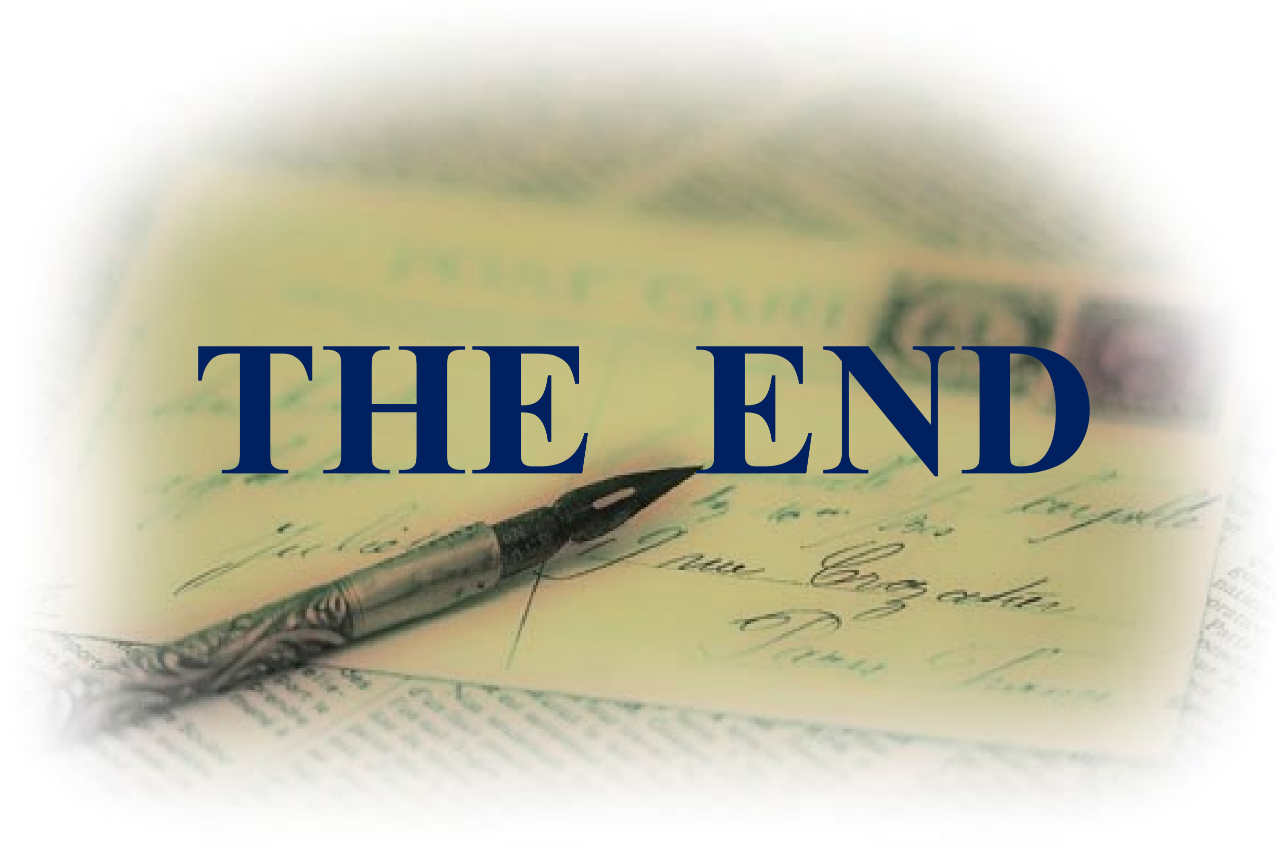
$$=15.56\sqrt{3}\angle150^{\circ}\text{ A}$$



$$\dot{I}_{C'}=15.56\sqrt{3}\angle-90^{\circ}+120^{\circ}=15.56\sqrt{3}\angle30^{\circ}\text{ A}$$

$$P=\sqrt{3}U_lI_l\cos\theta_z$$

$$=\sqrt{3}\times220\times15.56\sqrt{3}\times\cos60^{\circ}=5134.8\text{W}$$

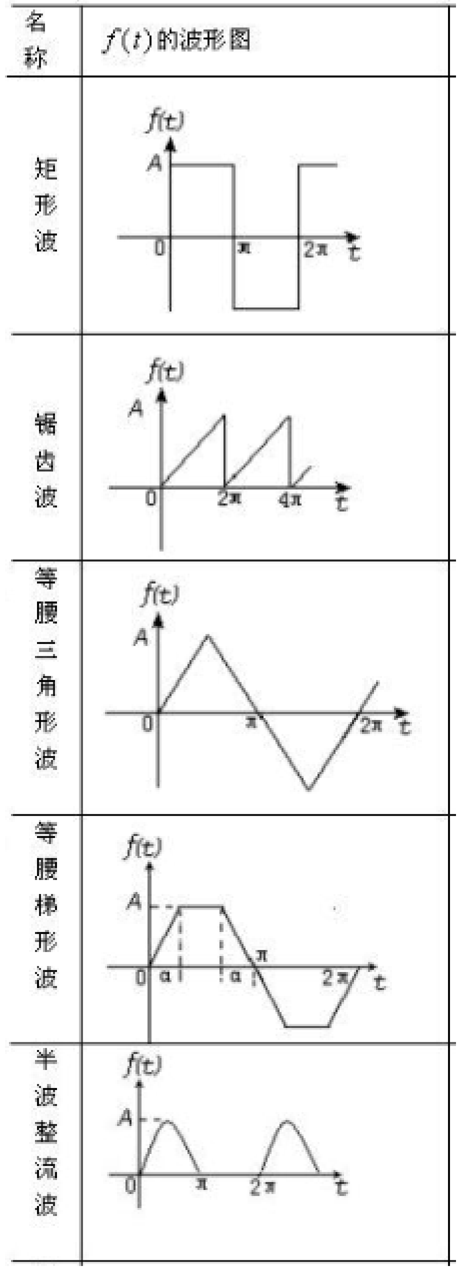


THE END

8-8 非正弦周期电路的稳态分析

非正弦周期信号的分解

非正弦周期信号：



根据傅立叶级数理论，**任一周期信号$f(t)$**总是可以展开为傅立叶级数，即有：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T},\qquad a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 tdt,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 tdt$$

将上式中的同频率项合并，则有：

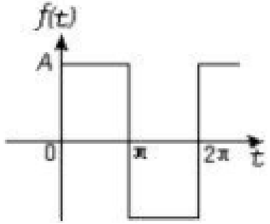
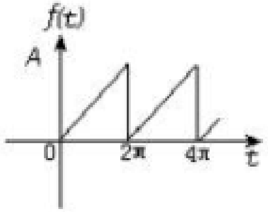
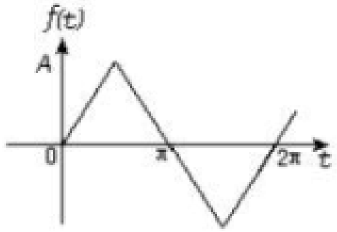
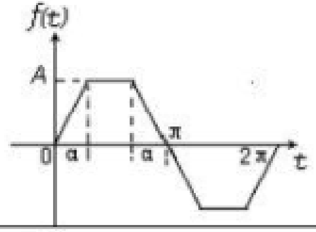
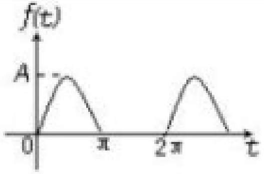
$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

其中：$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T},\quad A_0=a_0,$

$$A_n=\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2},\quad \varphi_n=\arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

结论

利用傅里叶级数非正弦周期信号$f(t)$可分解为**直流分量**和**各次谐波分量**之和。

名称	$f(t)$的波形图	$f(t)$的傅立叶级数
矩形波		$f(t)=\frac{4A}{\pi}(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\cdots+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots+\frac{1}{k}\sin k\omega t+\cdots)$ k为奇数
锯齿波		$f(t)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}(\sin\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\cdots+\frac{1}{k}\sin k\omega t+\cdots)$
等腰三角形波		$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}(\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\omega t-\cdots+\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2}\sin k\omega t+\cdots)$ k为奇数
等腰梯形波		$f(t)=\frac{4A}{2\pi}(\sin\alpha\sin\omega t+\frac{1}{9}\sin 3\alpha\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\alpha\sin 5\omega t+\cdots+\frac{1}{k^2}\sin k\alpha\sin k\omega t+\cdots)$ k为奇数
半波整流波		$f(t)=\frac{A}{\pi}(1+\frac{\pi}{2}\sin\omega t-\frac{2}{3}\cos 2\omega t-\frac{2}{15}\cos 4\omega t-\cdots-\frac{2}{(k-1)(k+1)}\cos k\omega t-\cdots)$ k为偶数

非正弦周期信号的平均功率

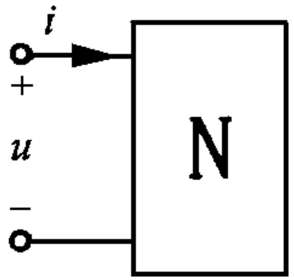
假设非正弦周期信号电压和电流为：

$$u(t) = U_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_{u1}) + U_{2m}\cos(\omega_2 t + \varphi_{u2})$$

$$i(t) = I_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_{i1}) + I_{2m}\cos(\omega_2 t + \varphi_{i2})$$

$$\omega_1 \neq \omega_2, \omega_2 = n\omega_1$$

$$\begin{aligned} p(t) = & \ u(t)i(t) \\ = & \ U_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_{u1})I_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_{i1}) \\ & + U_{2m}\cos(\omega_2 t + \varphi_{u2})I_{2m}\cos(\omega_2 t + \varphi_{i2}) \\ & + U_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_{u1})I_{2m}\cos(\omega_2 t + \varphi_{i2}) \\ & + U_{2m}\cos(\omega_2 t + \varphi_{u2})I_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_{i1}) \end{aligned}$$



非正弦周期信号的单口网络

这说明两种不同频率正弦信号激励的单口网络所吸收的平均功率等于每种正弦信号单独引起平均功率之和。

它的平均功率为 $P = \dfrac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = U_1 I_1\cos\theta_1 + U_2 I_2\cos\theta_2 + 0 + 0$

$$= P_1 + P_2$$

结论

一般来说，n 种不同频率正弦信号作用于单口网络引起的平均功率等于每种频率正弦信号单独引起的平均功率之和，即

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$$

其中 $P_k = U_k I_k \cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik}) = U_k I_k \cos\theta_k$

例2 已知图7-8-1所示单口网络的电压和电流为

$$u(t) = 100 + 100\cos t + 50\cos 2t + 30\cos 3t\,\mathrm{V}$$

$$i(\mathrm{t}) = 10\cos(t - 60^{\circ})\mathrm{A} + 2\cos(3t - 135^{\circ})\mathrm{A}$$

试求单口网络吸收的平均功率。

解：分别计算每种频率正弦信号单独作用产生的平均功率

$$P_0 = 0 \quad P_1 = \frac{100 \times 10}{2}\cos 60^{\circ} = 250\,\mathrm{W}$$

$$P_2 = 0 \quad P_3 = \frac{30 \times 2}{2}\cos 135^{\circ} = -21.2\mathrm{W}$$

将这些平均功率相加得到单口网络吸收的平均功率

$$P = P_0 + P_2 + P_2 + P_3 = (0 + 250 + 0 - 21.2) = 228.8\mathrm{W}$$

非正弦周期信号的有效值

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

用傅里叶级数分解出非正弦周期电流和电压信号的直流分量和各种谐波分量后，可以用以下公式计算它们的**有效值**：

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots + I_n^2}$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2}$$

非正弦周期信号的有效值=其直流分量和各次谐波分量**有效值**的平方和的平方根。

如果该非正弦周期信号作用于**纯电阻网络**，其平均功率可以用以下公式求得：

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

例题3已知流过5Ω电阻的电流为 $i(t)=5+10\sqrt{2}\cos t+5\sqrt{2}\cos 2t\ \mathrm{A}$

求电阻吸收的平均功率。

解1：分别计算各种频率成分的平均功率再相加，即

$$P=P_0+P_1+P_2=5^2\times5+10^2\times5+5^2\times5=125+500+125=750\mathrm{W}$$

解2：

$$I=\sqrt{I_0{}^2+I_1{}^2+I_2{}^2}=\sqrt{5^2+10^2+5^2}=\sqrt{150}\,\mathrm{A}$$

$$P=I^2R=\left(\sqrt{150}\right)^2\times5=750\mathrm{W}$$

式中的 $I=\sqrt{150}$ 是周期性非正弦电流的有效值。

作业：非周期信号：8-41,8-42