第6章　一阶电路分析

静态元件： 端电压与端电流之间为代数关系的电路元件。

静态电路： 仅由静态元件构成的电路；

静态电路——静态、即时：响应仅由激励引起，激励 - 响应关系的数学方程为代数方程 。

动态元件：端电压与端电流之间为微分或积分关系的电路元件。

动态电路：电路中含动态元件的电路。

动态电路—动态、过渡过程：响应与激励的全部历史有关，激励 - 响应关系的数学方程为微分方程 。

分为：一阶电路、二阶电路和高阶电路；

电路的实际阶数由组成动态电路的独立的动态元件数决定。

本章内容：

6 - 1 电容元件和电感元件

6 - 2 动态方程及初始值计算

6 - 3 一阶电路的零输入响应

6 - 4 一阶电路的零状态响应

6 - 5 一阶电路的全响应

6 - 6 一阶电路的三要素法（重点）

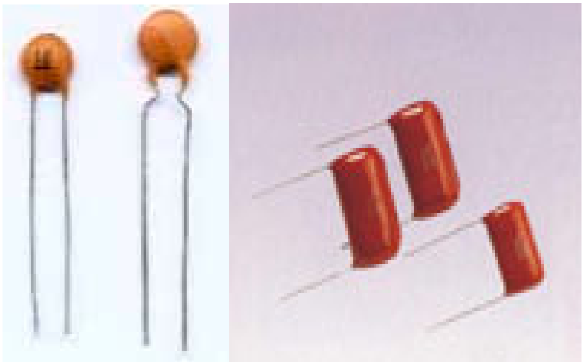
6 - 7 一节电路的阶跃响应（重点，难点）

6 - 9 二阶电路分析（第7章）

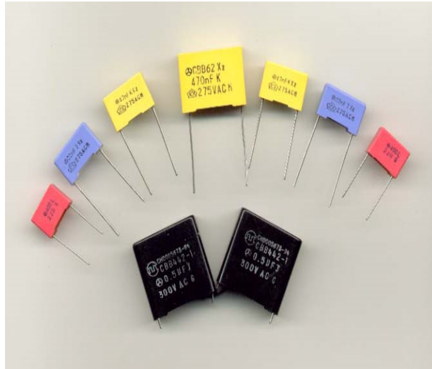
电容元件和电感元件

实际电容器

电解电容器

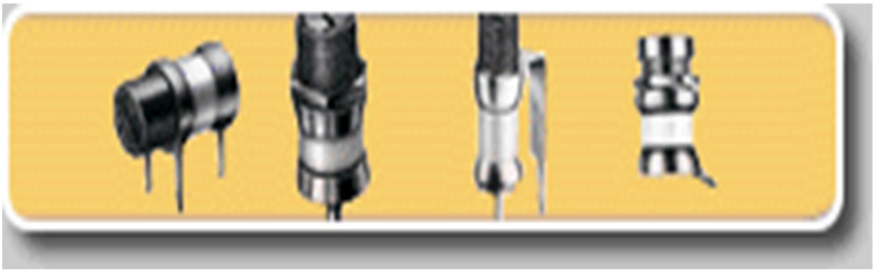


瓷质电容器



聚丙烯膜电容器

固 定 电 容 器



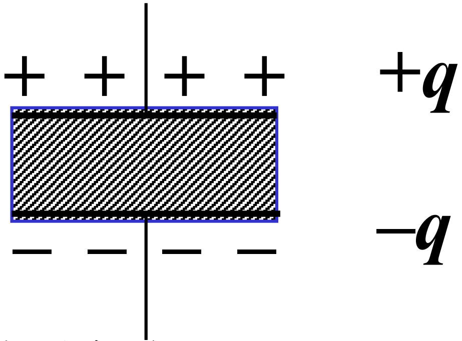
管式空气可调电容器

片式空气可调电容器

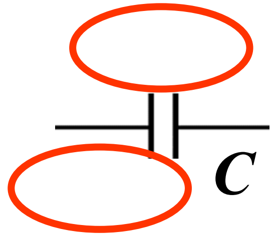
可 变 电 容 器

电容元件

电容器

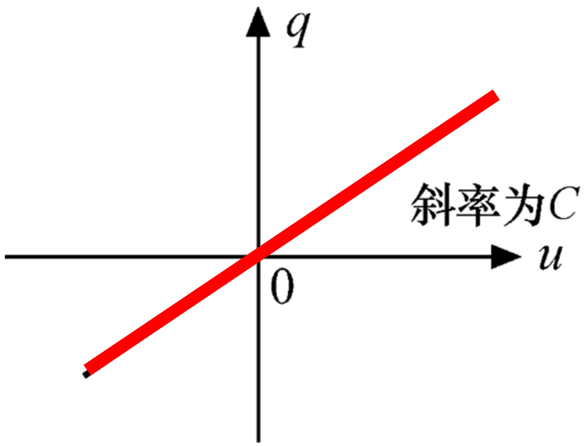


电路模型



一、元件特性

描述电容的两个基本变量: **q , u**



库伏（***u-q***）特性曲线

线性非时变

$$q(t) = Cu(t)$$

单位：法[拉]，

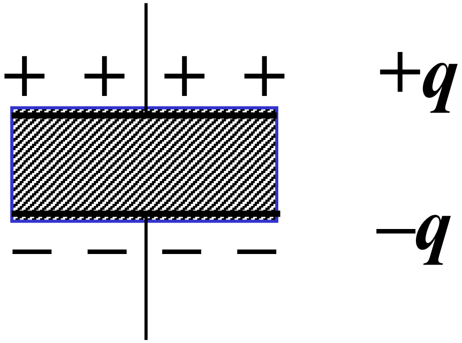
符号：**F (Farad)**

常用μF：**10^{-6} F** ；

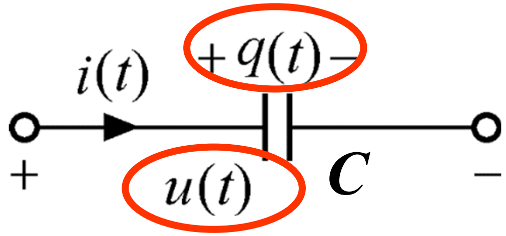
pF：10^{-12} F等表示。

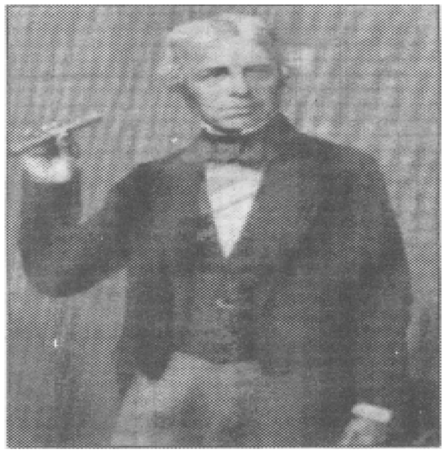
电容元件

电容器



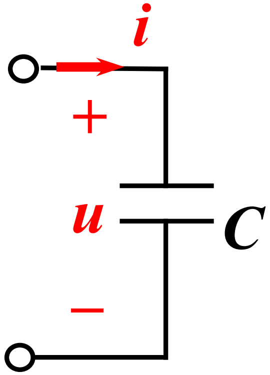
电路模型





法拉第是一位英国化学家和物理学家，他在1931年发现了电磁感应，提供了产生电的一种新的方法。电磁感应是电动机和发电机的工作原理。电容的单位(Farad)即以他的名字命名。

二、线性电容的VCR关系



$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

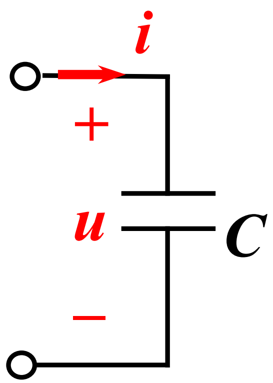
结论

1. i 的大小与 u 的变化率成正比，与 u 的大小无关；（动态元件）

2. 当 u为常数时，du/dt =0 → i=0。电容在直流电路中相当于开路——电容有隔直作用；（比如：开关已经闭合很久；电路已经稳定）

3. 当 i为有限值，电压只能是时间的连续函数，电压不会发生跳变。（惯性元件）

三、线性电容VCR关系的积分形式



$$i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \Rightarrow u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}(\xi)$$

$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\boxed{u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi}$$

初始电压

结论

电容元件是一种记忆元件。

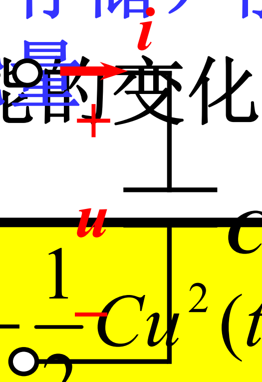
四、电容的储能

充电，$p_{吸}>0$ 吸收（存储）能量

放电，$p_{吸}<0$ 释放能量

$$p_{吸} = u(t)i(t) = u(t)\cdot C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

从t_0到t电容储能的变化量：



$$w_C(t) = \int_{-\infty}^{t} p_{吸}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{t} u(\xi)C\frac{\mathrm{d}u(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}C$$

若$u(-\infty)=0$

$$= \frac{1}{2}Cu^2(t) \geq 0$$

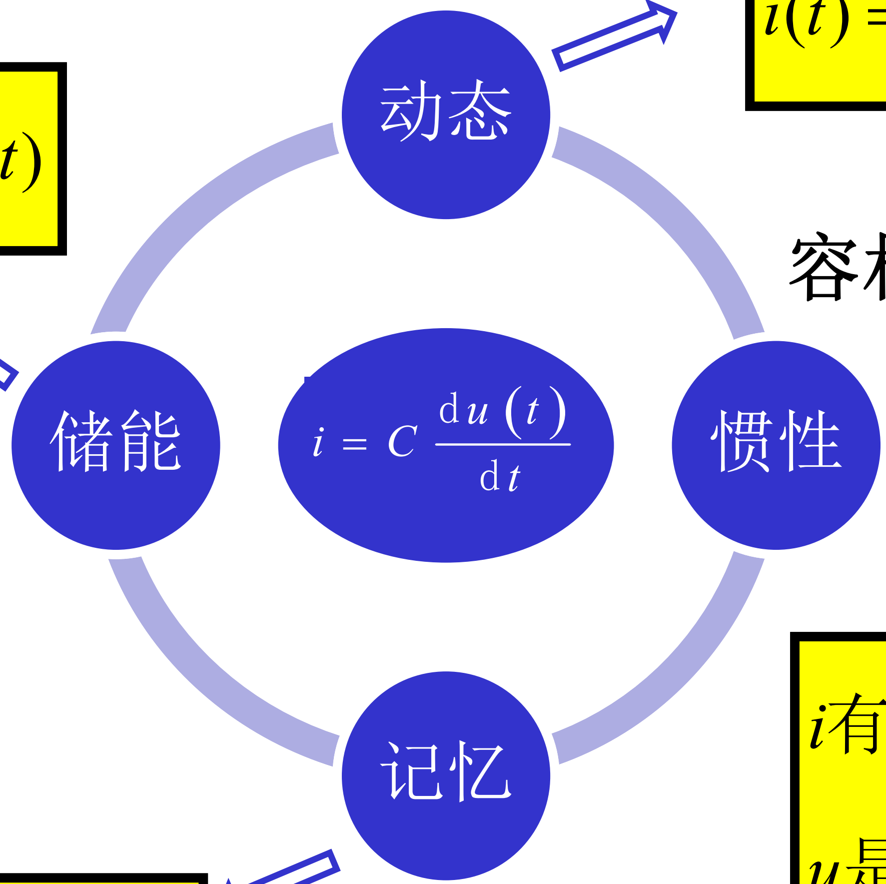
$$\boxed{w_C = \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(t_0)}$$

结论

1. 电容元件是无源元件。(不是耗能元件，存储或释放能量)
2. 电容以电场形式存储能量的，任一时刻电容的储能仅取决于该时刻电容的电压值，而与此时刻电容的电流值无关。

电容元件的特性

$$w_{\mathrm{C}}(t)=\frac{1}{2}Cu^{2}(t)$$



$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

在直流电路中电容相当于开路。

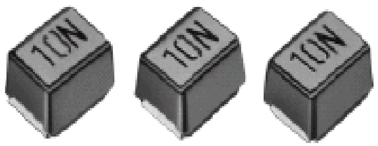
i有限，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$必有限，

u是时间的连续函数

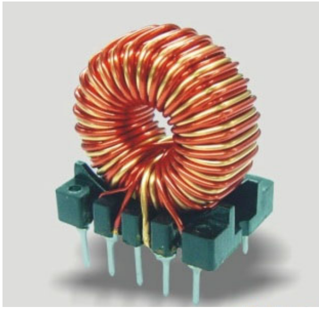
$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

电容电压$u_c(t)$不能发生跳变

实际电感



多层片状电感



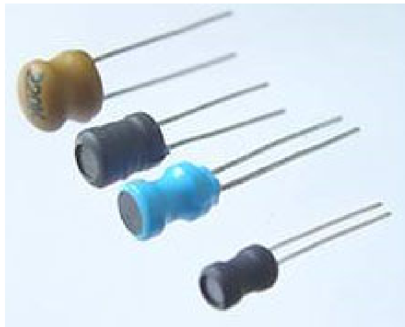
磁环电感

贴片电感

色码电感

可调电感

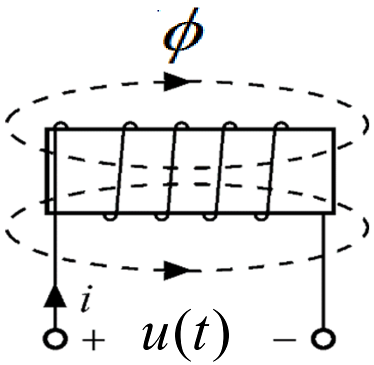
空心扁铜线扁平线圈



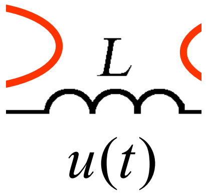
插件电感

电感元件

电感器

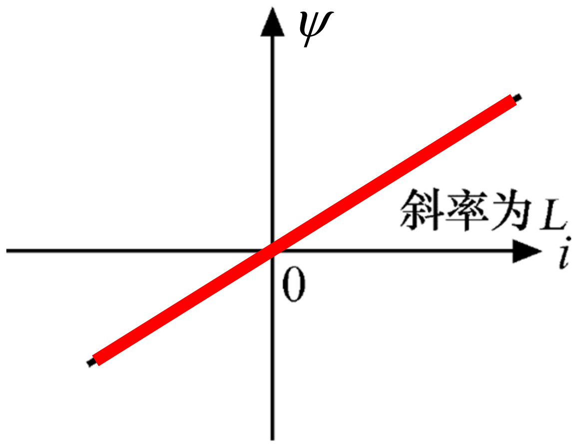


电路模型



一、元件特性

两个基本变量：电流 i ，磁链 ψ



韦安（ ψ - i ）特性曲线

$$\psi = N\phi$$

线性非时变

$$\psi(t) = Li(t)$$

单位：**亨 [亨利]**,

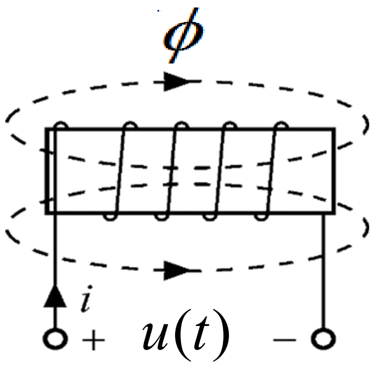
符号：**H**

常用**mH**：**10^{-3}H**；

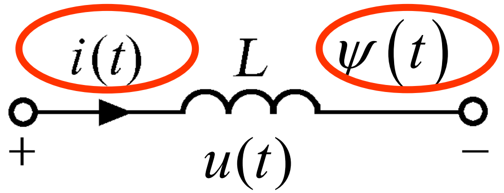
μH：**10^{-6}H**等表示。

电感元件

电感器



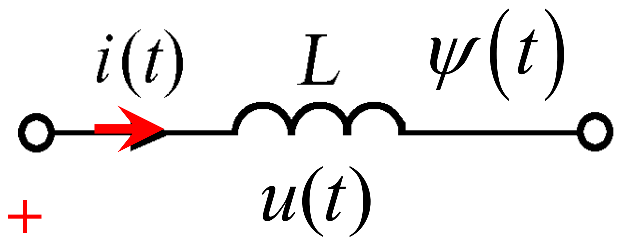
电路模型



一、元件特性

亨利是一位美国物理学家，他发明了电感、制造了电动机，比法拉第更早发现电磁感应现象，对电磁学贡献颇大。电感的单位即是以他的名字命名的。

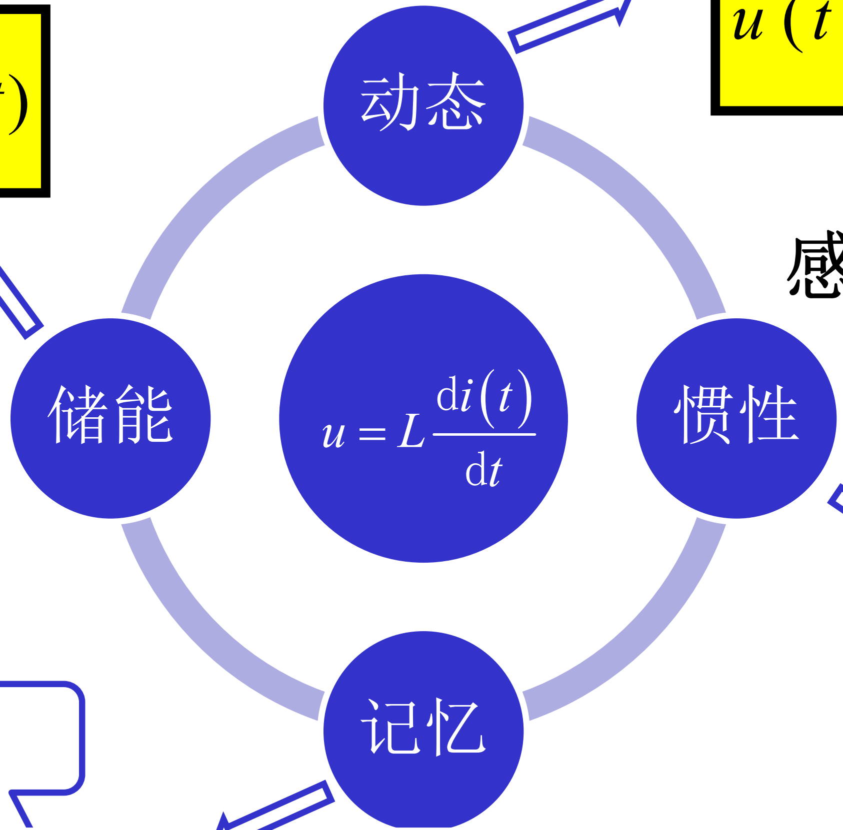
二、线性电感的VCR关系及特性



$$u(t) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$$

电感元件的特性

$$w_L(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)$$



$$u(t)=L\frac{di}{dt}$$

在直流电路中电感相当于短路。

$$u\text{有限},\ \frac{di}{dt}\text{必有限},$$

i是时间的连续函数

电感电流$i_L(t)$不能发生跳变

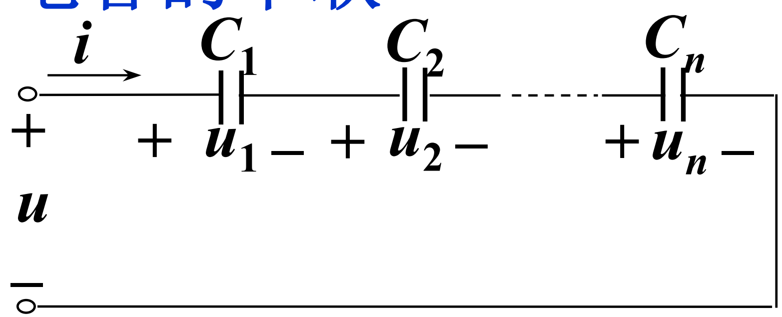
初始电流

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)d\xi$$

电容与电感的串并联

一、电容的串并联

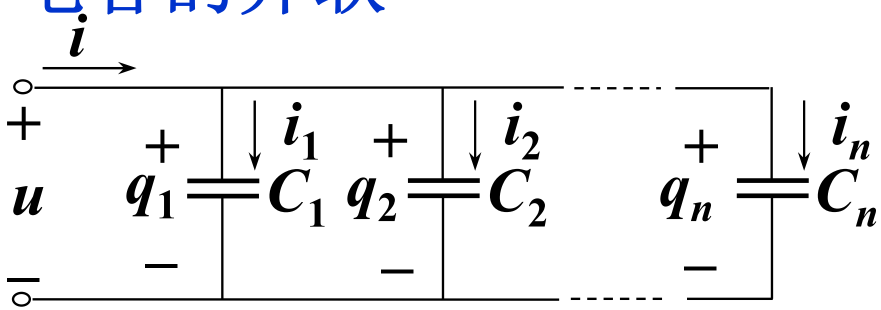
1. 电容的串联



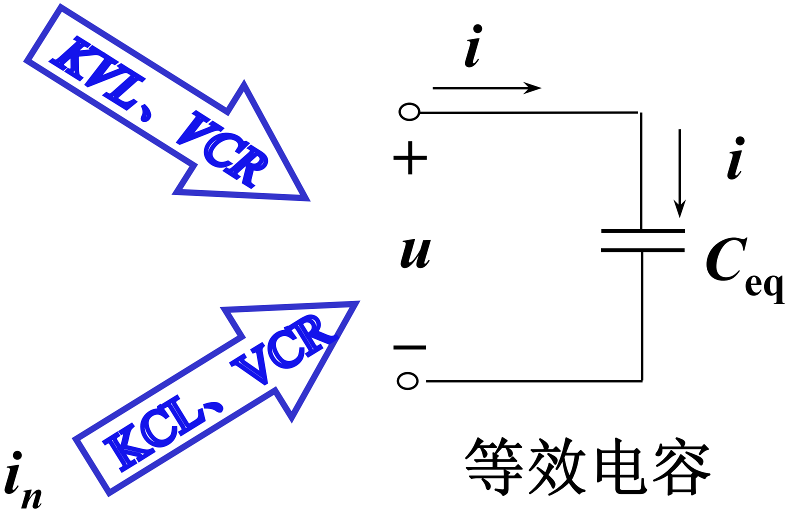
n个电容串联

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots+\frac{1}{C_n}$$

2. 电容的并联



n个电容并联

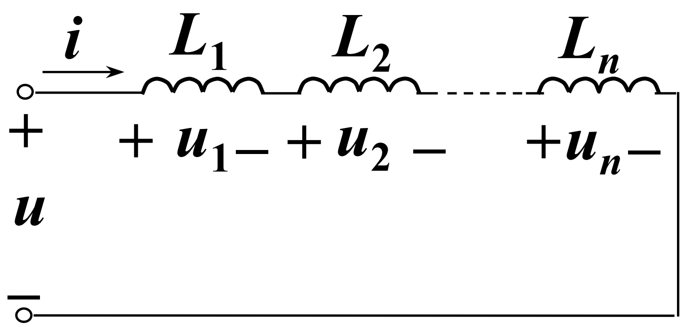


等效电容

$$C_{\text{eq}}=C_1+C_2+\ldots+C_n$$

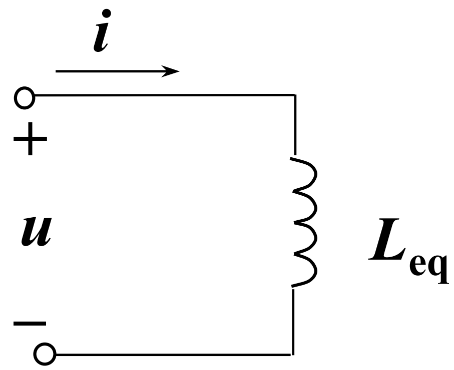
二、 电感的串并联

1. 电感的串联



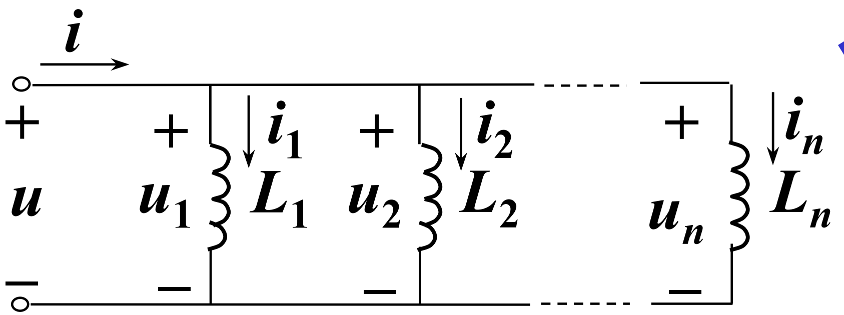
n个电感串联

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$



等效电感

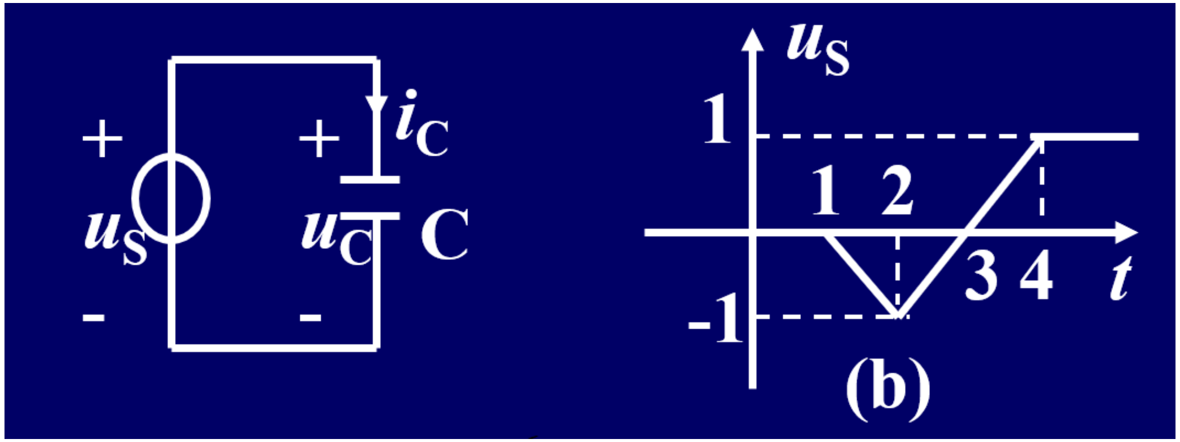
2. 电感的并联



n个电感并联

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

例1 C =4F，其上电压如图(b)，试求$i_C(t)$, $p_C(t)$和$w_C(t)$,并画出波形。



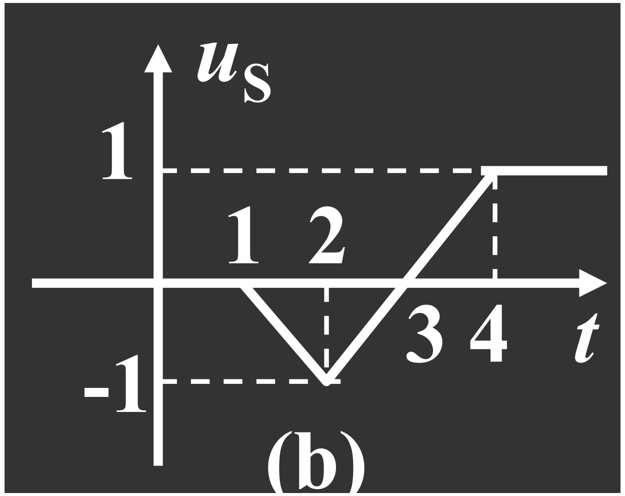
解：

$$u_C(t) = u_S(t) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ -t+1 & 1 < t \le 2 \\ t-3 & 2 < t \le 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases} (V)$$

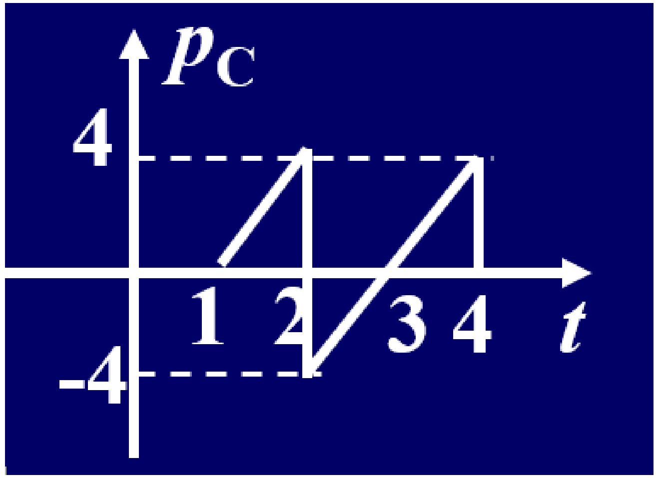
$$i_{\mathrm{C}}(t)=C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}\mathbf{0} & \boldsymbol{t<1}\\ \mathbf{-4} & \boldsymbol{1<t<2}\\ \mathbf{4} & \boldsymbol{2<t<4}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{t>4}\end{cases}(\boldsymbol{A})$$

$$p_{\mathrm{C}}(t)=u_C(t)i_C(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 4(t-1) & 1<t<2\\ 4(t-3) & 2<t<4\\ 0 & t>4\end{cases}(W)$$

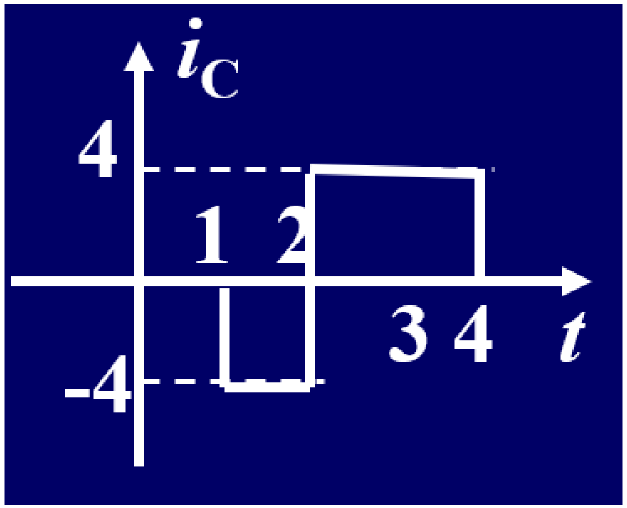
$$w_{\mathrm{C}}(t)=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)=\begin{cases}0 & t\le 1\\ 2(1-t)^2 & 1<t\le 2\\ 2(t-3)^2 & 2<t\le 4\\ 2 & t>4\end{cases}(J)$$



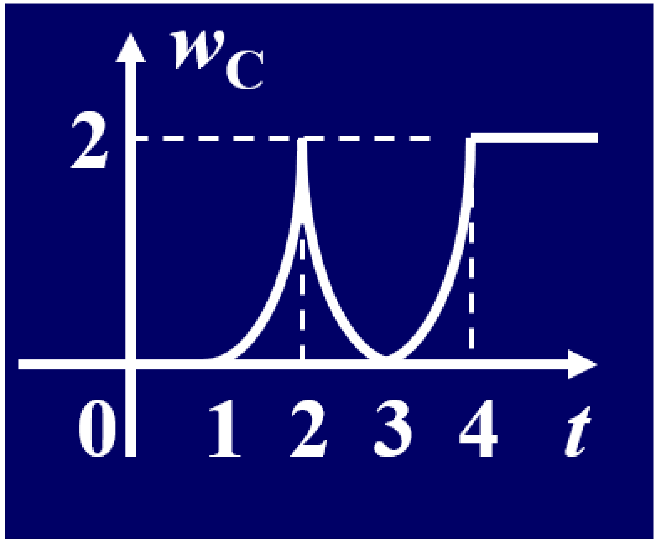
u_S
1
1 2
3 4 t
-1
(b)



p_C
4
1 2 3 4 t
-4

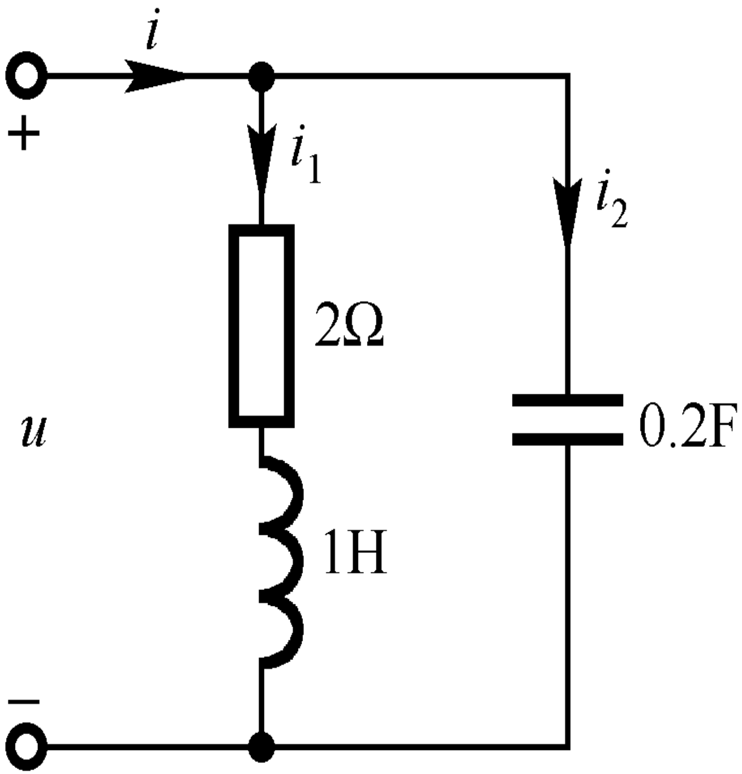


i_C
4
1 2
3 4 t
-4



w_C
2
0 1 2 3 4 t

【例】如图所示电路，已知 $i_1 = (2 - e^{-t})\ (A), t > 0$
求 $t > 0$ 时的电流***i*(t)**。



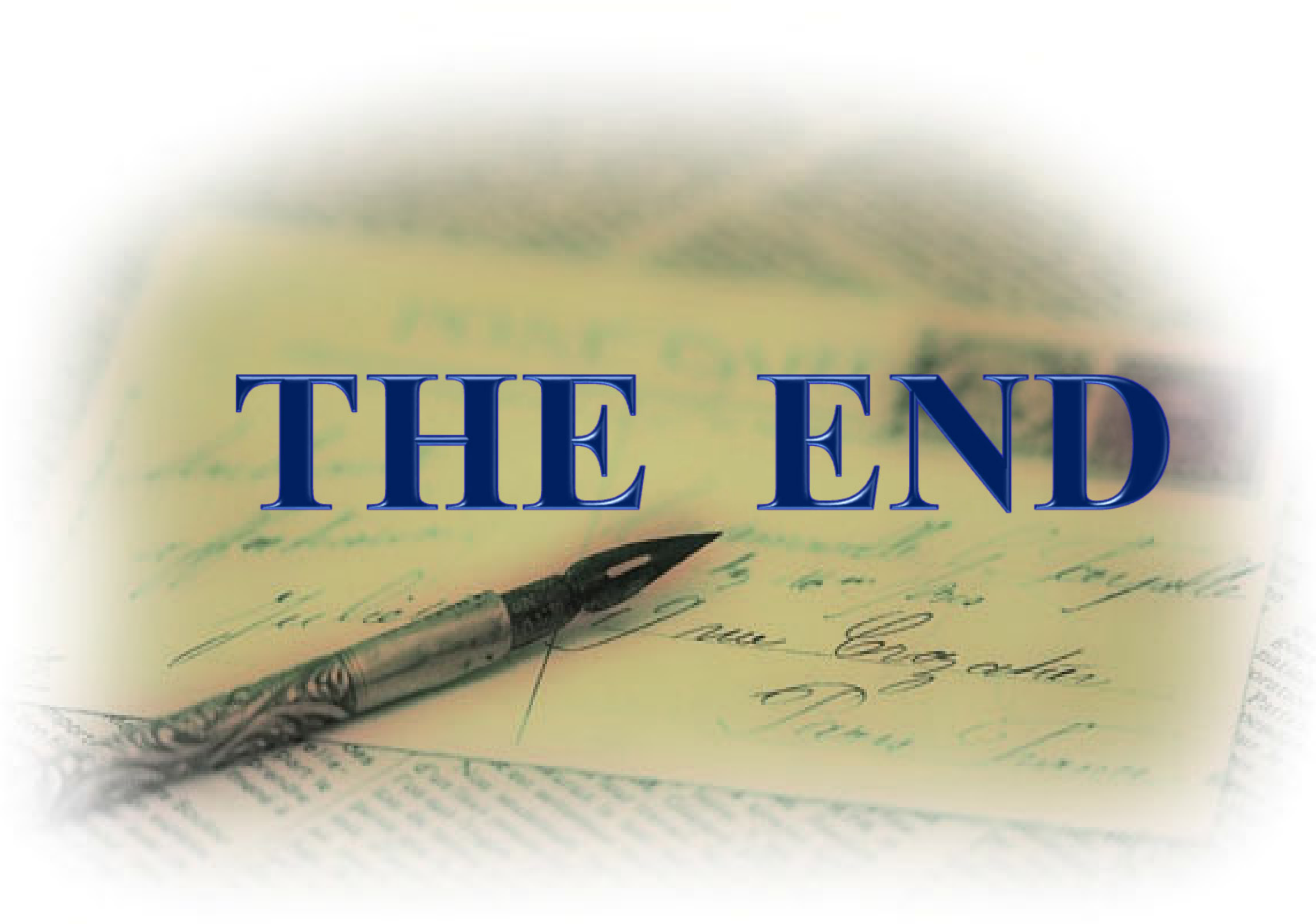
解 **电感的VCR**

$$u_L = L\frac{di_1}{dt} = e^{-t}\ (V)$$

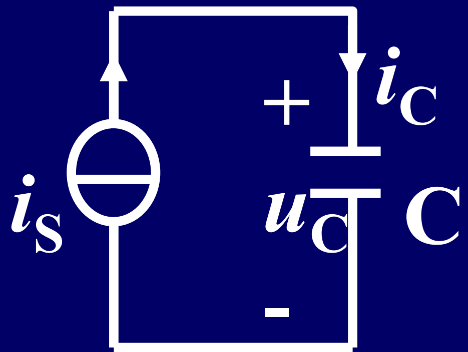
KVL $u = 2i_1 + u_L = 4 - e^{-t}\ (V)$

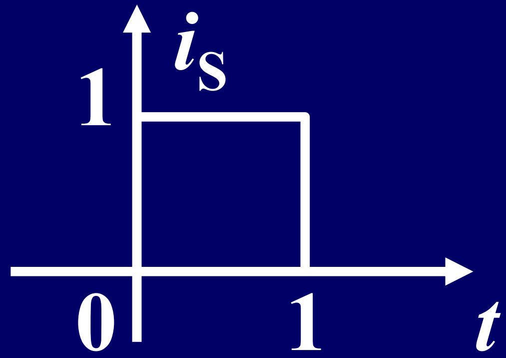
电容的VCR $i_2 = C\frac{du}{dt} = 0.2e^{-t}\ (A)$

KCL $i = i_1 + i_2 = 2 - 0.8e^{-t}\ (A)$


THE END

例2 $C=2$F，电流如图(b)，初始电压$u(0)=0.5$V, 试求$t \geq 0$时电容电压,并画出波形。





(b)

解：

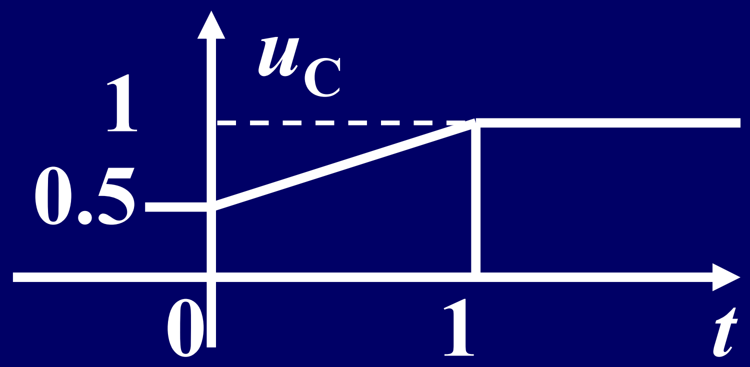
$$i_C(t)=i_s(t)=\begin{cases}1 & 0<t<1\\ 0 & t>1\end{cases}(A)$$

$$0 \le t < 1 \qquad u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\lambda)d\lambda$$

$$= 0.5 + 0.5t(V)$$

$$t \ge 1 \qquad u_C(t) = u_C(1) + \frac{1}{C}\int_1^t i_C(\lambda)d\lambda$$

$$= 1(V)$$

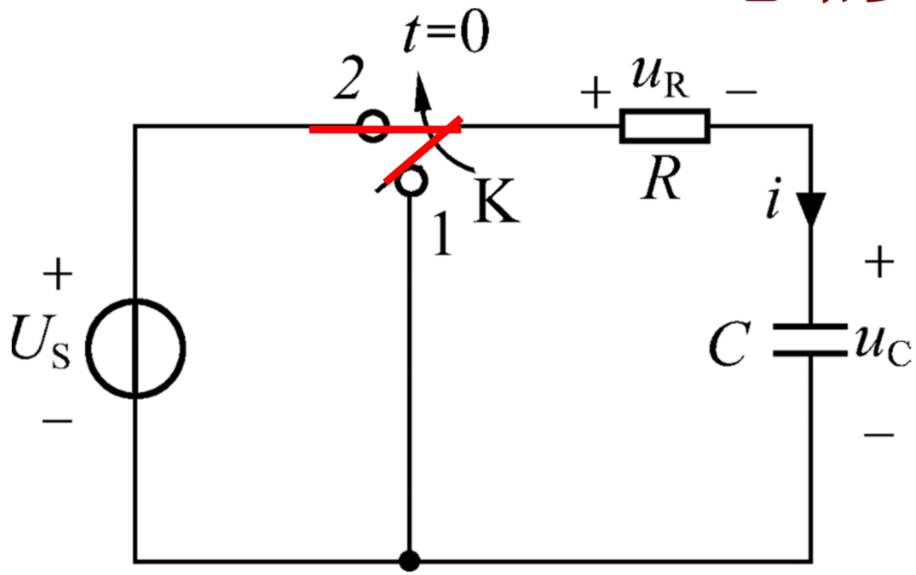


动态方程及初值计算

动态电路——含动态元件的电路

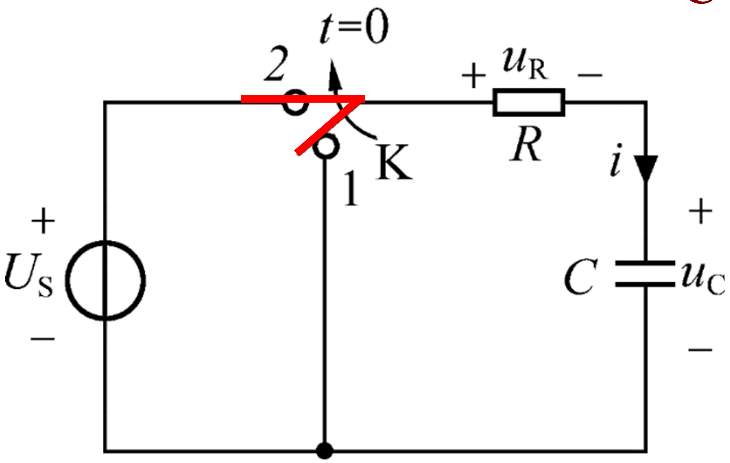
一、换路

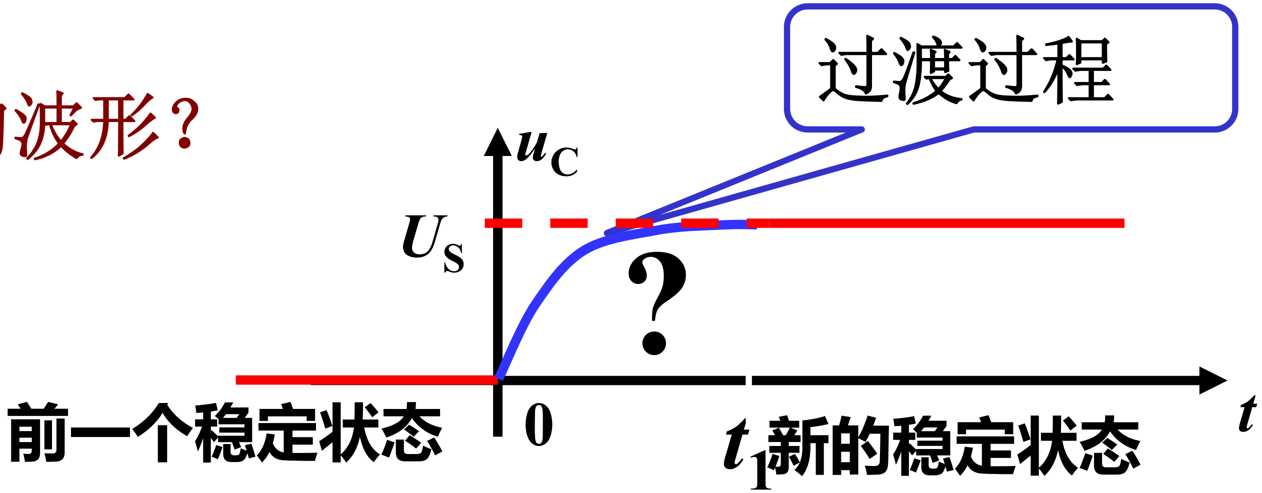
电路的结构、状态发生变化 $\begin{cases} \text{支路接入或断开} \\ \text{电路参数变化} \end{cases}$



二、过渡过程（瞬态过程）

求开关由1 → 2，u_C的波形？



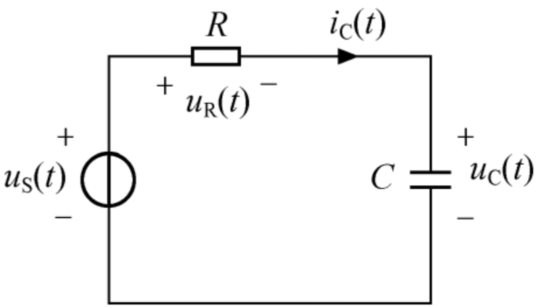


过渡过程产生的原因

1. 电路结构发生变化：换路　　　　外因

2. 电路内部含有储能元件 L 、 C 内因

列写电路方程。



KVL：$u_S = u_R + u_C$

VCR：$u_R = Ri_C$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_S$$

一阶常系数微分方程

分析步骤（时域分析）：

1 依据电路两类约束，以所求响应为变量，列换路后的微分方程

2 确定所须初始条件（初始值） ⟸ 换路定则

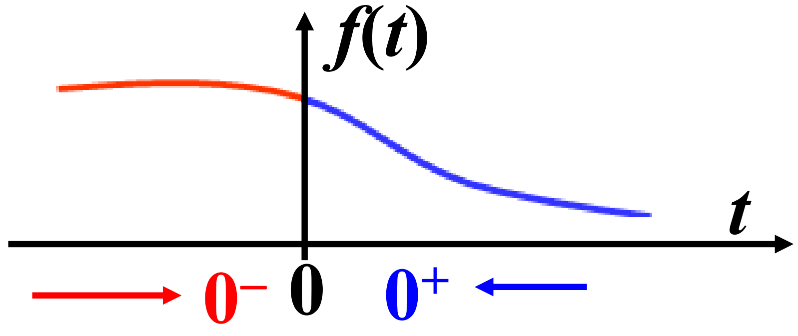
3 解微分方程

1. $t=0^+$与$t=0^-$的概念

换路在 t=0时刻进行

0^-　$t=0$ 的前一瞬间 (开关未动作)

0^+　$t=0$ 的后一瞬间（开关已动作)



$$f(0^-)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t)$$

初始状态

$u_C(0^-)$、$i_L(0^-)$

$$f(0^+)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$

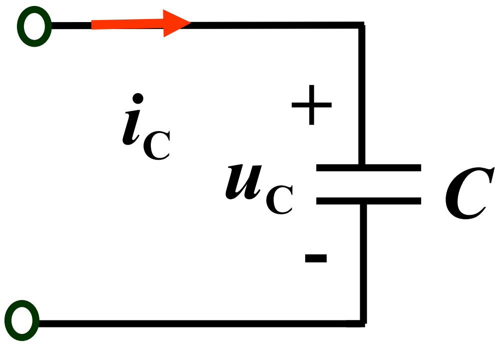
初始值

初始值即 $t=0^+$时$u_C(0^+)$、$i_C(0^+)$、$u_L(0^+)$、$i_L(0^+)$ $u_R(0^+)$ $i_R(0^+)$ 等的值。

换路定则

一、推导

1.电容



结论一

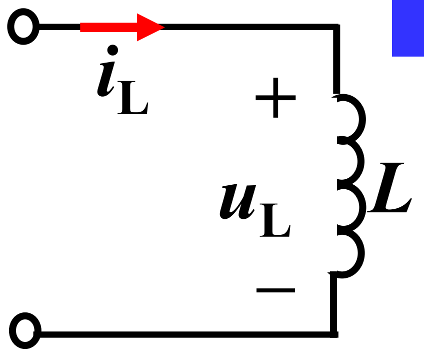
换路瞬间，若电容电流为有限值，则电容电压（电荷）在换路前后保持不变。

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

$$q(0^+) = q(0^-)$$

电荷守恒

2.电感



$t = 0^{+}$时刻

结论二

换路瞬间，若电感电压为有限值，则电感电流（磁链）在换路前后保持不变。

当$u_L(\xi)$为有限值时

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

$$\Psi_L(0^+) = \Psi_L(0^-)$$

磁链守恒

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

其他量的初始值，比如 $i_C(0^+)$、$u_L(0^+)$、$i_L(0^+)$、$u_R(0^+)$、$i_R(0^+)$?

注意

（1）电容电流和电感电压为有限值是换路定则成立的条件。

（2）换路定则反映了能量不能发生跃变。

初始值计算

1. 在0^-等效电路中（开关未动作）求初始状态$u_C(0^-)$和$i_L(0^-)$；

换路前的电路电路已经达到稳定、电容→开路、电感→短路

2. 根据换路定则得 $u_C(0^+)$ 和 $i_L(0^+)$；

注意画图

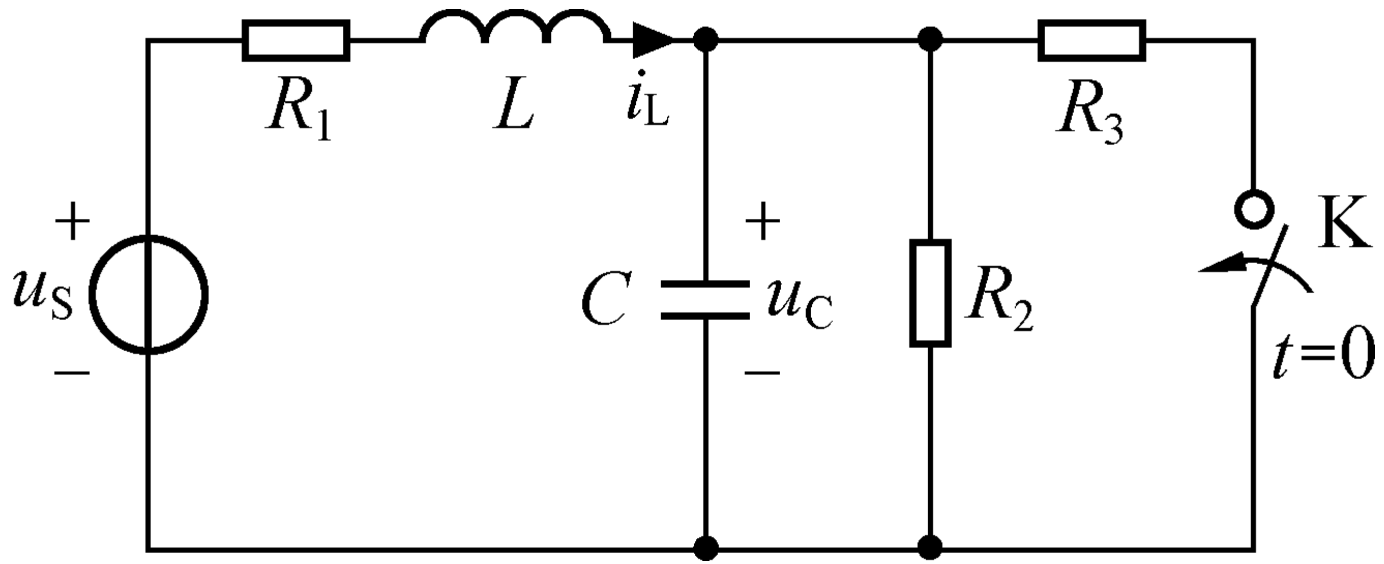
3. 画出0^+等效电路：换路后的电路。（开关已动作）

利用替代定理画$t=0^+$时的等效电路——电容用电压等于$u_C(0^+)$的电压源替代；电感用$i_L(0^+)$的电流源替代。

（方向:原来假定的电容电压、电感电流的参考方向）

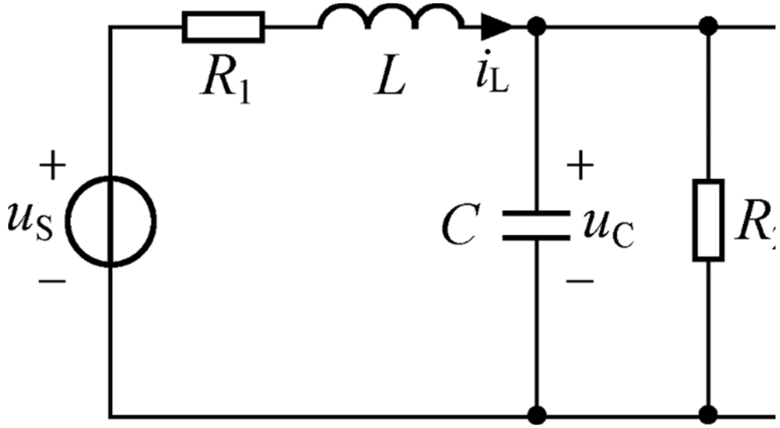
4. 在0^+等效电路中求其他待求电压电流变量的初始值。

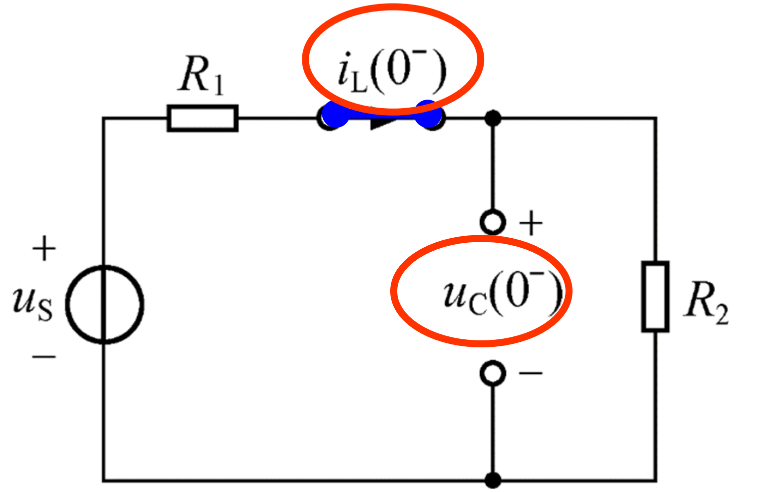
【例】开关闭合前电路已稳定,u_S = 10V, R_1=30Ω, R_2=20Ω, R_3=40Ω。求开关闭合时电感电压和电容电流的初始值。



$u_S=10V, R_1=30\Omega, R_2=20\Omega, R_3=40\Omega$。

解：(1) 由0-等效电路求 $i_L(0^-)$和 $u_C(0^-)$





0⁻等效电路

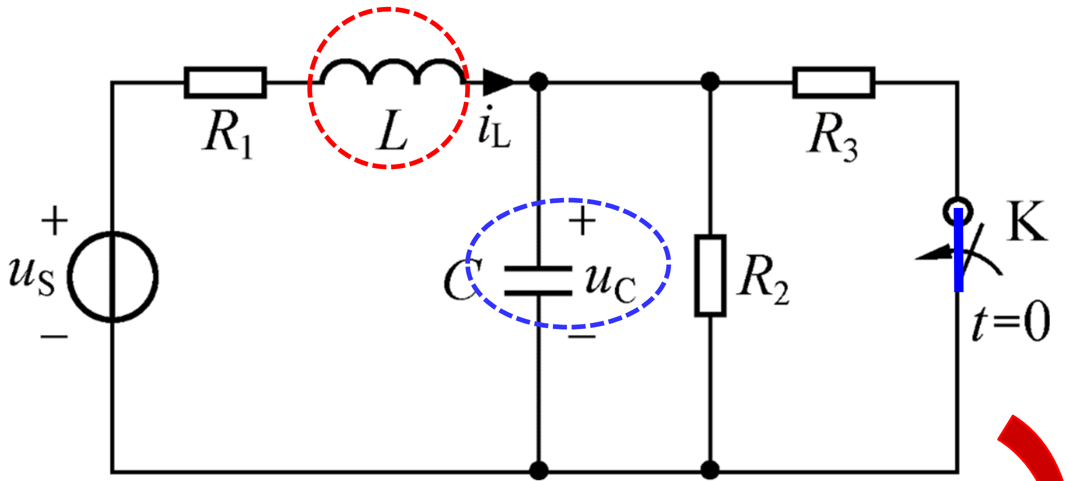
$$i_L(0^-)=\frac{u_S}{R_1+R_2}=\frac{10}{30+20}=0.2\text{ A}\qquad u_C(0^-)=i_L(0^-)R_2=0.2\times 20=4\text{ V}$$

(2) 由换路定则

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=4\text{ V}\qquad i_L(0^+)=i_L(0^-)=0.2\text{A}$$

$u_S = 10V, R_1=30\Omega, R_2=20\Omega, R_3=40\Omega$。

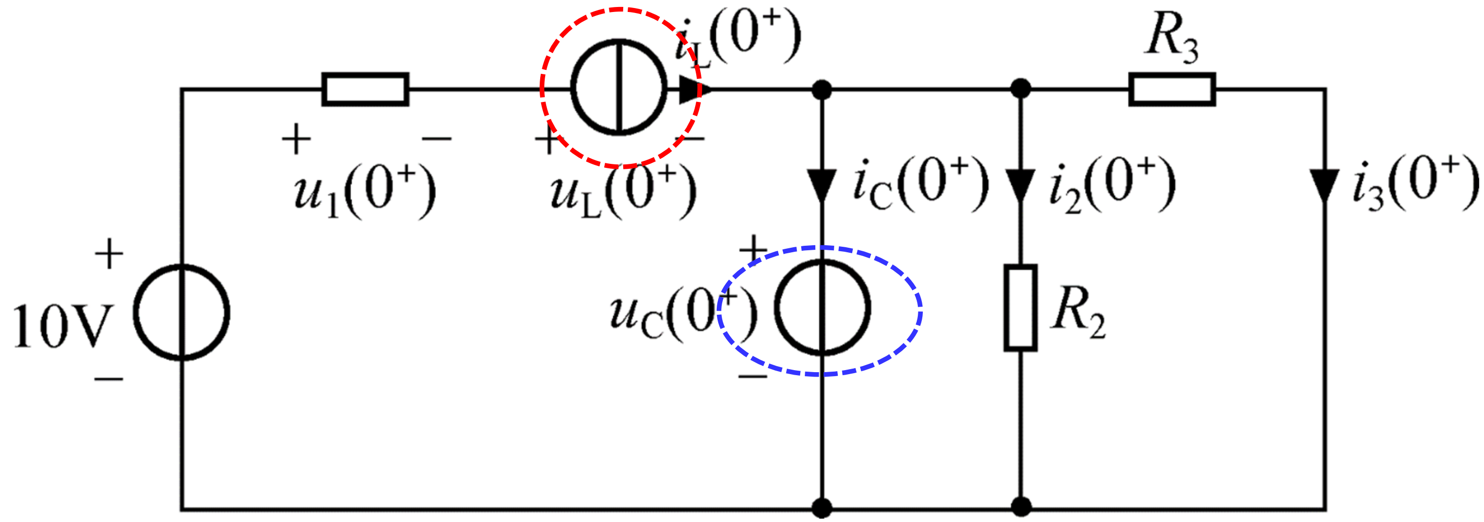
接上例



(3) 由**0⁺等效电路**求其它值

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 4\ V$$

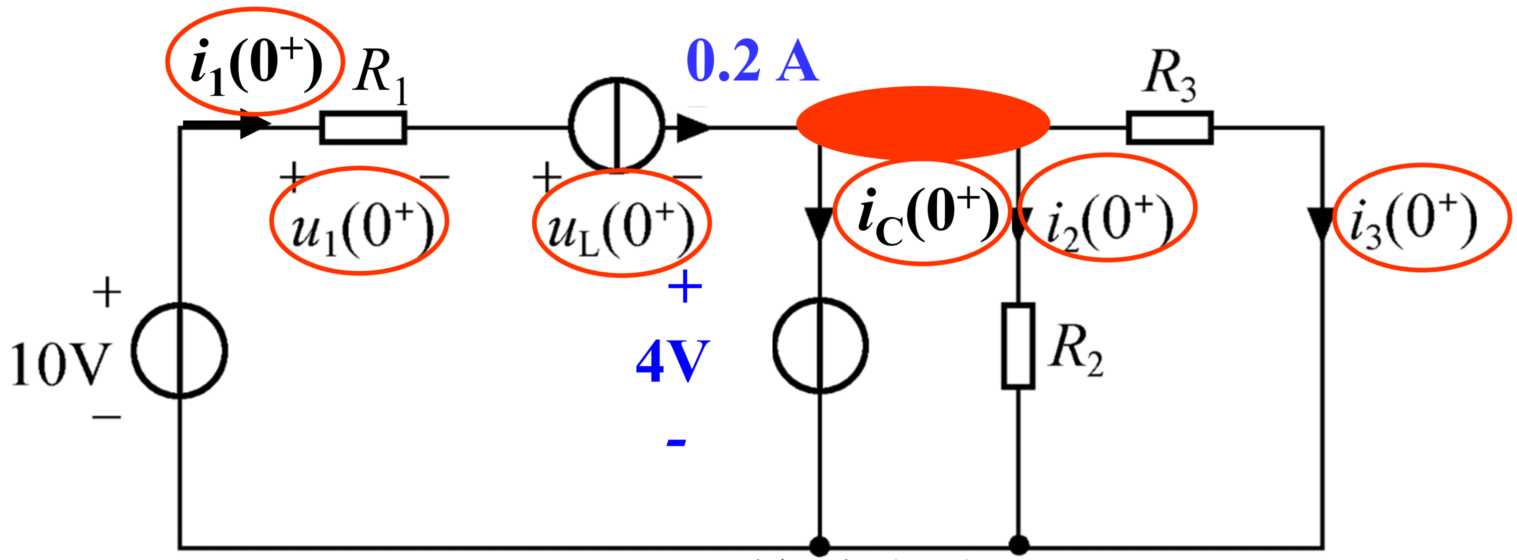
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.2A$$



0⁺等效电路

$u_S = 10\text{V}, R_1=30\Omega, R_2=20\Omega, R_3=40\Omega$。

接上例



0^+等效电路

$$i_1(0^+) = i_L(0^+) = 0.2\ \text{A}$$

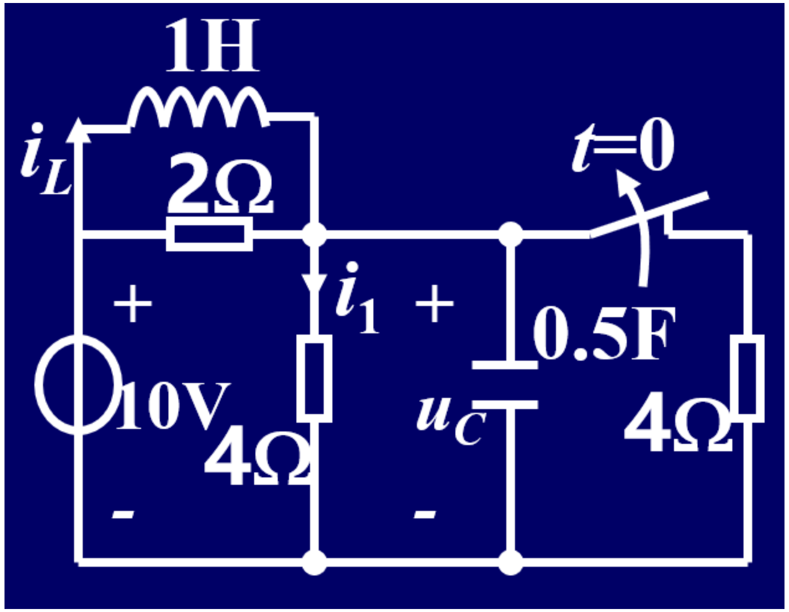
$$u_1(0^+) = i_1(0^+)R_1 = 6\ \text{V}$$

$$u_L(0^+) = u_S - u_1(0^+) - 4 = 0$$

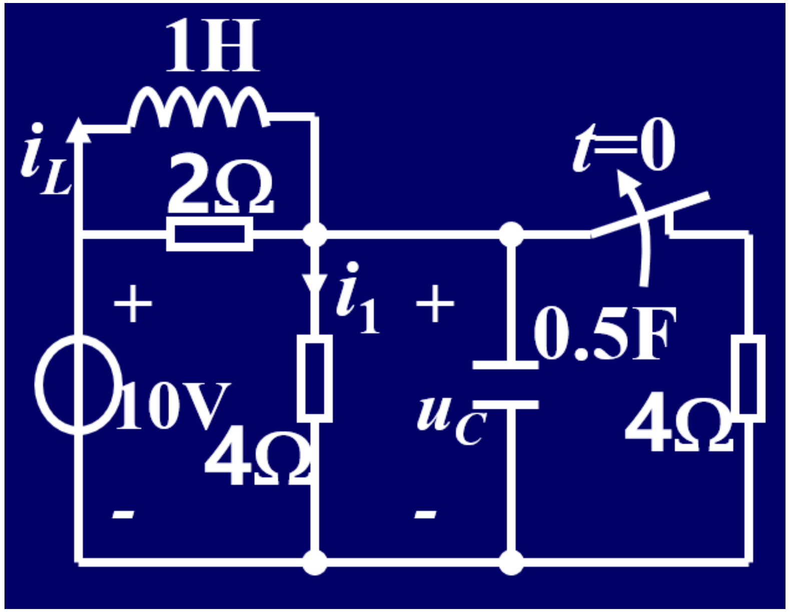
$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_2(0^+) - i_3(0^+) = i_L(0^+) - \frac{4}{R_2} - \frac{4}{R_3} = 0.1\text{A}$$

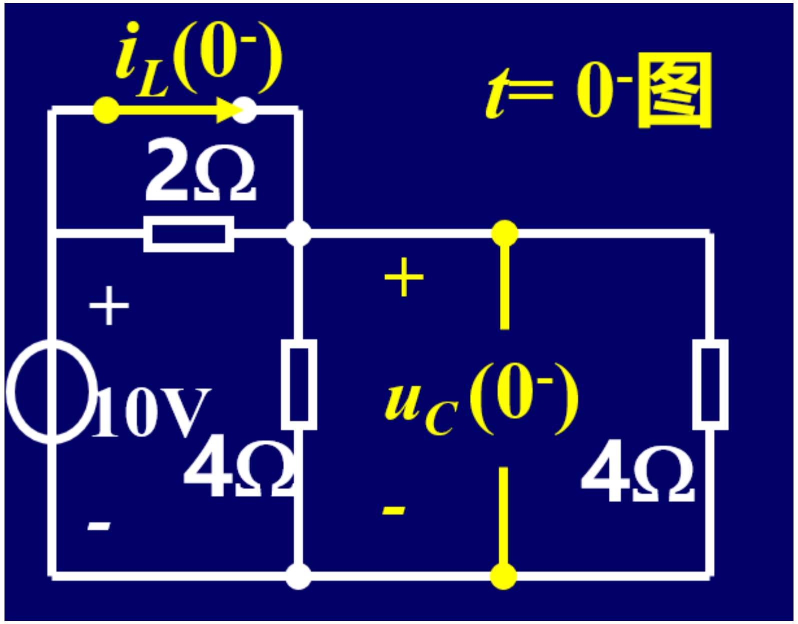
例7 开关打开前电路已稳定，求初始值

$$i_C(0^+), u_L(0^+), i_1(0^+), \frac{\mathrm{d}i_L(0^+)}{\mathrm{d}t} \text{和} \frac{\mathrm{d}u_C(0^+)}{\mathrm{d}t}$$



解：(1)求初始状态 $u_C(0^-)$ 及 $i_L(0^-)$





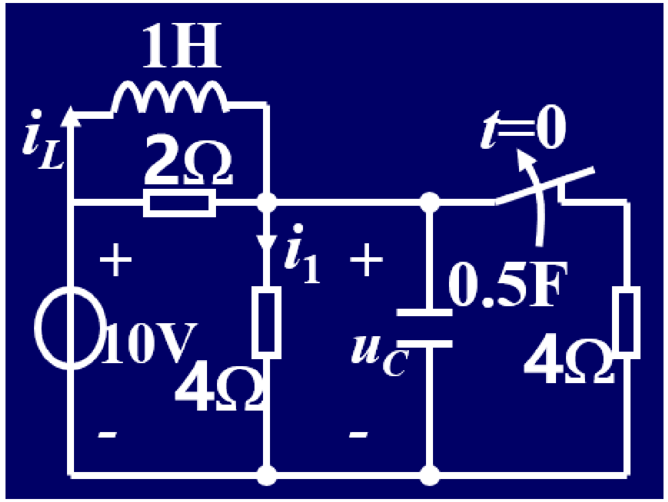
t<0时电路已稳定,电感看作短路，电容看作开路，作t=0^-等效图

$$u_C(0^-) = 10\text{V}$$

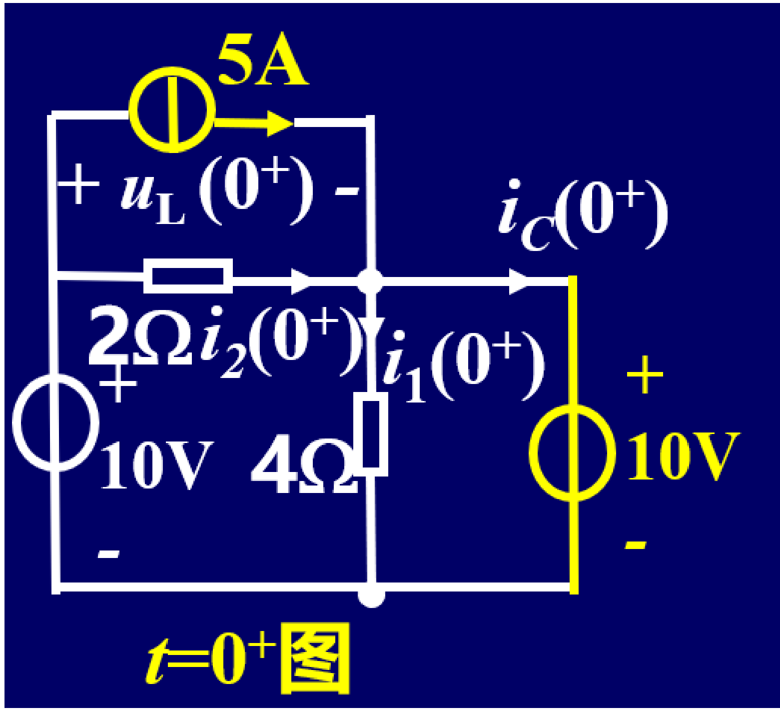
$$i_L(0^-) = \frac{u_S}{R_1 // R_2} = 5\text{A}$$

(2)由换路定则， $u_C(0^+)=u_C(0^-)=10\text{V}$

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=5\text{A}$$



(3)作t=0+等效图



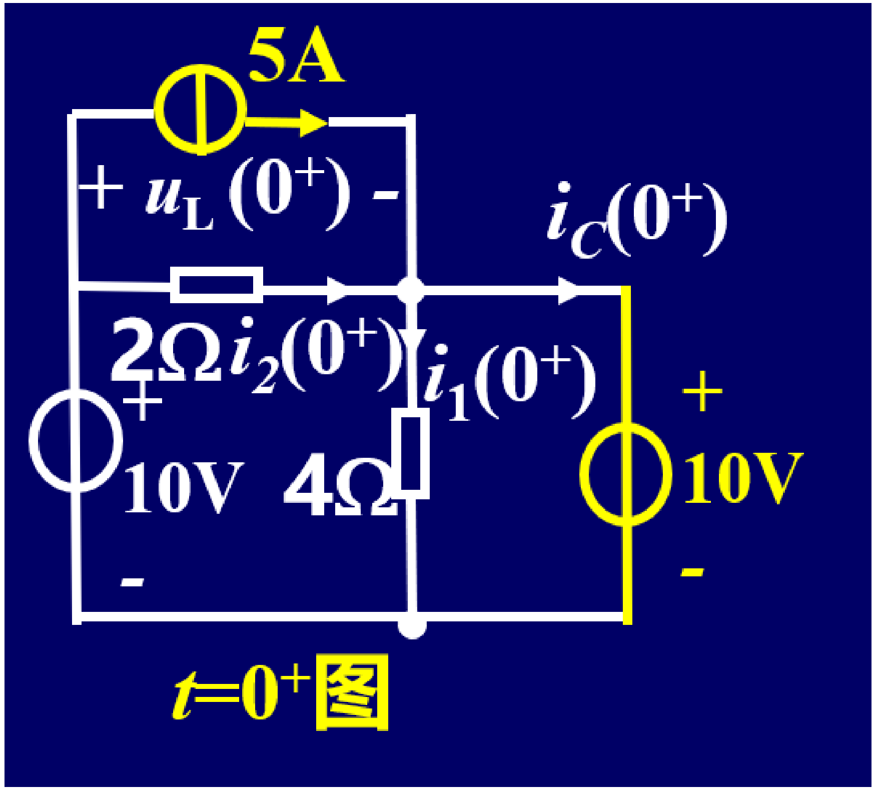
(4)求初始值

$$u_L(0^+)=10-u_C(0^+)=0$$

$$i_1(0^+)=u_C(0^+)/4=2.5\text{A}$$

$$i_2(0^+)=u_L(0^+)/2=0\text{A}$$

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) + i_2(0^+) - i_1(0^+)$$
$$= 5 - 2.5 = 2.5\text{A}$$



$$\frac{\mathrm{d}i_L(0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{u_L(0^+)}{L} = 0\,\text{A/s}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_C(0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_C(0^+)}{C} = 5\text{V/s}$$

小结

0^-等效电路求$u_C(0^-)$和$i_L(0^-)$

换路定则

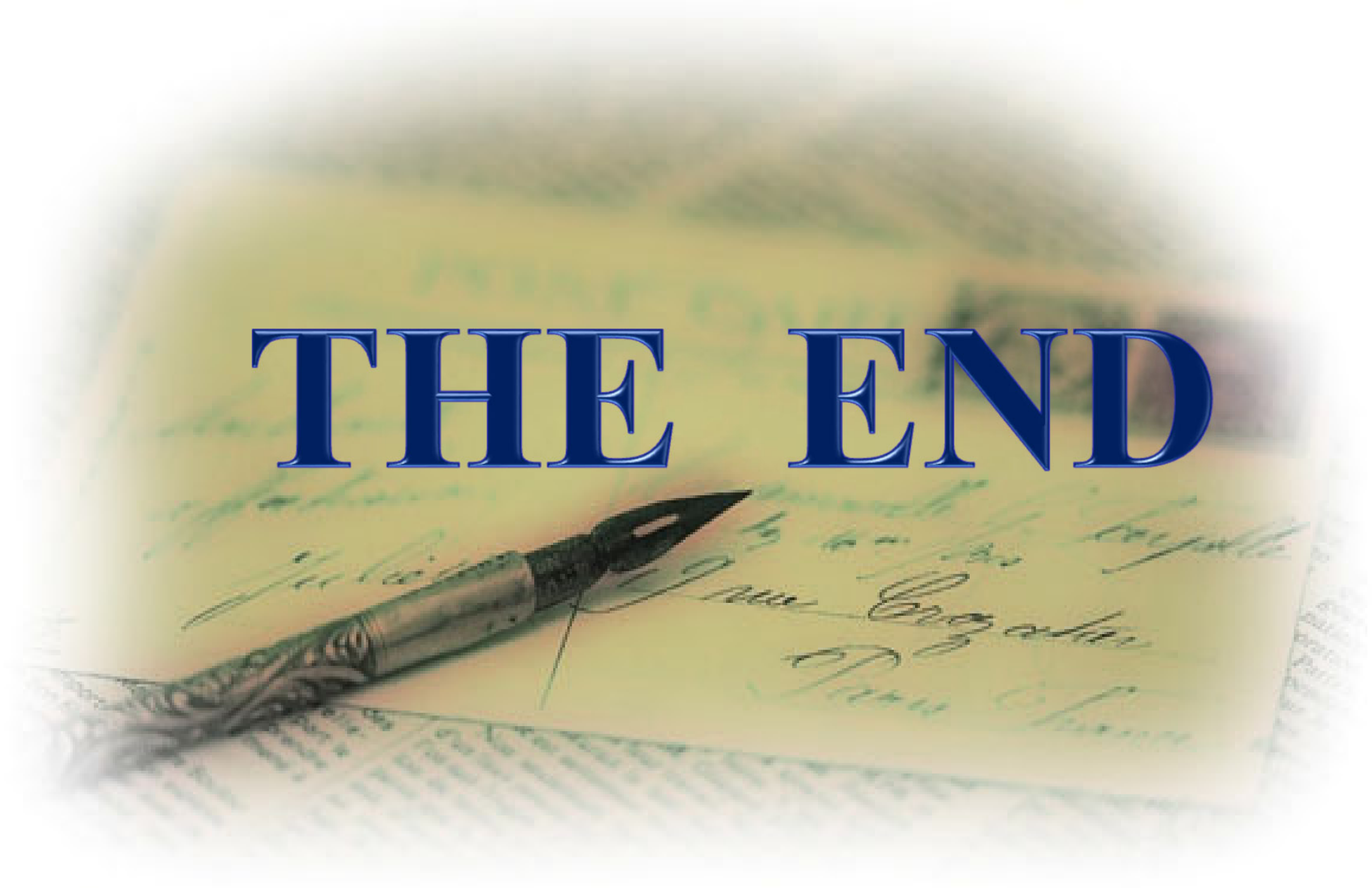
$u_C(0^+)$、$i_L(0^+)$

0^+等效电路

a. 换路后的电路

b. 电容 → 电压源；电感 → 电流源

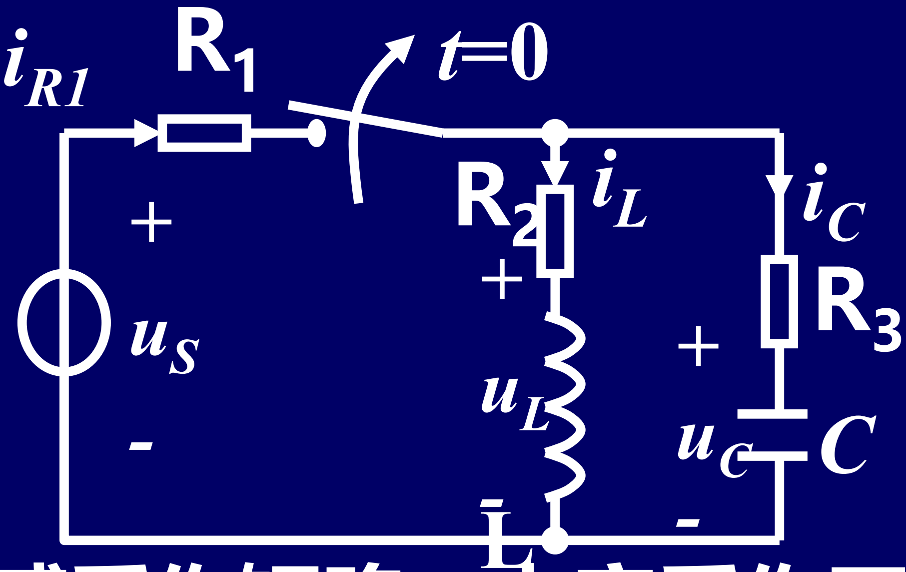
求解其他初始值



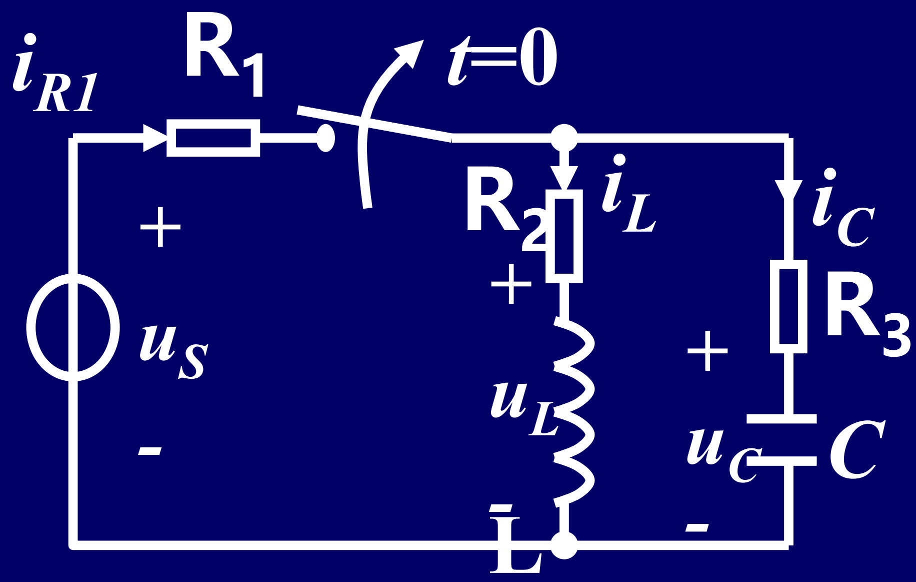
THE END

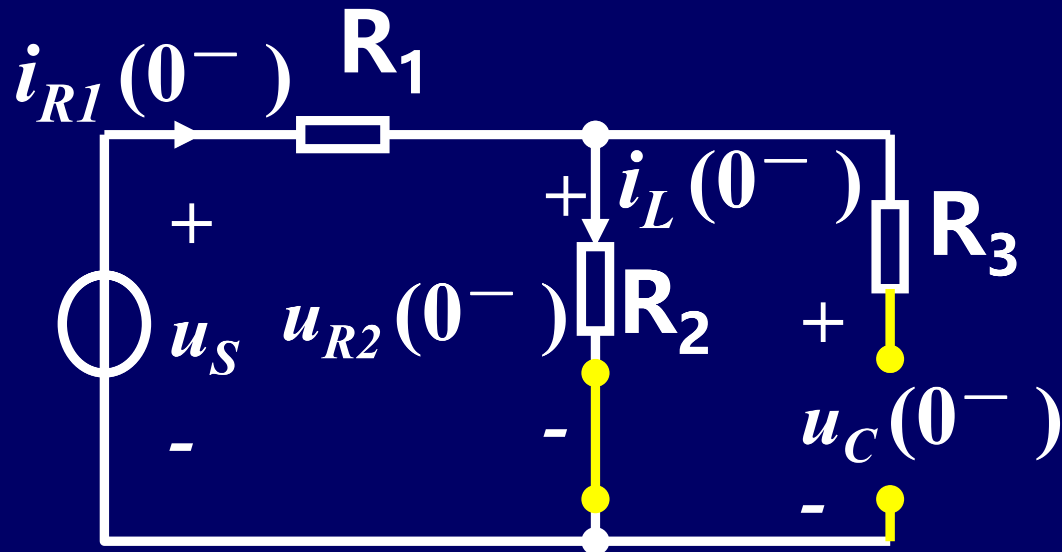
例8 原电路已稳定, u_S = 10V, R_1 = 2Ω, R_2 = 3Ω, R_3 = 1Ω， C = 0.1F, L = 0.1H。求开关打开时各电感电压、电容电流及 R_3 电压的初始值

解：(1)求初始状态 $u_C(0^-)$ 及 $i_L(0^-)$



电路已稳定,电感看作短路，电容看作开路，作t=0⁻等效图.



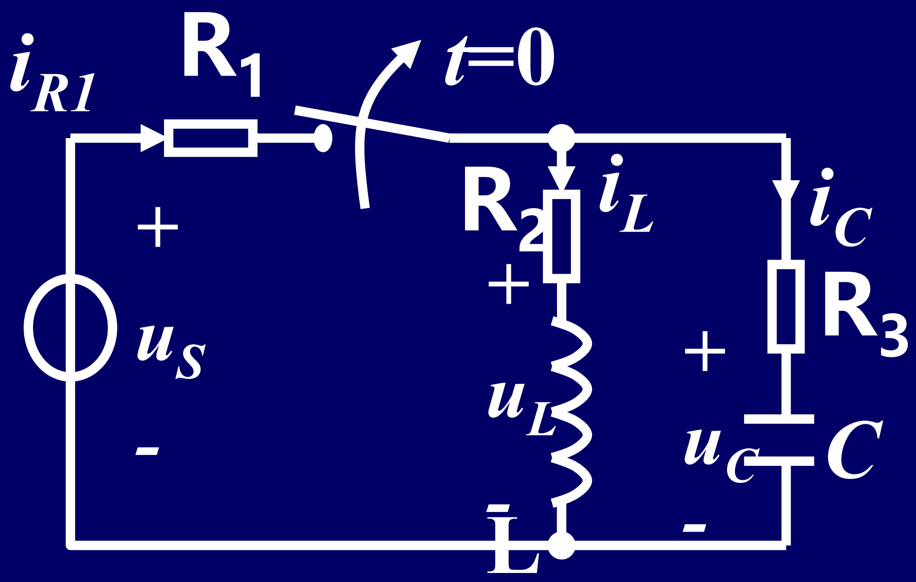


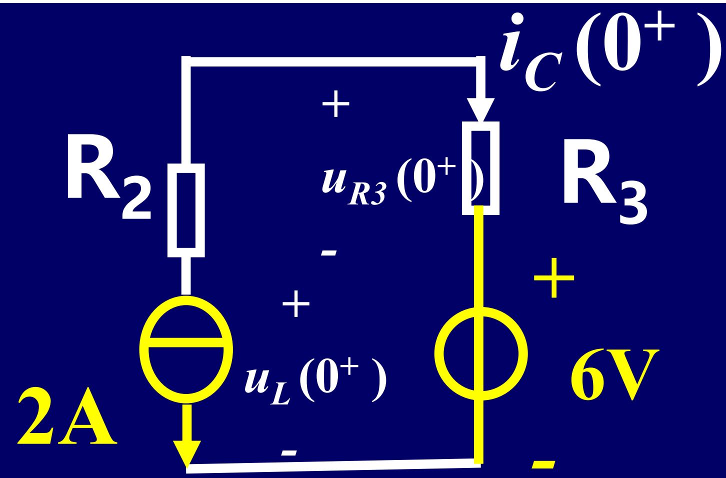
$t=0^-$图

可得:

$$i_L(0^-)=\frac{u_S}{R_1+R_2}=\frac{10}{2+3}=2A$$

$$u_C(0^-)=i_L(0^-)R_2=2\times 3=6V$$





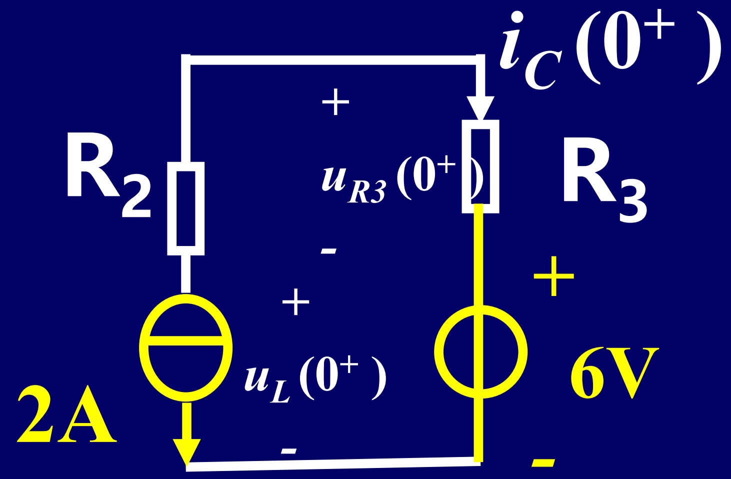
t= 0+图

(2)由换路定则，得：$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 6V$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2A$$

(3) 作t=0+等效图

思考：换路时，电容电流、电感电压、电阻R3电流及电压有无跳变?



$t = 0^+$图

(4)求初始值

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) = -2A$$

$$u_{R3}(0^+) = i_C(0^+)R_3 = -2V$$

$$u_L(0^+) = -i_L(0^+)R_2 + u_C(0^+) + u_{R3}(0^+) = -2V$$

一阶电路的零输入响应

一阶电路分析：

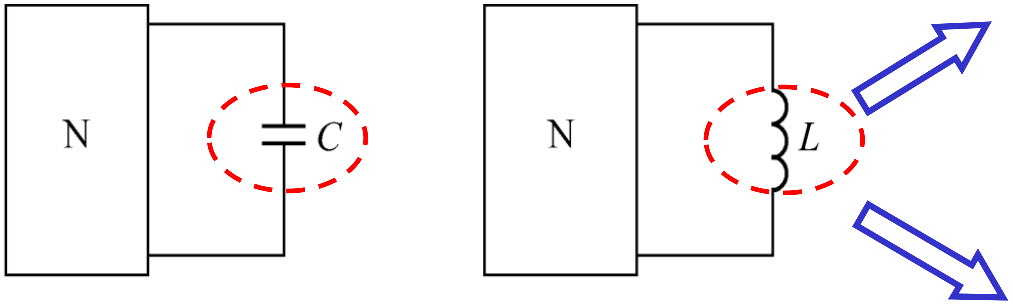
分析步骤（时域分析）：

1 依据电路两类约束，以所求响应为变量，列换路后的微分方程

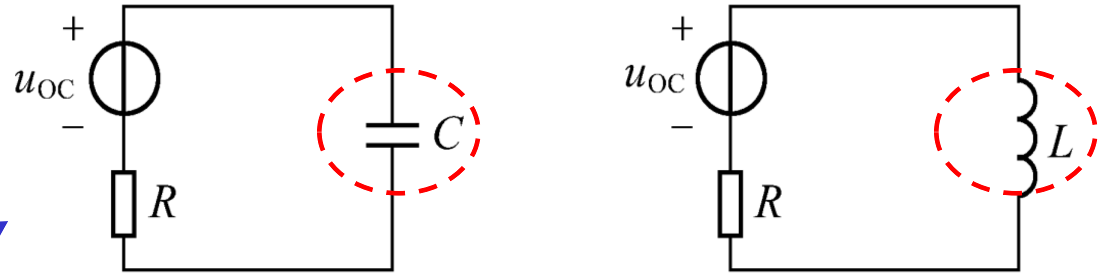
2 确定所须初始条件（初始值）　　换路定则 √

3 解微分方程 ？

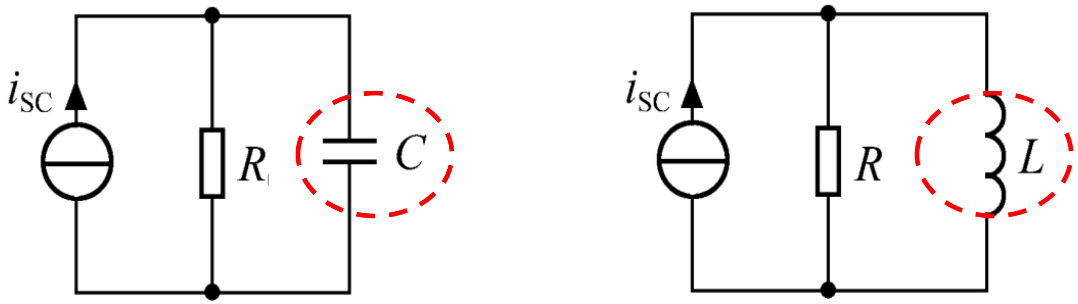
一阶电路 → 描述电路的方程是一阶线性微分方程，电路中通常只包含一个独立动态元件。



(a)



(b)



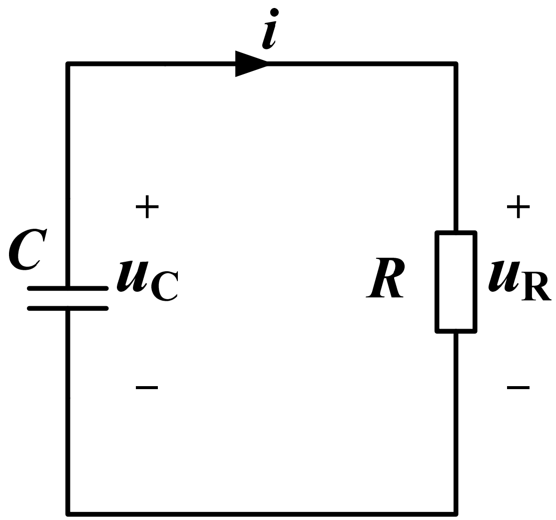
(c)

一阶电路分析：
- 零输入响应
- 零状态响应
- 全响应

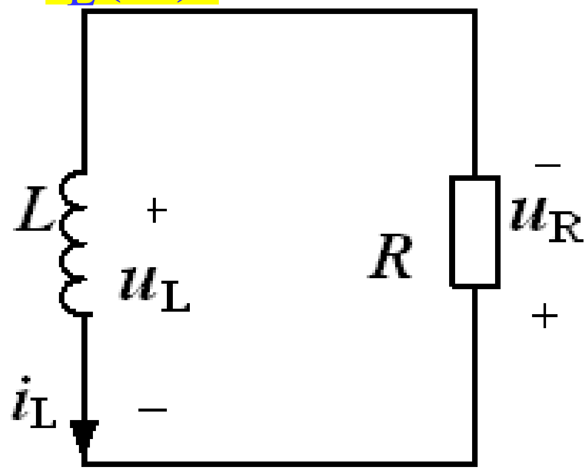
一阶电路 → 描述电路的方程是一阶线性微分方程，电路中通常只包含一个独立动态元件。

零输入响应：（开关动作后t>0），电路外加激励为零，由电容或者电感的初始状态（内激励）所引起的响应。

$u_C(0^-)\neq 0, i_L(0^-)\neq 0$

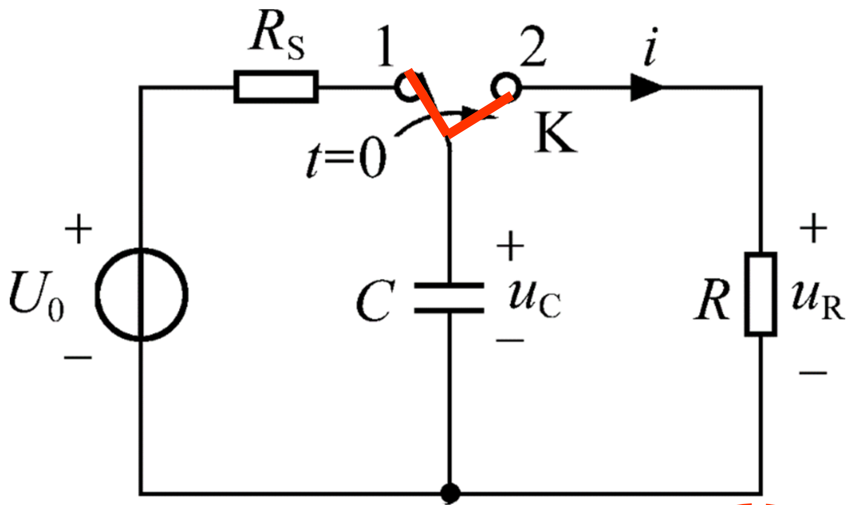


$$u_C(0^-)=U_0$$



$$i_L(0^-)=I_0$$

一、RC电路的零输入响应



若开关由1换到2，$u_C(t)=?$

KVL $\quad u_C - u_R = 0$

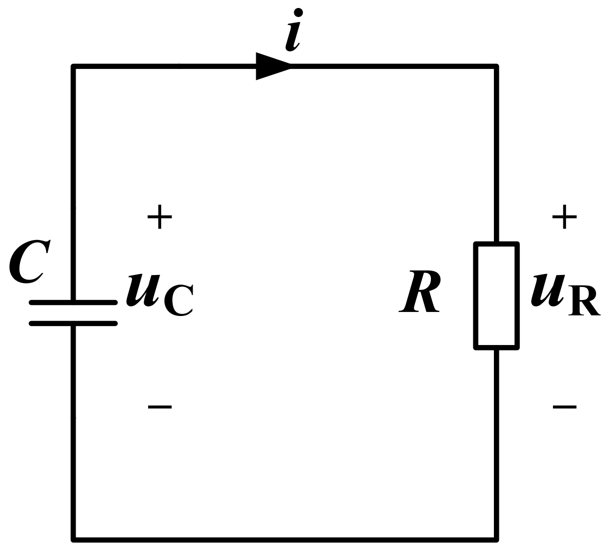
$$u_C - Ri = 0 \Leftarrow i = -C\frac{du_C}{dt}$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$$

一阶齐次线性微分方程

$$\boxed{u_C + RC\frac{du_C}{dt} = 0} \qquad (t > 0)$$

$$u_C + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$$



特征根：$S = -\dfrac{1}{RC}$

则

$$u_c(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$$

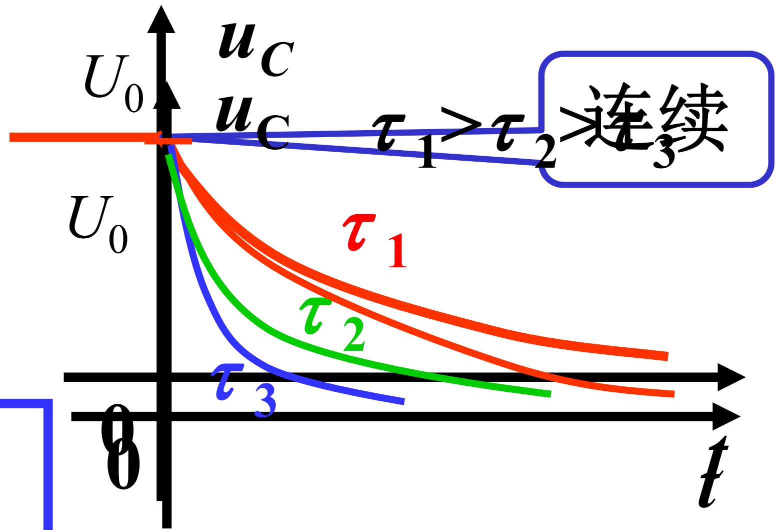
$$u_C(0^+) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\Big|_{t=0^+} = A \Rightarrow A = U_0$$

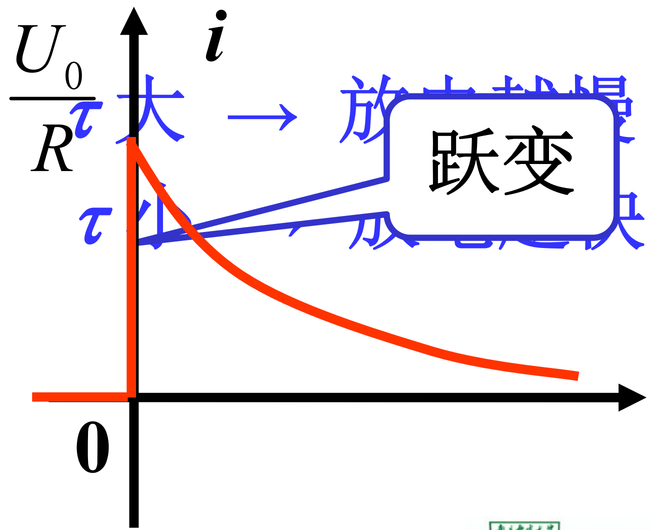
$$u_C(t) = U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

$$i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad t > 0$$

$$u_C(t)=U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t\geq 0$$

$$i(t)=\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t>0$$





结论

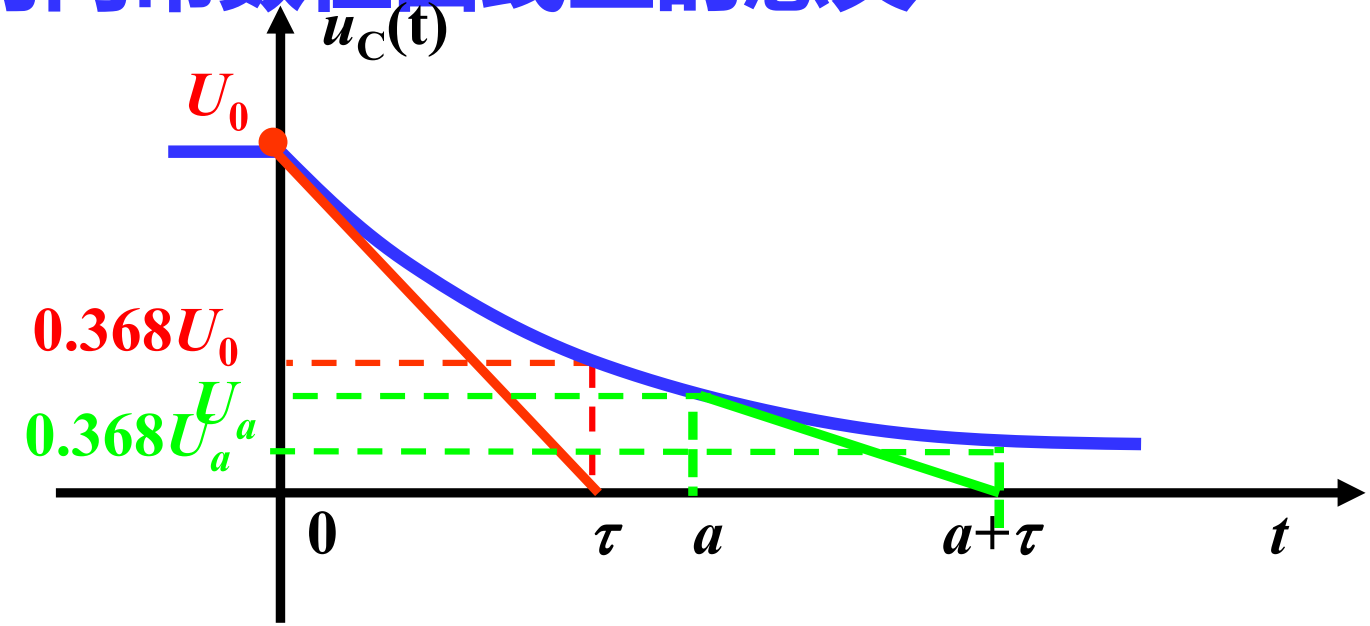
1.零时刻换路时，电容电压连续，没有跃变；电流不连续，发生跃变。

2.换路后在电容放电过程中，电容电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；

3. 令 $\tau=RC$ 时间常数

大小反映了放电过程时间的长短。

时间常数在曲线上的意义



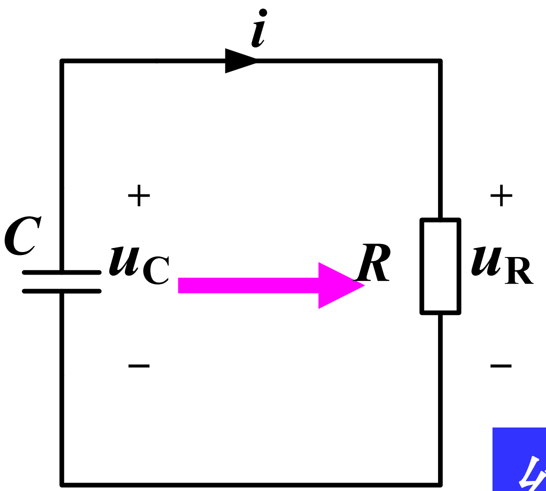
τ：t=0$^+$时切线与横轴的交点（切距）；

u_C衰减到初始值的36.8%所需的时间。

实际：4τ – 5τ

放电（过渡）过程基本结束

能量关系



$$i(t)=\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

$$w_R=\frac{1}{2}CU_0^2$$

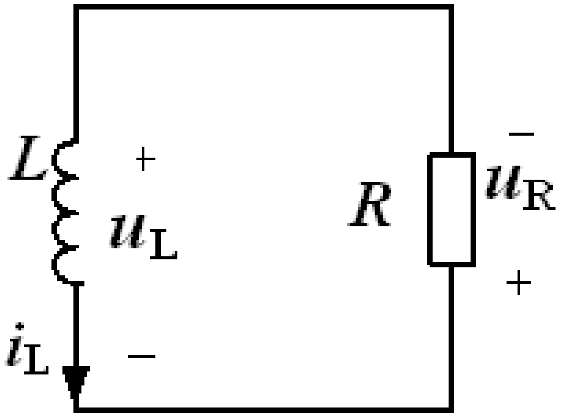
$$w_R=\int_{0^+}^{\infty} i^2 R\mathrm{d}t=\int_{0^+}^{\infty}\left(\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\mathrm{d}t=\frac{1}{2}CU_0^2$$

结论

4. 电容在放电过程中释放的能量全部转换为电阻消耗的能量。

二、RL电路的零输入响应

开关由1换到2，分析电路？



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$$

KVL $u_L + u_R = 0$

VCR $u_L = L\dfrac{di_L}{dt}$

$$\boxed{\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = 0}$$

解微分方程

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t \geq 0)$$

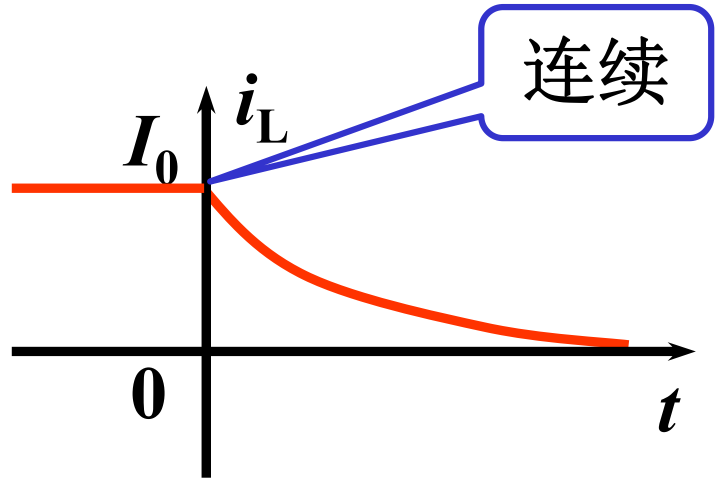
$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$

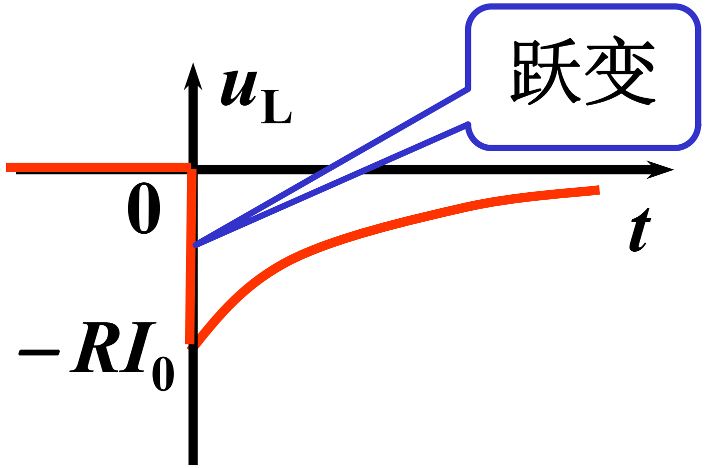
结论

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$

1. 换路时，电感电流连续，无跃变；电压不连续，发生跃变；
2. 换路后，i_L，u_L 绝对值以同一指数规律衰减到零；
3. 响应衰减的快慢取决于L/R；
   令$\tau = L/R$ **时间常数**
4. 能量关系 :电感在放电过程中释放的能量全部转换为电阻消耗的能量。





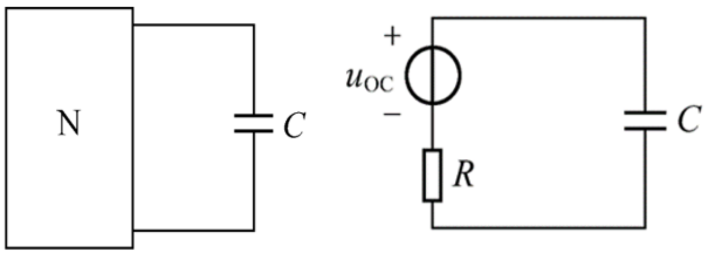
三、一阶电路零输入响应的一般公式

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t > 0$$



入响应的一般公式

时间常数

$$r_{zi}(t)=r_{zi}(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\quad t>0$$

任意零输入响应

初始值

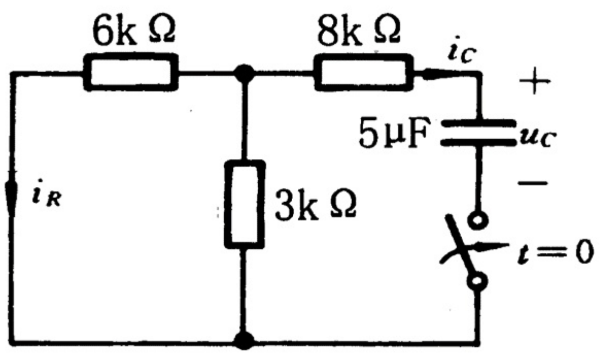
RC电路： $\tau=RC$

RL电路： $\tau=L/R$

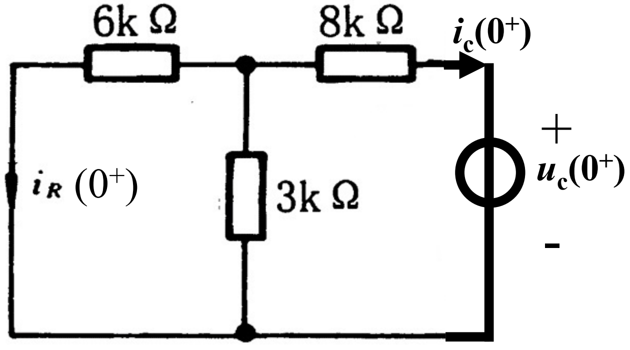
求解**R**：在原电路中把动态元件移去，从移去的动态元件的端口看进去，求解等效电阻

***R*是与动态元件相连接的二端网络的等效电阻（注意：内部独立源置零，受控源保留）**

例10 已知$u_C(0^-)=6V$。求$t>0$的电容电压、电容电流



(a)



(a)

$$r_{zi}(t) = r_{zi}(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$ **只要求得$i_c(0^+)$和$u_c(0^+)$及τ**

解：（1）求初始值$i_c(0^+)$和$u_c(0^+)$

（a）由换路定则，得：$u_C(0^+)=u_C(0^-)=6V$

(b)画0^+图，求初始值$i_c(0^+)$

$$i_C(0^+)=-\frac{u_C(0^+)}{(6//3+8)\times10^3}==-0.6\text{mA}$$

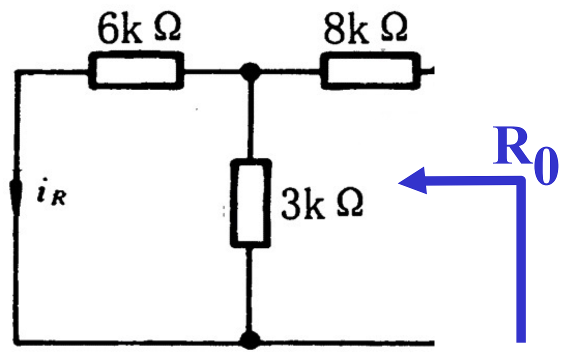
(2) **求时间常数（开关动作之后）：**

连接于电容两端的电阻等效为

$$R_o = (8+6//3)\mathrm{k}\Omega = 10\mathrm{k}\Omega$$

$$\tau = R_0C = 10\times10^3\times5\times10^{-6}$$

$$= 5\times10^{-2} = 0.05\mathrm{s}$$



(a)

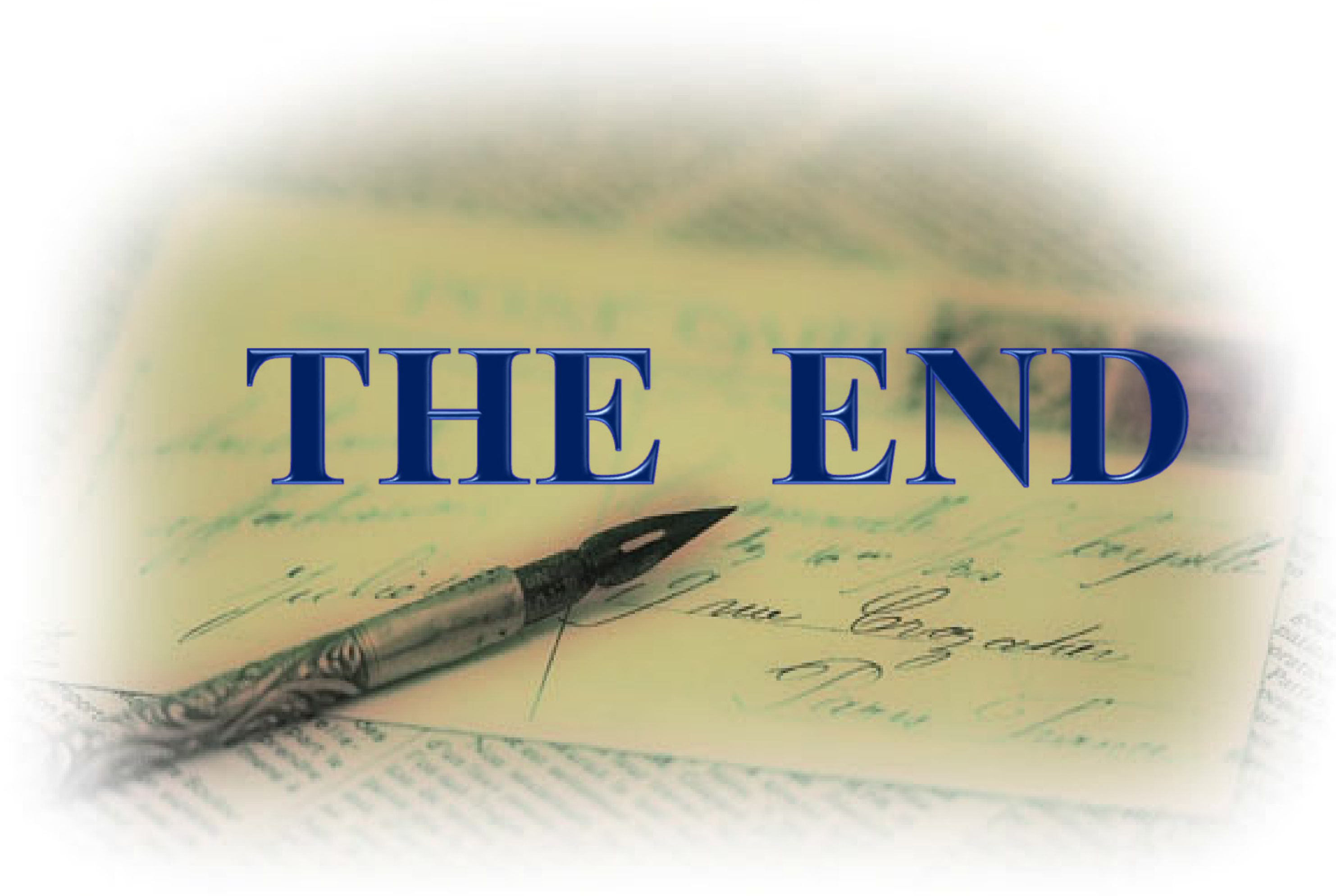
(3) **初始值和时间常数代入公式**

$$u_C(t) = u_c(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 6e^{-20t}\mathrm{V} \qquad (t \geq 0)$$

$$i_C(t) = i_c(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -0.6e^{-20t}\mathrm{mA} \qquad (t > 0)$$

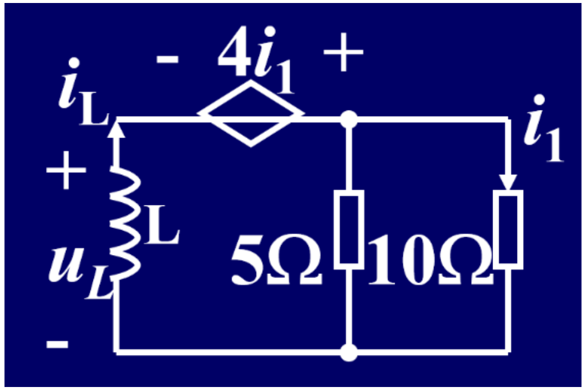
也可以用电容的的VCR关系求

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = 5\times10^{-6}\times6(-20)e^{-20t} = -0.6e^{-20t}\mathrm{mA} \quad (t>0)$$



THE END

例12 已知$i_L(0^-)=1.5A, L=0.5H$，求$i_1(t)$和$u_L(t)$。



$$r_{zi}(t) = r_{zi}(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

只要求得$i_1(0^+)$和$u_L(0^+)$及τ

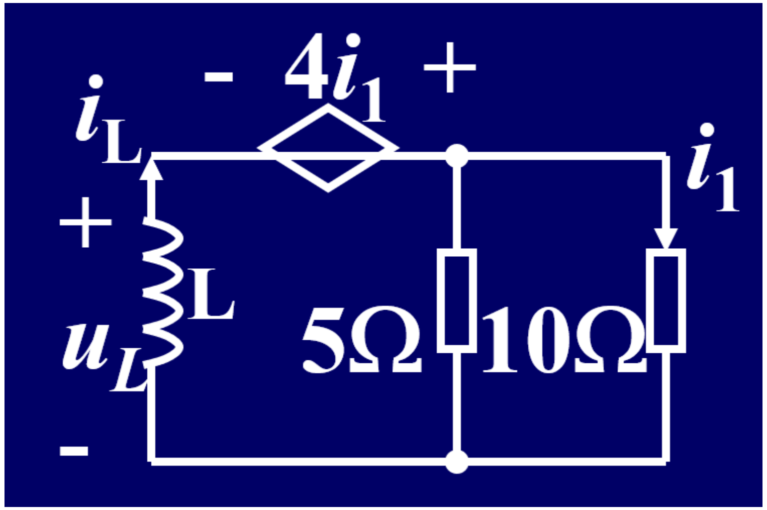
解：（1）求初始值$i_1(0^+)$和$u_L(0^+)$

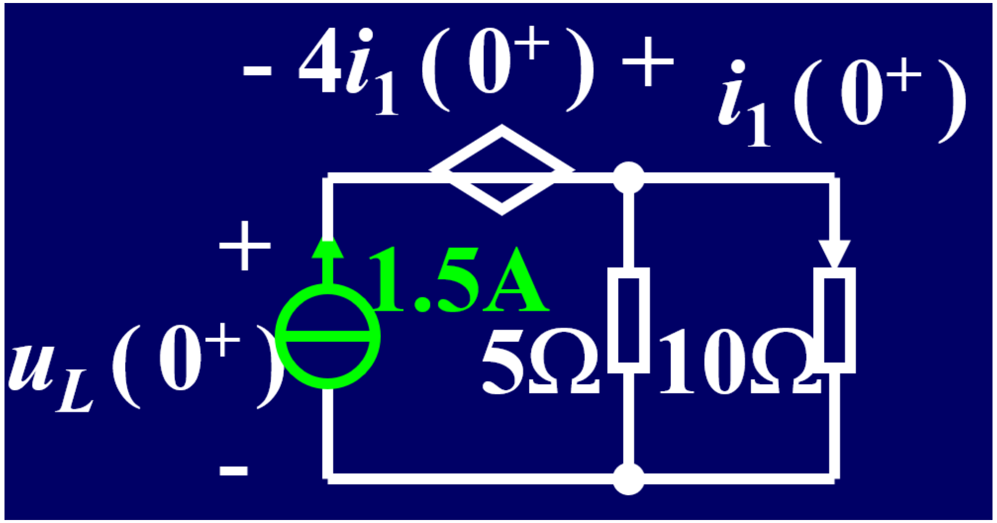
(a)由换路定则，得：

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=1.5A$$

(b)**画0^+图，求初始值$i_1(0^+)$和$u_L(0^+)$：**

(b)画0⁺图，求初始值$i_1(0^+)$和$u_L(0^+)$：

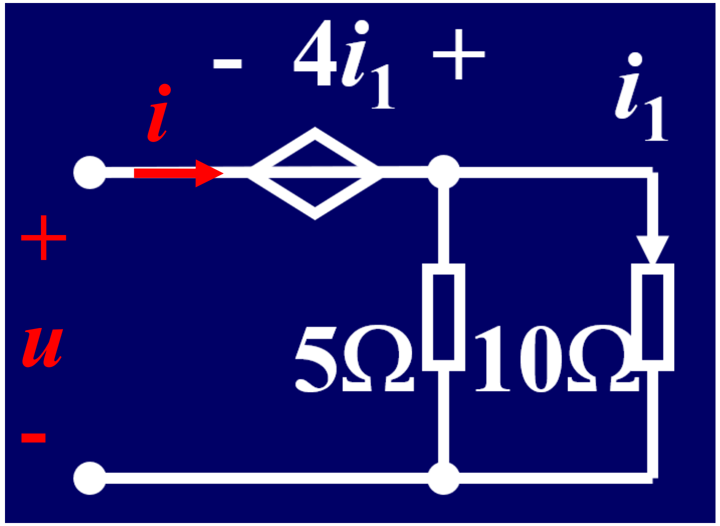




$$i_1(0^+) = 1.5 \times \frac{5}{5+10} = 0.5\text{A}$$

$$u_L(0^+) = -4i_1(0^+) + 10i_1(0^+) = 3\text{V}$$

（2）**求时间常数：先求等效电阻，用加压求流法**



$$\begin{cases} u = -4i_1 + 10i_1 = 6i_1 \\ i_1 = \dfrac{5}{5+10} i \end{cases}$$

消去i_1得： $u = 2i$

即：$R_{eq} = \dfrac{u}{i} = 2\Omega$

所以 $\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{0.5}{2} = \dfrac{1}{4} s$

(3）初始值和时间常数代入下式

$$r_{zi}(t)=r_{zi}(0^{+})e^{-\frac{t}{\tau}},\quad t>0$$

得结果

$$i_1(t)=0.5e^{-4t}\mathrm{A},\quad t>0$$

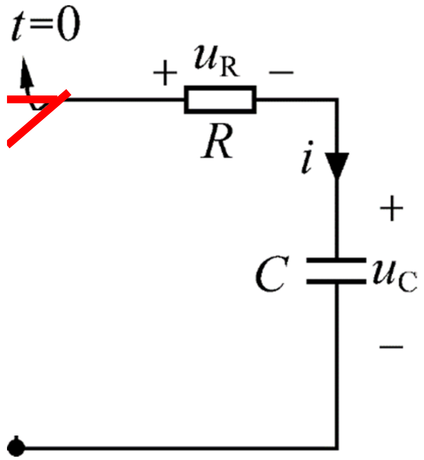
$$u_L(t)=3e^{-4t}\mathrm{V},\quad t>0$$

一阶电路的零状态响应

零状态响应：电路初始状态为零，仅由外激励所引起的响应。

$u_C(0^-)=0, i_L(0^-)=0$ 　　　电源

一、RC电路的零状态响应



若开关由1换到2，$u_C(t)=?$

KVL $u_R + u_C = U_S$

$$Ri + u_C = U_S \Leftarrow \boxed{i = C\frac{du_C}{dt}}$$

$$\Downarrow$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

一阶线性非齐次微分方程

$$\boxed{RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \qquad t \geq 0}$$

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S \\ u_C(0^+)=0 \end{cases}$$

解的形式为： $u_C(t)=\underbrace{u_{Ch}(t)}_{\text{通解}}+\underbrace{u_{Cp}(t)}_{\text{特解}}$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S,\quad t\geq 0$$

求得特解为： $u_{Cp}(t)=K=U_S$

$\boxed{u_{Cp}(t)=K}$

3.完全解： $u_C(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+U_S,\quad t\geq 0$

4.确定常数： $u_C(0^+)=A+U_S=0 \qquad \therefore A=-U_S$

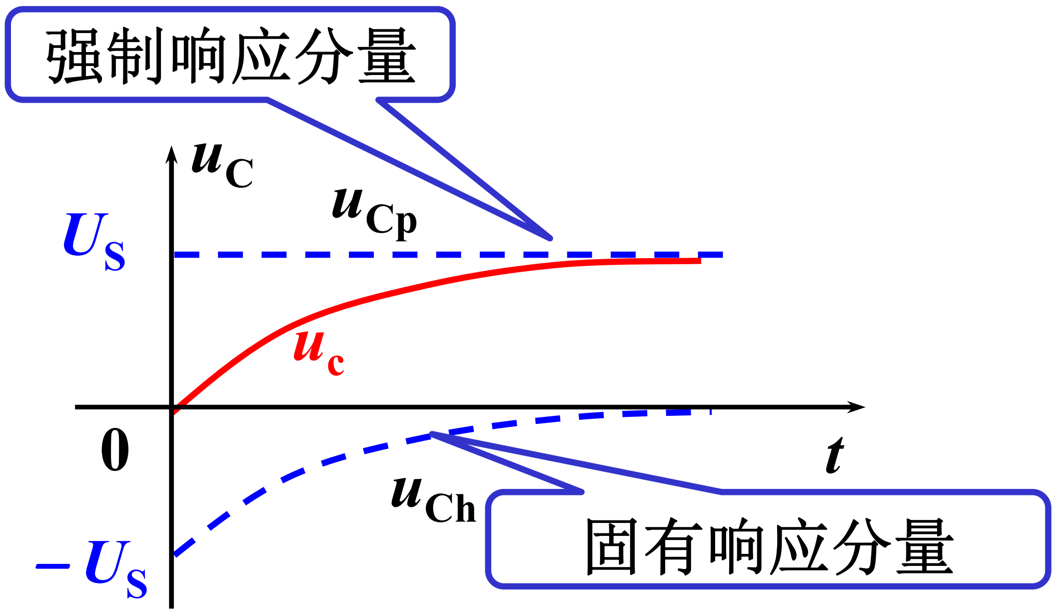
电容电压的零状态响应为 $\boxed{u_C(t)=U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (t\geq 0)}$

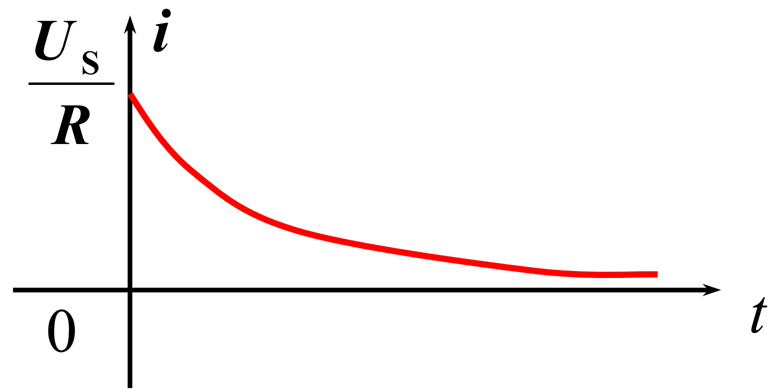
零状态响应为

$$u_C(t)=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$=-U_S e^{-\frac{t}{RC}}+U_S \quad (t\geq 0)$$

$$i=C\frac{du_C}{dt}=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t>0)$$





零状态响应为

$$u_C(t)=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (t\geq 0) \qquad i=C\frac{du_C}{dt}=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t>0)$$

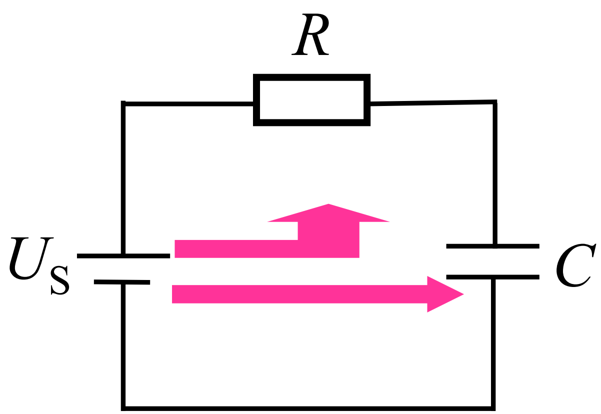
结论

1.电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数;

2.换路后电容充电时间的长短与*RC*有关

令$\tau=RC$，时间常数。

电阻在电容充电过程中消耗的总能量：



$$w_R=\int_{0^+}^{\infty} i_R^2(t)R\mathrm{d}t=\int_{0^+}^{\infty}(\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})^2 R\mathrm{d}t=\frac{1}{2}CU_S^2$$

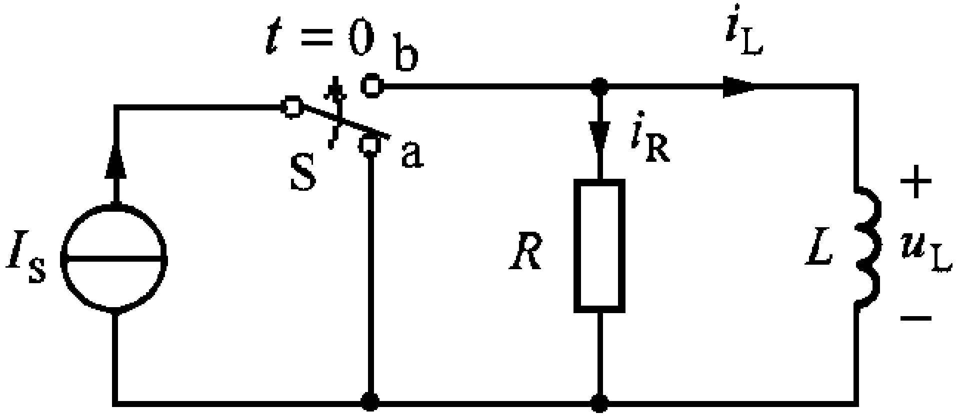
$$w_C=w_R$$

结论

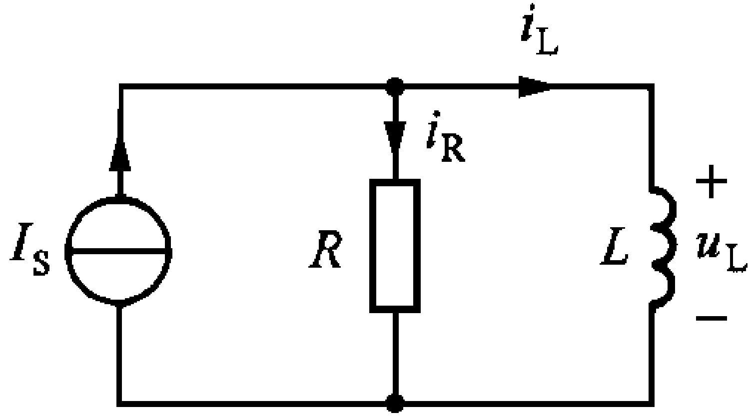
3.**能量关系**：**电阻所消耗的能量**与充电结束时电容所储存的能量相同。即**电源提供的能量一部分被电阻消耗掉，一部分储存在电容中**，充电效率50%。

二、RL电路的零状态响应

图(a)电路换路前已稳定，即$i_L(0^-)=0$。t=0时开关由a倒向b，如图(b)。由于电感电压有界时，电感电流不能跃变，即$i_L(0^+)= i_L(0^-)=0$。因此是零状态问题。



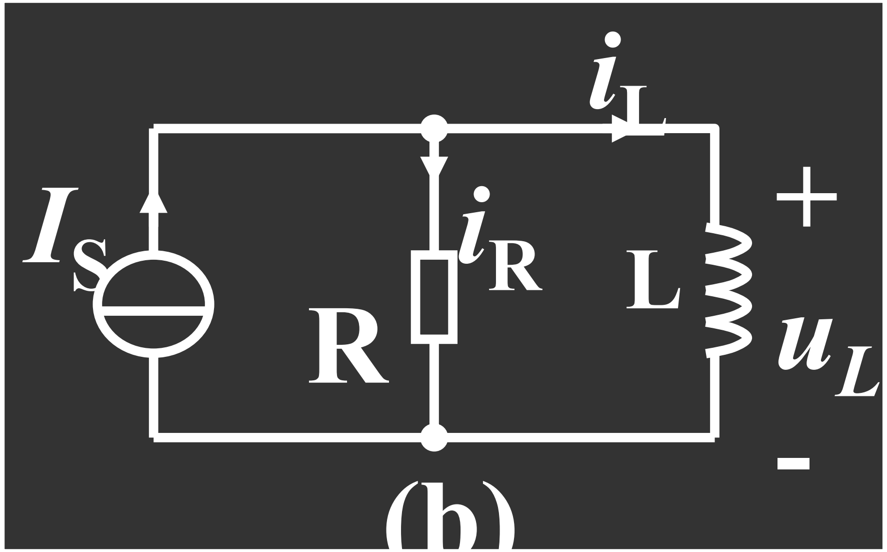
(a)



(b)

图(b)电路列方程

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}+i_{\mathrm{L}}=I_{\mathrm{S}}\qquad(t\geq 0)$$



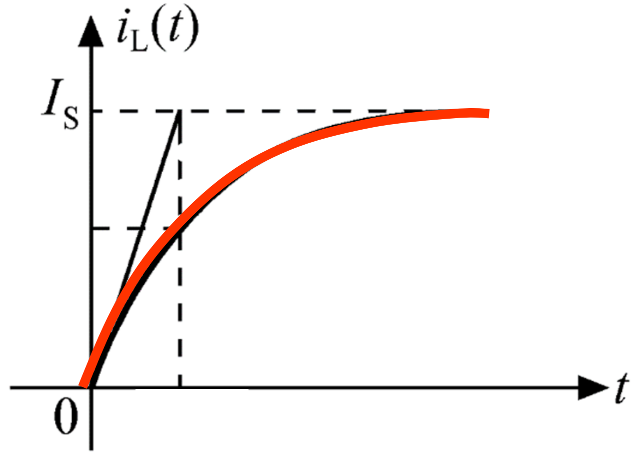
这是常系数非齐次一阶微分方程。其解与RC电路相似，即

$$i_{\mathrm{L}}(t)=i_{\mathrm{Lh}}(t)+i_{\mathrm{Lp}}(t)=B\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+I_{\mathrm{S}}=B\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+I_{\mathrm{S}}$$

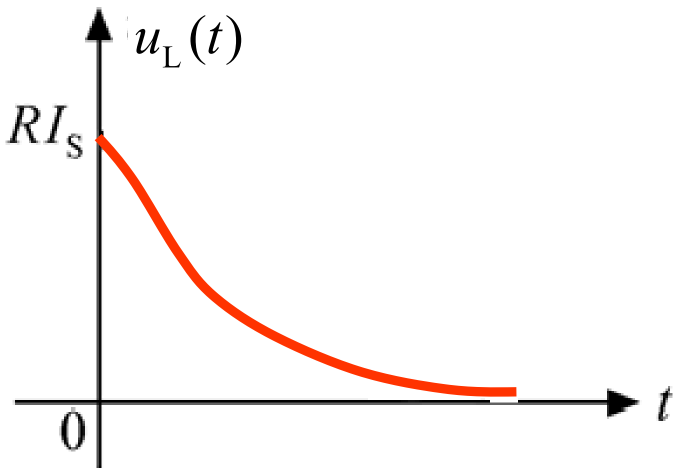
τ =L/R是该电路的时间常数。常数B由初始条件确定，即由下式

$$i_{\mathrm{L}}(0^{+})=i_{\mathrm{L}}(0^{-})=B+I_{\mathrm{S}}=0\quad 即\ B=-I_{S}$$

$$i_L(t) = I_S(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (t \geq 0)$$

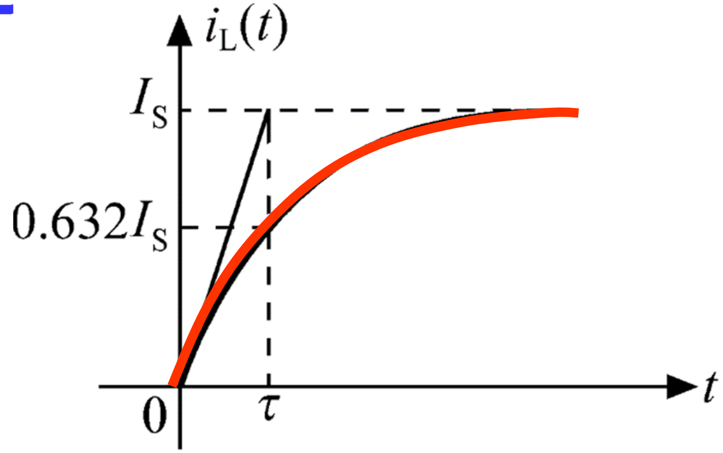


$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = RI_S e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$



$$i_L(t) = I_S(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (t \geq 0) \qquad u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = RI_S e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$

结论



1. i_L, u_L 以同一指数规律变化；
2. 充电过程的长短取决于 L/R
3. 令 $\tau = L/R$ —— RL电路的时间常数
4. 能量关系:电源提供的能量一部分被电阻消耗掉，一部分储存在电感中，充电效率50%。

三、一阶电路电容电压、电感电流

零状态响应的一般公式

$$u_{Czs}(t)=u_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}}),\quad t\geq 0$$

稳态值

$$i_{Lzs}(t)=i_L(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}}),\quad t\geq 0$$

稳态值：画终值电路。开关动作之后，t趋向于+∞，电路达到新的稳定状态的值，此时电容开路，电感短路。

τ 时间常数 $\begin{cases}\text{RC电路：}\ \tau=RC\\ \text{RL电路：}\ \tau=L/R\end{cases}$

R是与动态元件相连接的单口网络的等效电阻

零输入响应的一般公式

$$r_{zi}(t)=r_{zi}(0^{+})\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\quad t>0$$

适用于求解一阶电路中的任何响应的零输入响应

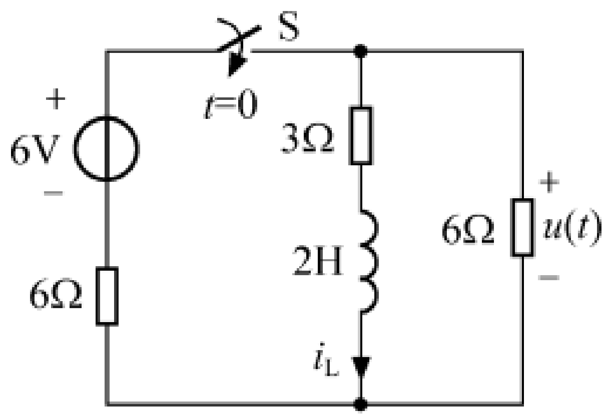
零状态响应的一般公式

$$u_{C_{zs}}(t)=u_{C}(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}),\quad t\geq 0$$

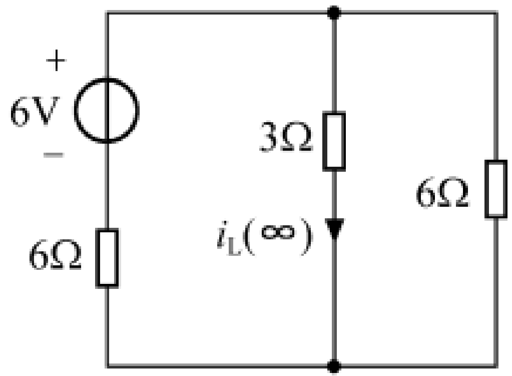
$$i_{L_{zs}}(t)=i_{L}(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}),\quad t\geq 0$$

只适用于求解一阶电路中的电容电压和电感电流零状态响应

【例 6-8】 电路如图 6-28（a）所示，电路原已处于稳态，$t=0$ 时开关 S 闭合，试求 $t>0$ 时的 $i_L(t)$。



(a)

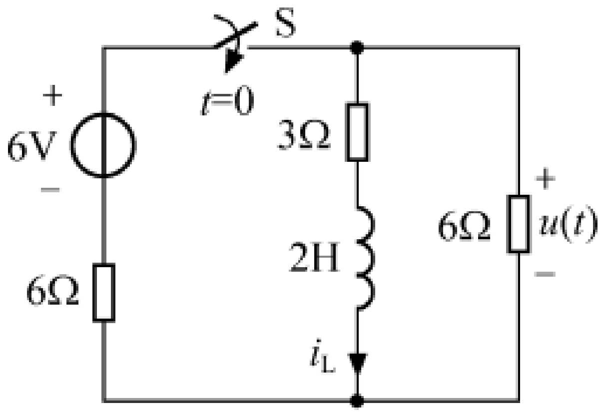


(b)

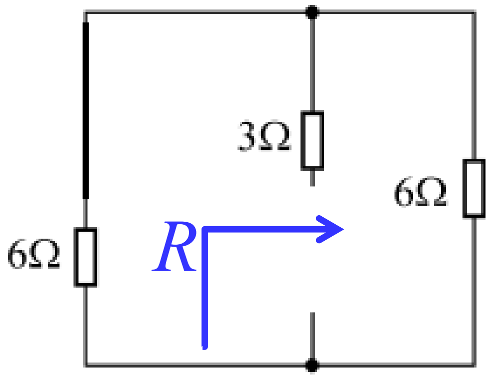
解：1. $t<0$时，$i_L(0^-)=0$, $t>0$时，有外加激励源，为零状态电路。根据换路定则，$i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$。需要求$i_L(\infty)$, τ

2.求$i_L(\infty)$。画终值电路。如图（b）

$$i_L(\infty)=\frac{6}{6+3//6}\times\frac{6}{3+6}=0.5\text{A}$$



(a)



（C）

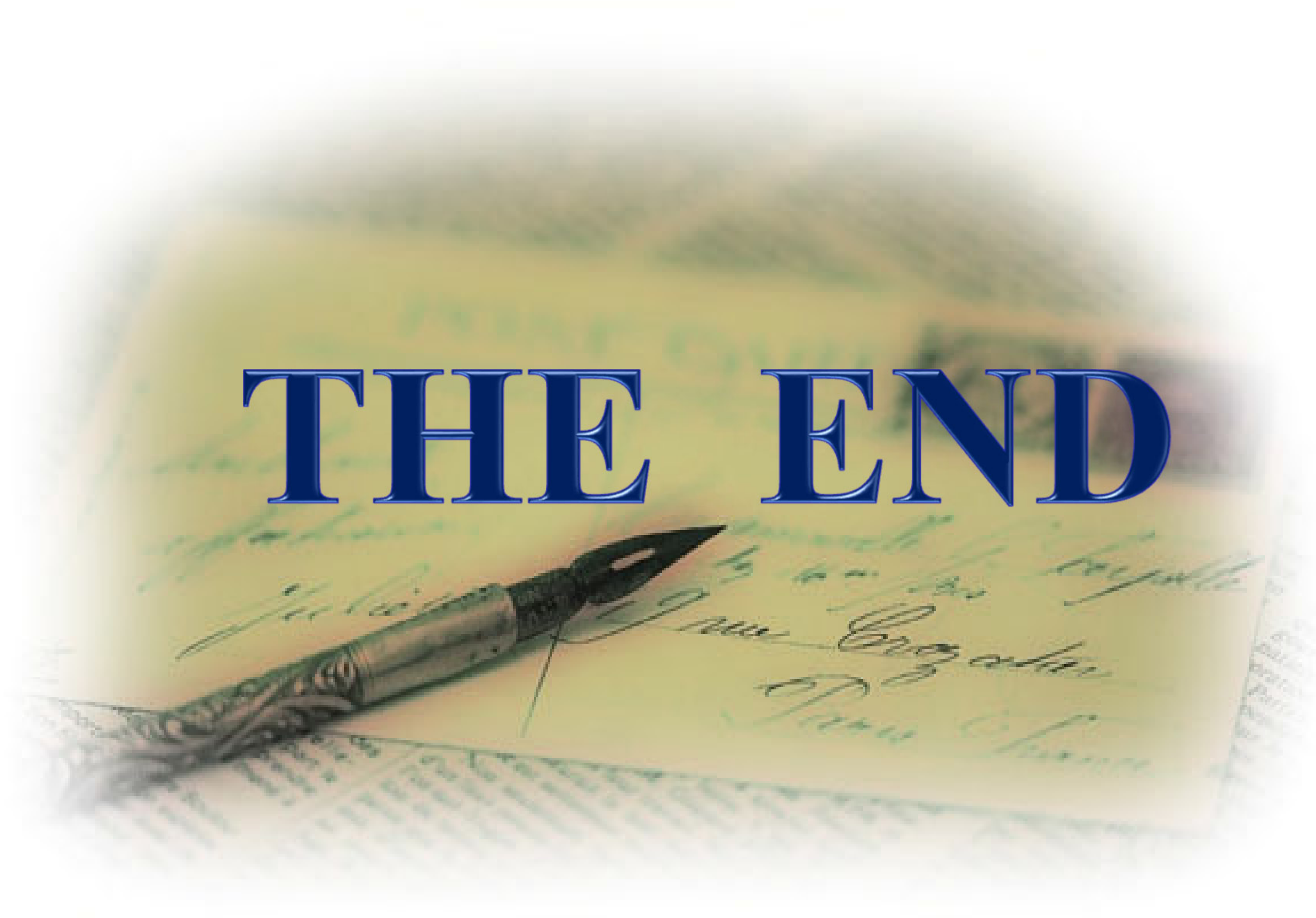
3.求时间常数τ（开关动作之后）等效电阻R的电路图（图C）

$$R = 3 + 6//6 = 6\Omega \qquad \tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{3}\ \mathrm{s}$$

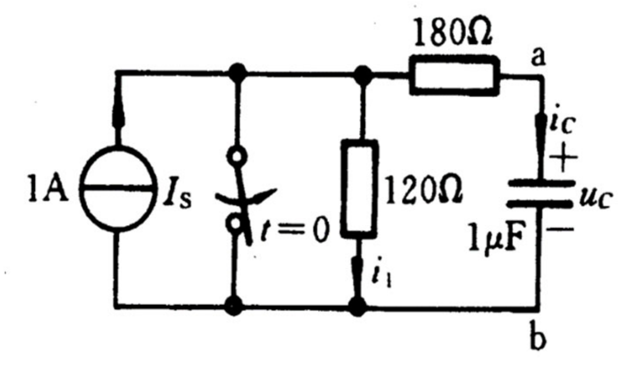
4.带入公式求$i_L(t)$

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0.5(1 - e^{-3t})\mathrm{V} \quad (t \geq 0)$$

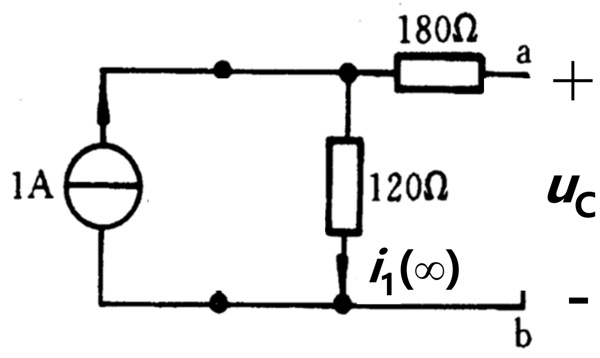
t=0时刻换路	开关动作	电容、电感处理	目标待求量
0^-图	未动作	开路、短路	初始状态$u_c(0^-)$,$i_L(0^-)$
0^+图	已动作	电压源、电流源	初始值
∞图	已动作	开路、短路	终值（稳态值）
τ中等效电阻R对应电路图	已动作	直接拿走，剩下二端网络，独立源置零，受控源保留	$\tau=RC$ $\tau=L/R$


THE END

例13 图(a)电路原已稳定，求t≥0的$u_C(t)$,$i_C(t)$及$i_1(t)$



(a)



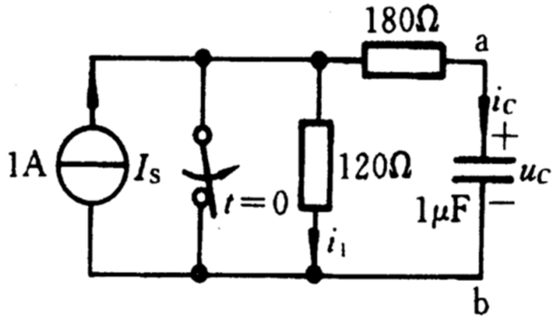
（b）

1.t<0时，$u_C(0^-)=0$, t>0时，有外加激励源，为零状态电路。根据换路定则，$u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$。需要求$u_C(\infty)$, τ。

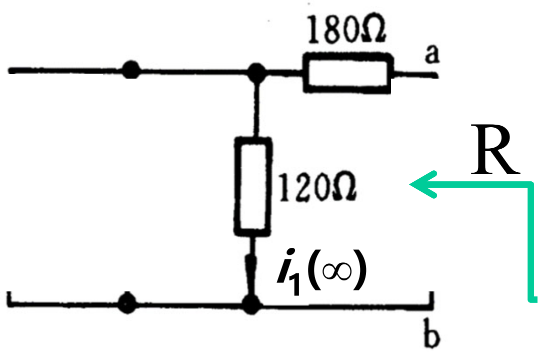
2.求$u_C(\infty)$。画终值电路。如图（b）

$$u_C(\infty)=120\times1=120\text{V}$$

例13 图(a)电路原已稳定，求t≥0的$u_C(t)$,$i_C(t)$及$i_1(t)$



(a)



(c)

3.求时间常数τ（开关动作之后），**画等效电阻R的电路图（图C）**，

移去动态元件（电容，电感），电流源开路，电压源短路：

$$R=120+180=300W \qquad \tau=RC=300\times10^{-6}=3\times10^{-4}s=300\mu s$$

4.带入公式求u_C(t)

$$u_C(t)=u_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=120(1-e^{-\frac{1}{3}\times10^4 t})\text{V} \quad (t\ge0)$$

i_C(t)错误求法：

$$i_C(\infty)=0\text{A}$$

$$i_C(t)=i_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=0\text{A} \quad (t>0)$$

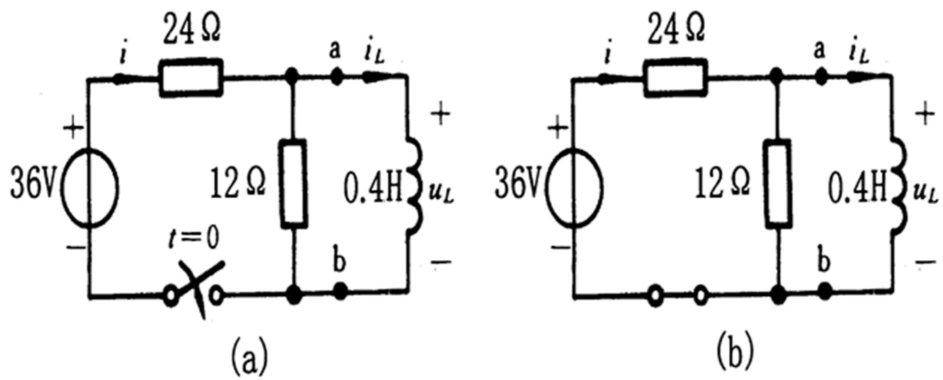
5.求i_C(t)及i_1(t)

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=0.4e^{-\frac{1}{3}\times10^4 t}\text{A} \qquad (t>0)$$

KCL $i_1(t)=I_S-i_C(t)=(1-0.4e^{-\frac{1}{3}\times10^4 t})\text{A}, \quad (t>0)$

南京邮电大学
Nanjing University of Posts and Telecommunications

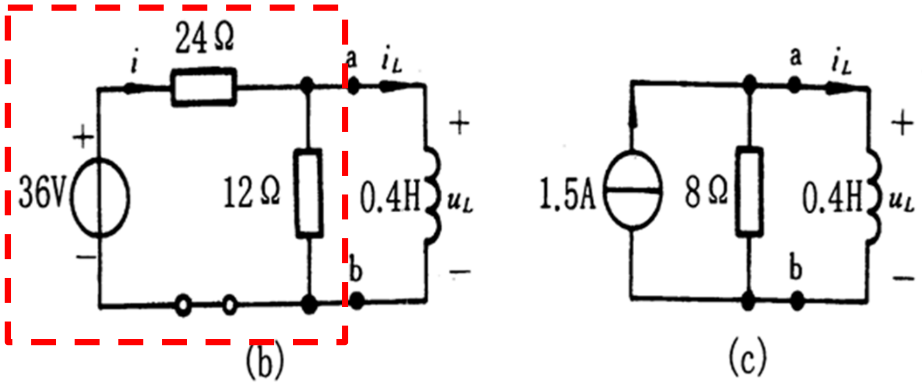
例14 图(a)电路原已稳定，求t≥0的电感电流和电感电压。



解：t<0,i_L(0-)=0,零状态电路。换路后如图(b)，根据换路定则

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

将图(b)用诺顿等效电路代替，得到图(c) 电路。求得时间常数为



$$\tau = \frac{L}{R_o} = \frac{0.4}{8} = 0.05s$$

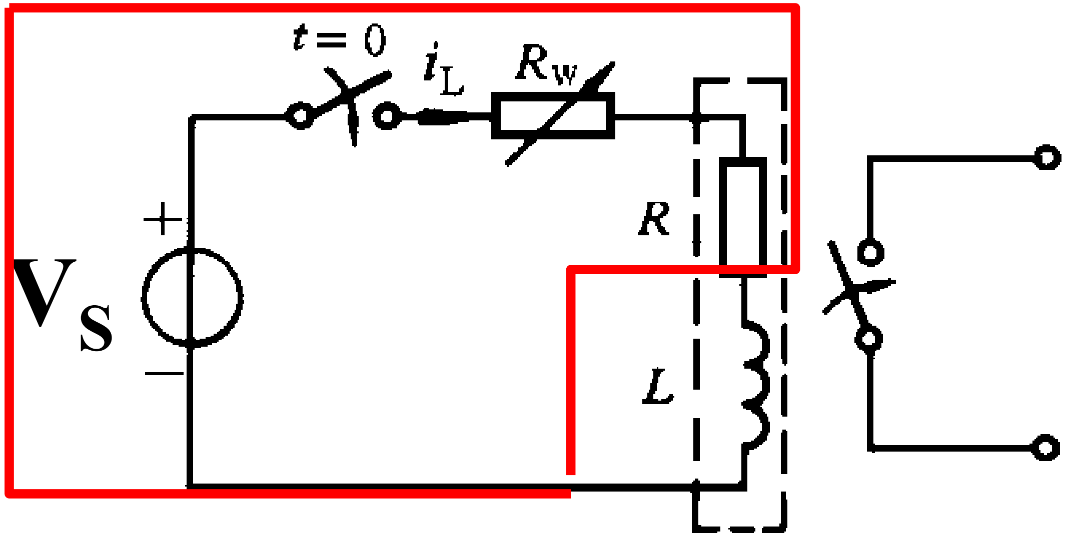
因此根据电感零状态响应公式： $i_L(t) = I_S(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (t \geq 0)$

$$i_L(t) = 1.5(1 - e^{-20t})A \qquad (t \geq 0)$$

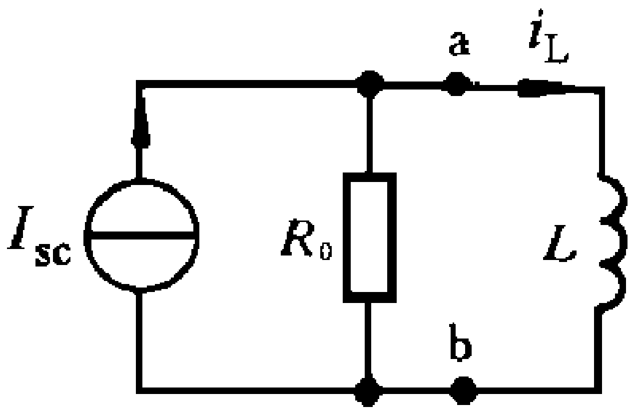
电感**VCR：**

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = 0.4 \times 1.5 \times 20e^{-20t} = 12e^{-20t}V \quad (t > 0)$$

例15 图(a)为一继电器延时电路模型。继电器参数：R=100Ω，L=4H，当线圈电流达到6mA时，继电器动作，将触头接通。从开关闭合到触头接通时间称为延时时间。为改变延时时间，在电路中串联一个电位器，阻值从零到900Ω 间变化。若U_S=12V，试求电位器电阻值变化所引起的延时时间的变化范围



(a)



(b)

解：开关闭合前，电路处于零状态，$i_L(0^-)=0$。由换路定则得：$i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$。用图(b)所示诺顿等效电路代替，其中

$$R_o = R + R_W \qquad I_{sc} = \frac{V_S}{R+R_W} = \frac{V_S}{R_o}$$

电感电流的表达式为

$$i_L(t) = \frac{V_S}{R_o}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

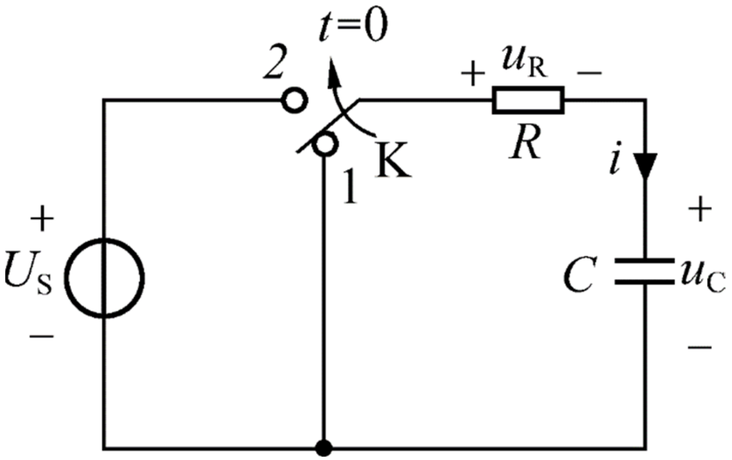
设t_0为延时时间，则有 $i_L(t_0)=\dfrac{V_S}{R_o}(1-e^{-\frac{t_0}{\tau}})=6\text{mA}$

由此求得 $t_0=-\tau\ln\left[1-\dfrac{R_o i_L(t_0)}{V_S}\right]$

当R_w=0Ω时,τ =0.04s

$$t_0=-0.04\ln\left[1-\frac{100\times6\times10^{-3}}{12}\right]=2.05\text{ms}$$

当R_w=900Ω时,τ =0.004s $t_0=-0.004\ln\left[1-\dfrac{1000\times6\times10^{-3}}{12}\right]=2.77\text{ms}$



如果套用零状态公式

$$u_R(\infty)=0$$

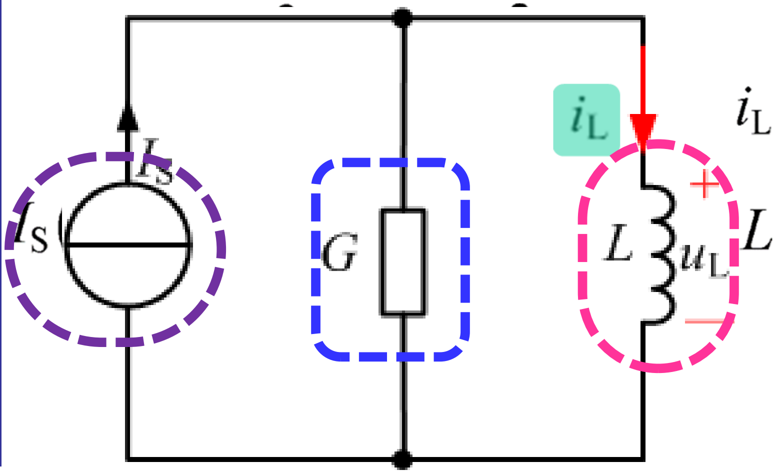
$$u_{Rzs}=u_R(\infty)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=0,\ t>0$$

正解 $u_C(\infty)=U_s$

$$u_{Czs}(t)=U_s(1-e^{-\frac{t}{\tau}}),\quad t\geq 0$$

根据KVL：

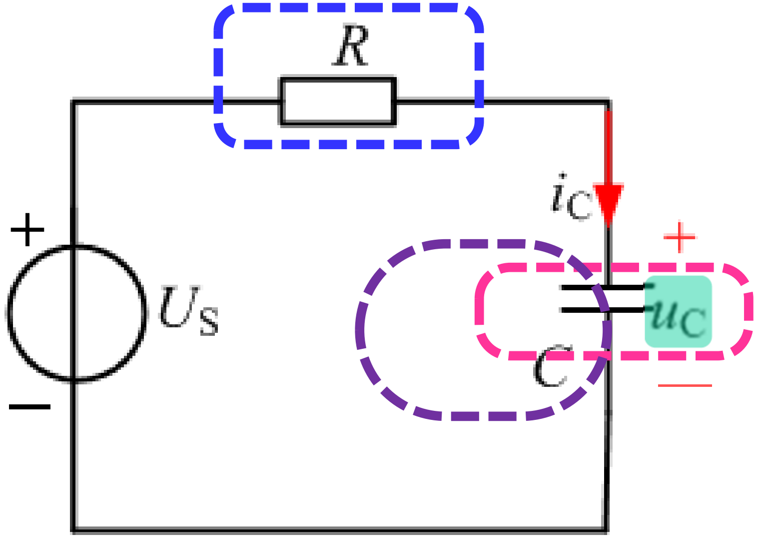
$$u_{Rzs}=U_s-u_{Czs}(t)=U_s-U_s(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=U_s e^{-\frac{t}{\tau}},\quad t>0$$



若开关k断开后，$i_L(t)$=?

$$i_L(t) = I_S(1 - e^{-\frac{t}{GL}}) \quad (t \geq 0)$$

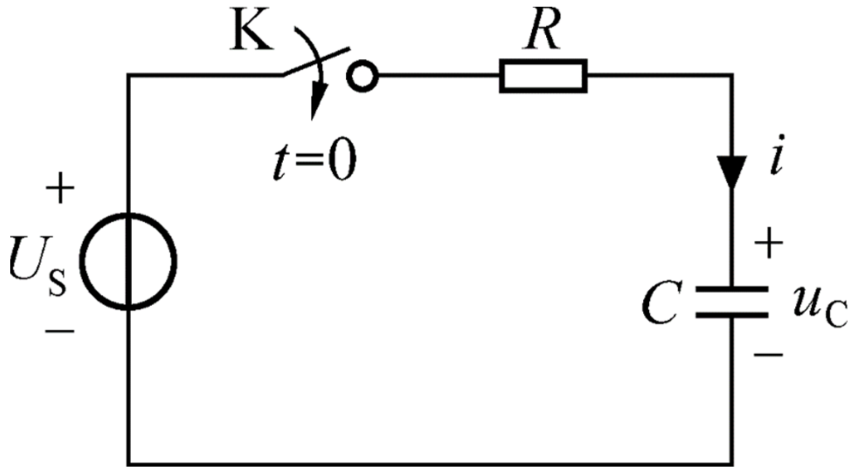
对偶



$$u_C(t) = u_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad t \geq 0$$

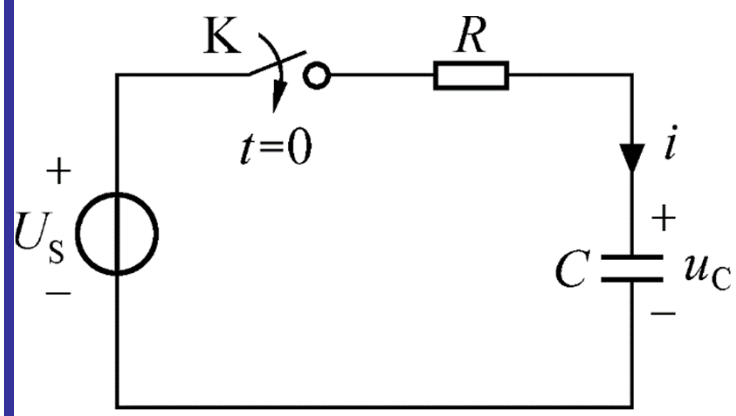
一阶电路的全响应

以RC电路为例



$u_C(0^-)=U_0$

全响应：非零初始状态和外激励共同作用时的电路的响应。

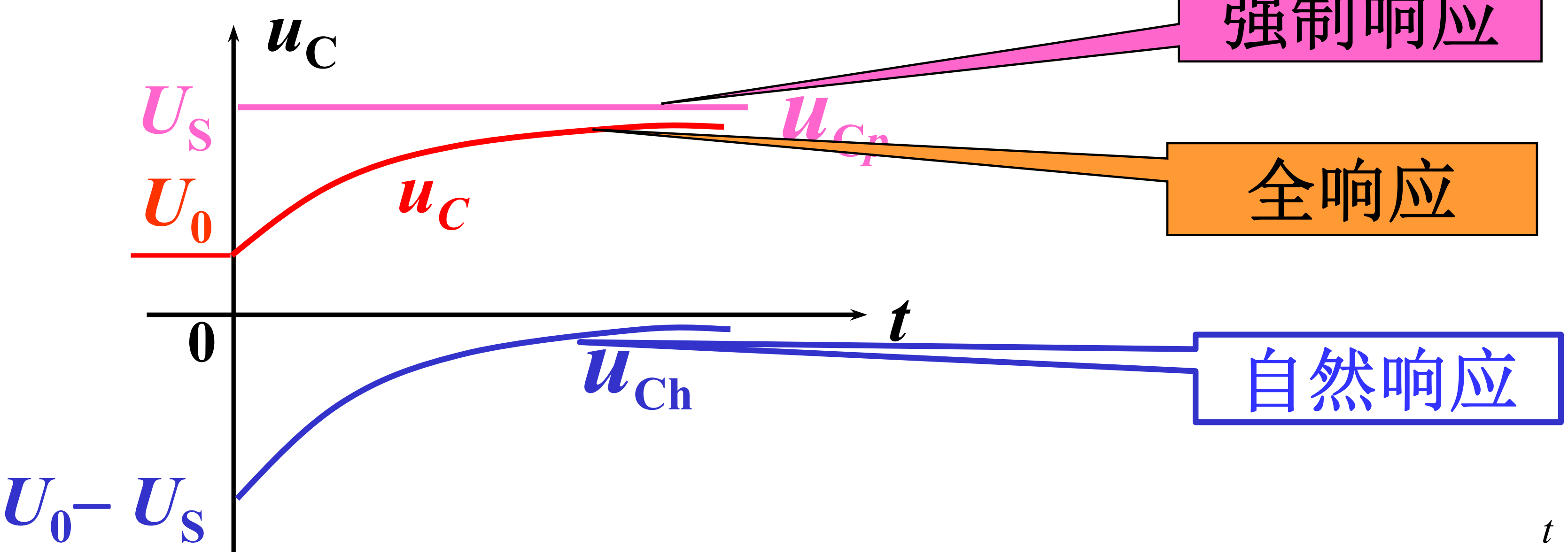


已知：开关K闭合前$u_C(0^-)=U_0$，$t=0$时，开关闭合，求$u_C(t)$？

则：

$$u_C(t)=\underbrace{(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{自然（固有）响应}}+\underbrace{U_S}_{\text{强制响应}}\quad(t\geq 0)$$

$$u_C(t)=(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}+U_S \quad (t\geq 0)$$



U_S $\quad$ $(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}$

结论二

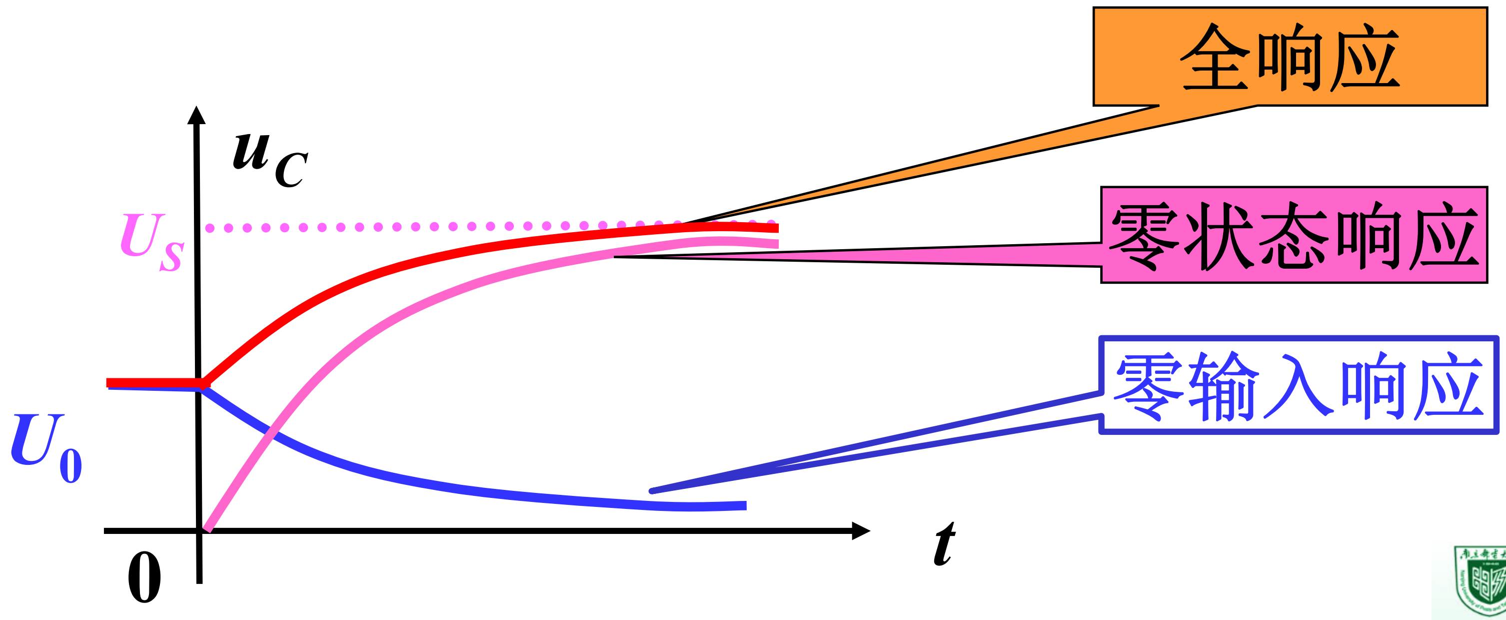
全响应 = 稳态响应+暂态响应

$$u_C(t)=(U_0-U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+U_S \quad (t\geq 0)$$

$$\Rightarrow u_C(t)=U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t\geq 0)$$

结论三

全响应= 零输入响应+零状态响应



小结

全响应的有不同的分解方法

- 按响应的能量来源不同分：

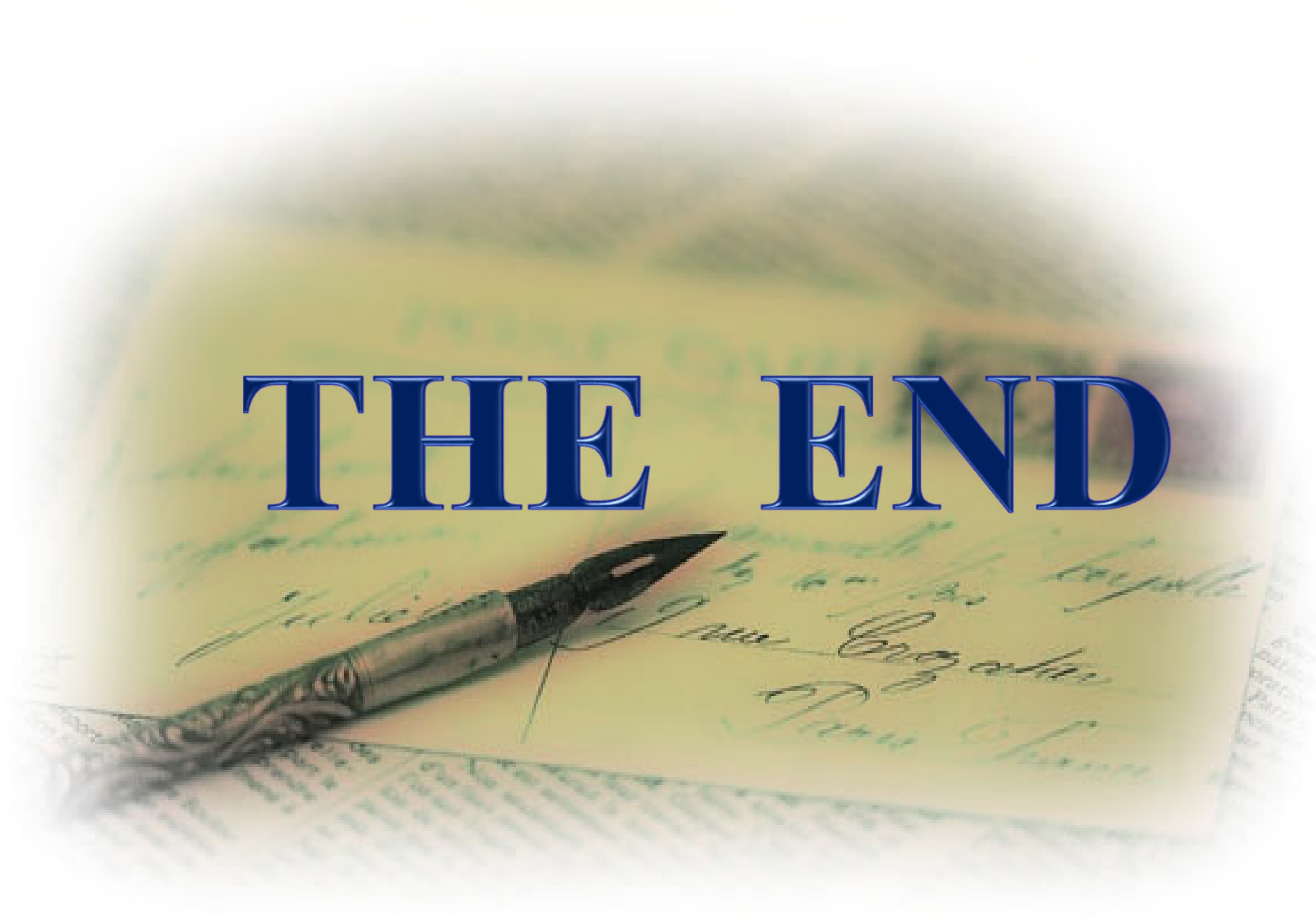
  全响应=零输入响应+零状态响应

- 按电路的响应形式分：

  全响应=强制响应+固有（自然）响应

- 按电路的响应特性分：

  全响应=稳态响应+暂态响应


THE END

判断零输入，零状态，全响应：

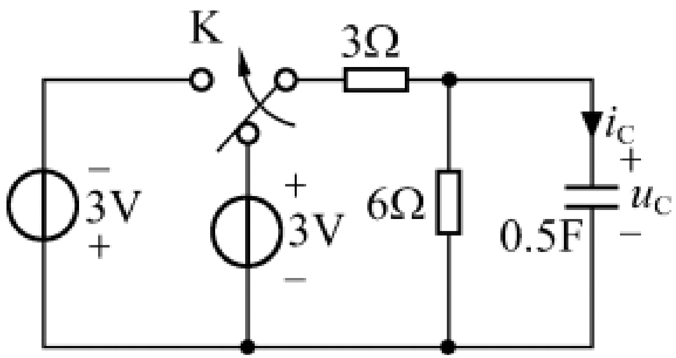
两类激励

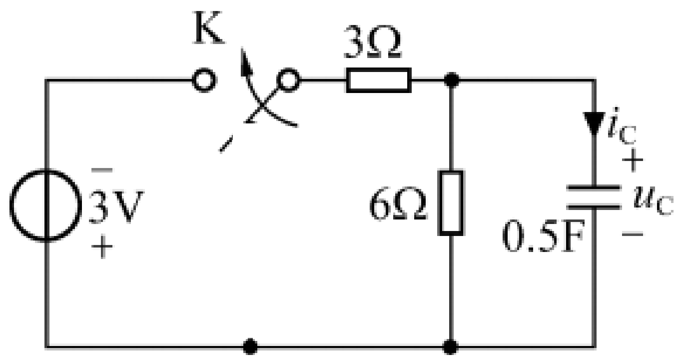
- 外激励:换路后或开关动作后（$t>0$）是否有独立源
- 内激励:元件的初始储能，即初始状态是否为0，即未换路或开关未动作，（$t=0^-$时）去判别，$u_C(0^-)=0?$, $i_L(0^-)=0?$

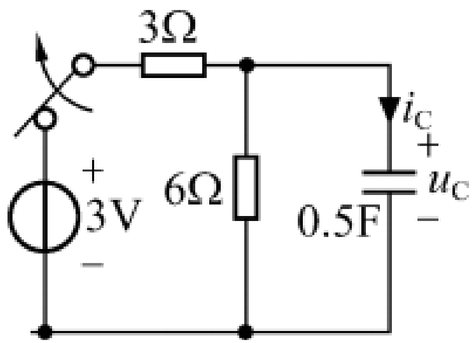
零输入响应:无独立源（外激励），有初始状态（内激励）

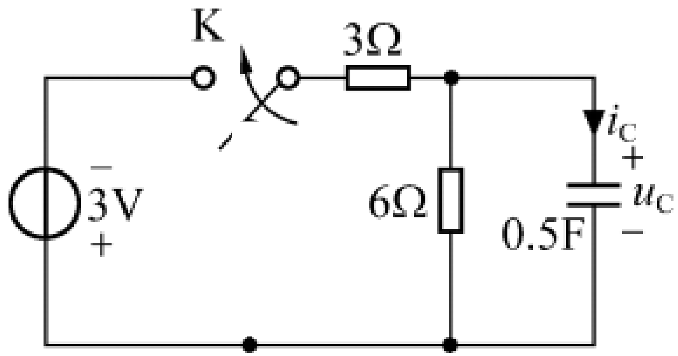
零状态响应:有独立源（外激励），无初始状态（内激励）

全响应响应:有独立源（外激励），有初始状态（内激励）



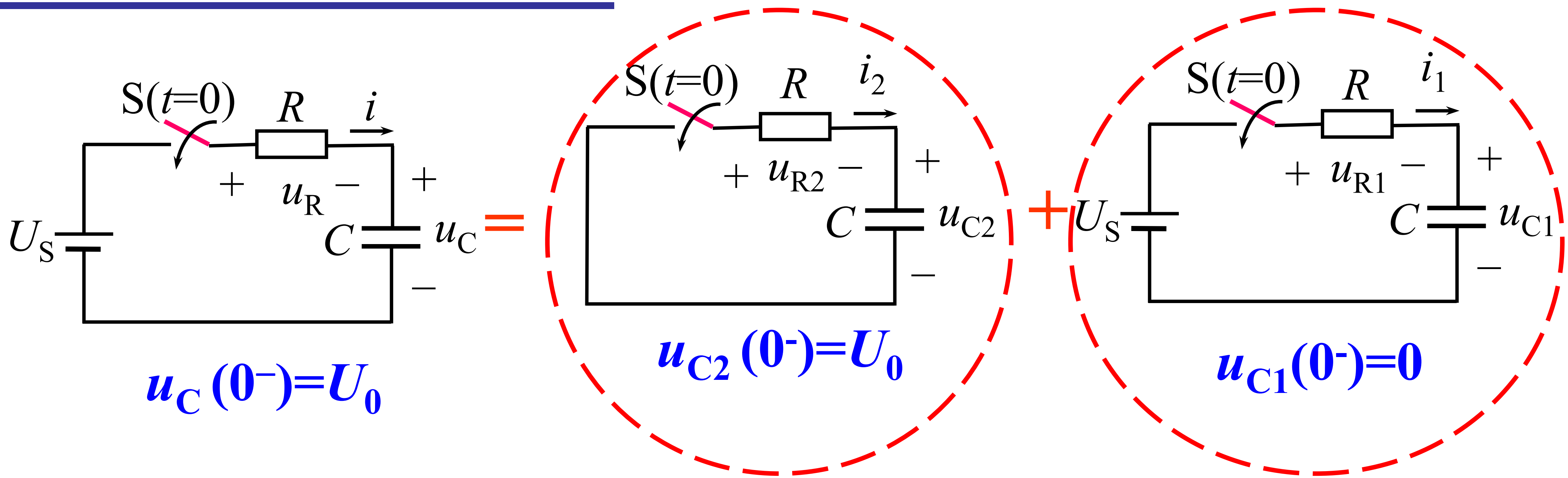






已知：**$u_C(0-)=1V$**

图中，电容换成电感，判别方法类似。



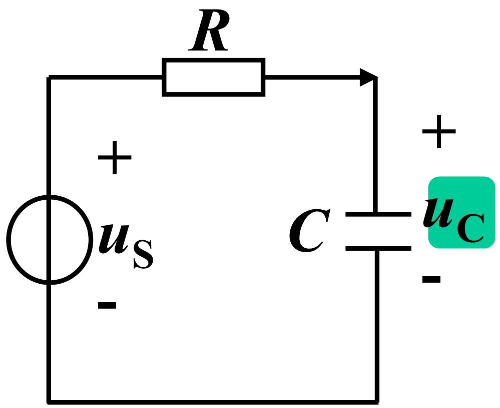
$u_C(0^-)=U_0$ $\quad$ $u_{C2}(0^-)=U_0$ $\quad$ $u_{C1}(0^-)=0$

两类激励
- 外激励（独立源）
- 内激励（元件的初始储能）

只适用于线性电路!!!!!

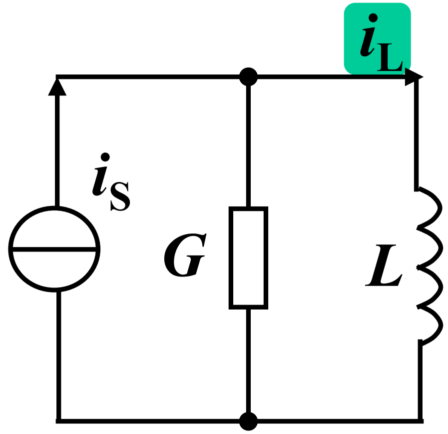
一阶电路的三要素法

RC一阶电路



$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=u_S \quad (t\geq 0) \\ u_C(0^+)=U_0 \end{cases}$$

RL一阶电路



$$\begin{cases} GL\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t)=i_S \quad (t\geq 0) \\ i_L(0^+)=I_0 \end{cases}$$

微分方程统一形式：

$$\begin{cases} \tau\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+r(t)=w(t) \quad (t>0) \\ r(0^+) \end{cases}$$

$r(0^+)$ 响应的初始值

τ： 时间常数***RC*** **,*GL***

$w(t)$： 外加激励

响应的完全解为 $r(t) = r_h(t) + r_p(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + r_p(t)$

t=0⁺时初始值代入 $\Rightarrow$ $A = r(0^+) - r_p(0^+)$

一阶电路任意激励下的任一全响应为:

$$r(t) = r_p(t) + [r(0^+) - r_p(0^+)]e^{-\frac{t}{\tau}},\ t > 0$$

恒定激励的情况下

非齐次方程特解$r_p(t)$为常数，即为响应的稳态值，

则有: $r_p(t) = r(\infty) = r_p(0^+)$

恒定直流激励下一阶电路的全响应一般表达式为：

$$r(t)=r(\infty)+[r(0^{+})-r(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\ t>0$$

其中三要素：

$r(0^{+})$ ——初始值

$r(\infty)$ ——终值（稳态值）

τ ——时间常数，$\tau=RC$或$\tau=GL$(或者L/R)

注意：上述过程换路时刻都在t=0时刻，如果换路时刻为$t=t_0$，公式变为

$$r(t)=r(\infty)+[r(t_0^{+})-r(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}},\ t>0$$

南京邮电大学 Nanjing University of Posts and Telecommunications

$$r(t)=r(\infty)+[r(0^+)-r(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\ t>0$$

零输入响应的一般公式： $t\to\infty$， $r(\infty)=0$

$$r_{zi}(t)=r_{zi}(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\quad t>0$$

零状态响应的一般公式：

$u_C(0^-)=0=u_C(0^+)$ ⇨ $$u_{Czs}(t)=u_C(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}),\quad t\geq 0$$

$i_L(0^-)=0=i_L(0^+)$ ⇨ $$i_{Lzs}(t)=i_L(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}),\quad t\geq 0$$

根据换路定则，其他$r(0^+)$在换路时候可能跳变， $r(0^+)$为一不确定值。

三要素法求直流激励下响应的步骤：

1. 计算初始值$r(0^+)$：

(1) 画t=0^-图，求初始状态：电容→开路，电感→短路，求电容电压$u_C(0^-)$或电感电流$i_L(0^-)$。

(2)由换路定则，确定电容电压或电感电流初始值，即$u_C(0^+)=u_C(0^-)$和$i_L(0^+)=i_L(0^-)$。

(3)画t=0+图，求其它初始值——用数值为$u_C(0^+)$的电压源替代电容或用$i_L(0^+)$的电流源替代电感，得电阻电路再计算。

2. 计算稳态值$r(\infty)$：画$t\rightarrow\infty$图:开关已经动作（已换路）,电路达到新的稳定状态。

电容→开路 ➡ 直流电阻电路 ➡ 确定稳态值$r(\infty)$

电感→短路

3. 计算时间常数τ：（开关已动作）

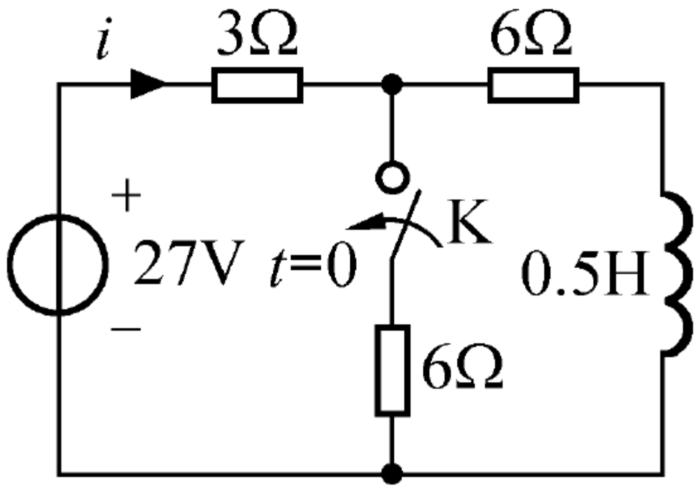
（1）求等效电阻的电路：在原电路中把动态元件移去，从移去的动态元件的端口看进去（电压源短路，电流源开路，受控源保留），求解等效电阻.

（2）带入$\tau=RC$ 或 $\tau=L/R$

4. 将$r(0^+)$，$r(\infty)$和 τ代入三要素一般表达式。

$$r(t)=r(\infty)+[r(0^+)-r(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}},\ t>0$$

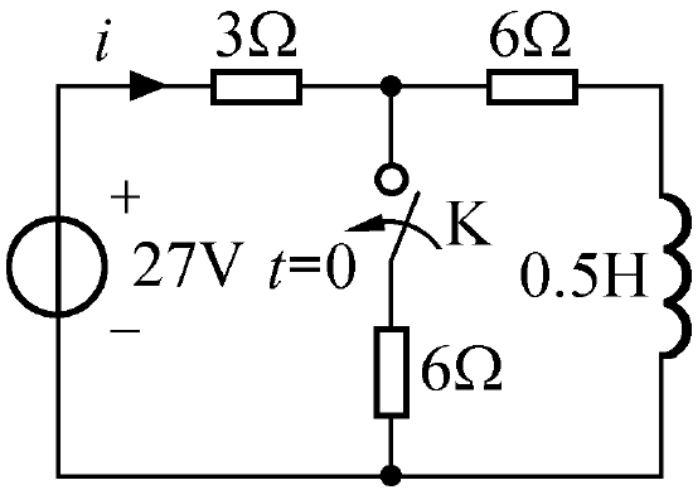
【例】电路原处于稳定状态。 t=0时开关K闭合，求t>0的响应$i(t)$，并画波形图。

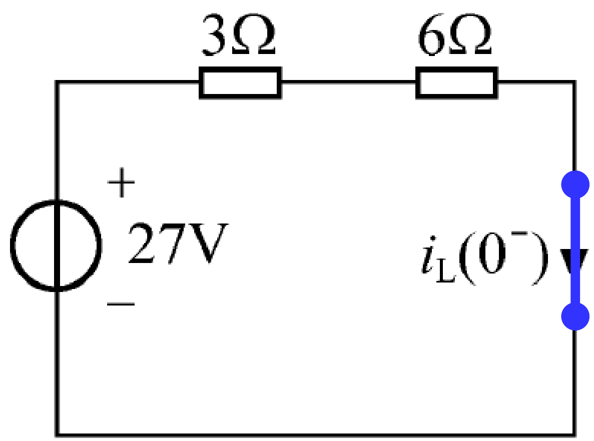


分析：分别求出$i(0^+)$、$i(\infty)$、τ带入三要素表达式。

解：1.计算初始值$i(0^+)$

0^-图：





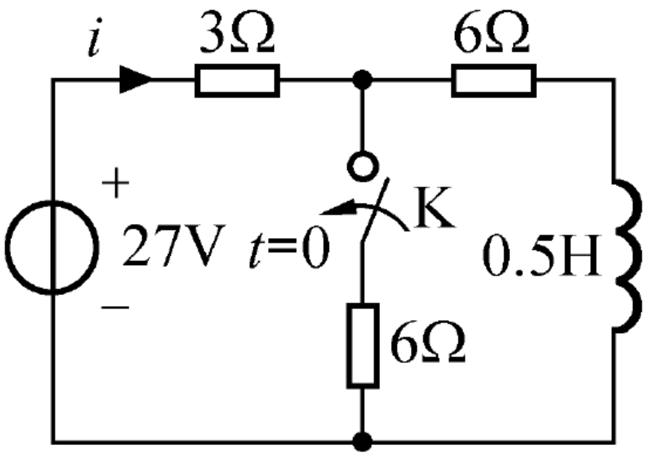
(b) $t=0^-$等效电路

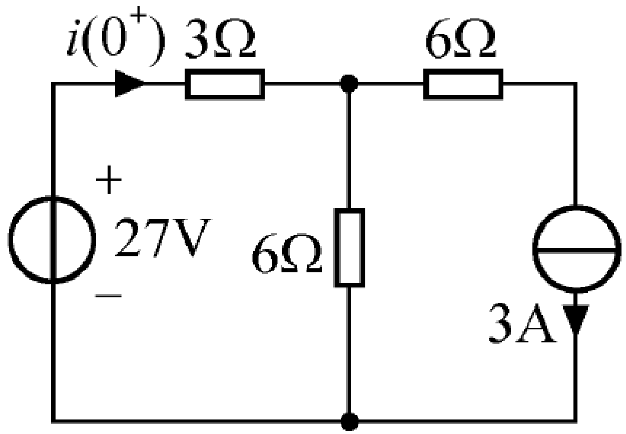
$$i_L(0^-)=\frac{27}{6+3}=3A$$

换路定则：$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=3A$$

0⁺图：

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 3\text{A}$$





(c) $t=0^+$等效电路

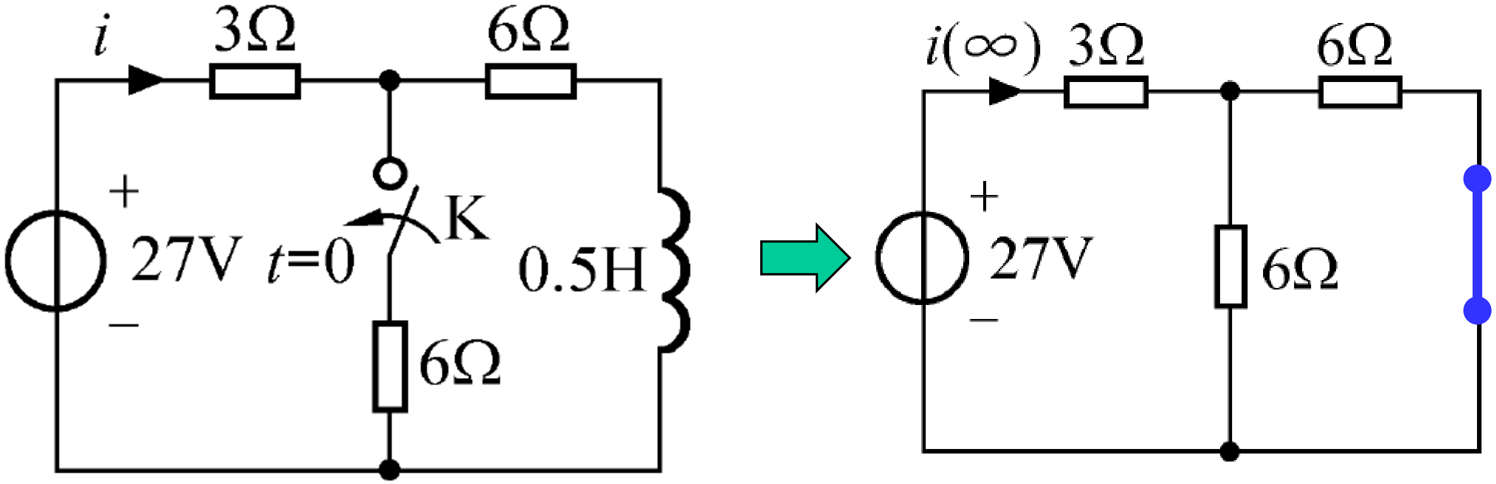
$$i(0^+) = i(0^+)' + i(0^+)''$$

$$= \frac{27}{3+6} + 3\times\frac{6}{3+6}$$

$$= 5\text{A}$$

2.计算稳态值$i(\infty)$

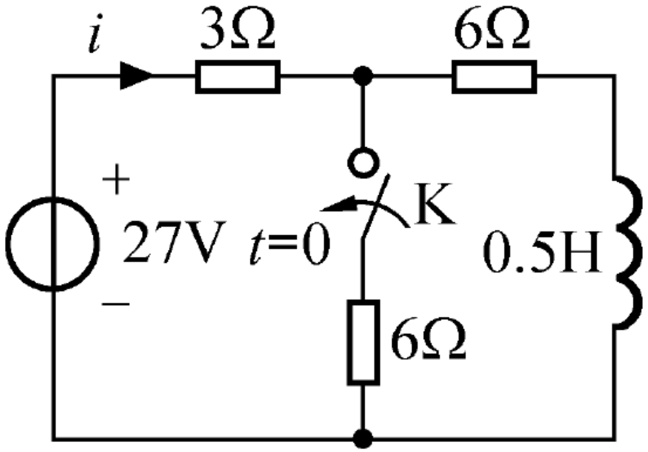
∞图：

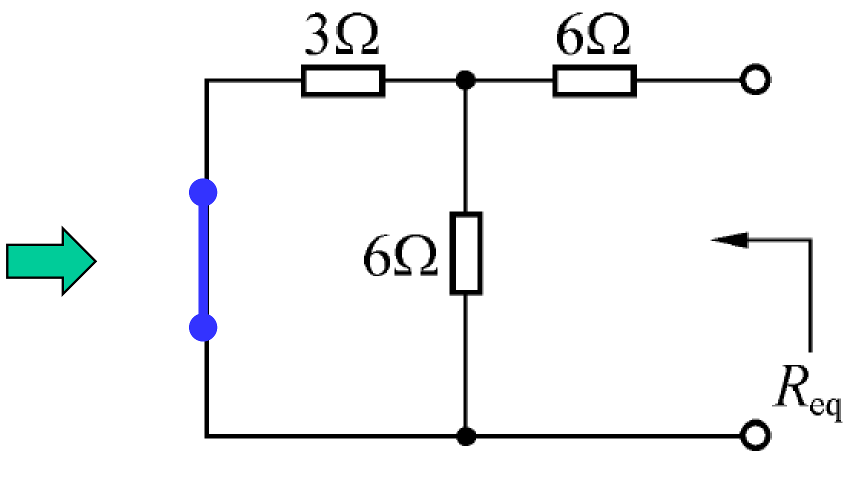


(d) $t\to\infty$ 等效电路

$$i(\infty)=\frac{27}{3+6//6}=4.5\text{A}$$

3. 计算时间常数τ





(e) R_{eq}的求取

$$R_{eq}=3//6+6=8\Omega$$

$$\therefore \tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{0.5}{8}=\frac{1}{16}\mathrm{s}$$

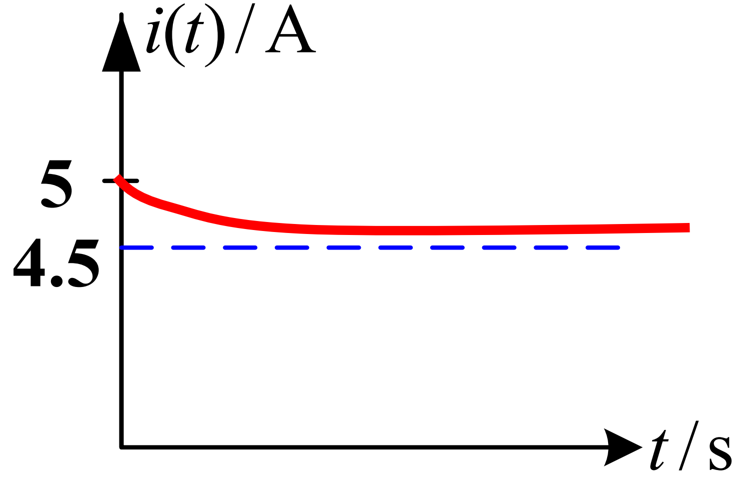
4. 初始值 $i(0^+)=5\text{A}$ 、
稳态值 $i(\infty)=4.5\text{A}$
时间常数 $\tau=1/16(\text{S})$

代入三要素公式

$$i(t)=i(\infty)+[i(0^+)-i(\infty)]\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

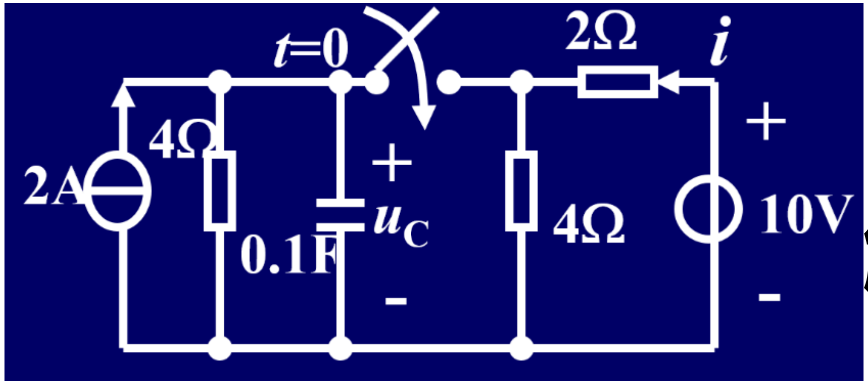
$$=4.5+[5-4.5]\cdot e^{-16t}$$

$$=4.5+0.5e^{-16t}\ \text{A}\quad t>0$$



(f) $i(t)$ 波形

例 电路原处于稳定状态。求$t≥0$的$u_C(t)$和$i(t)$，并画波形图。

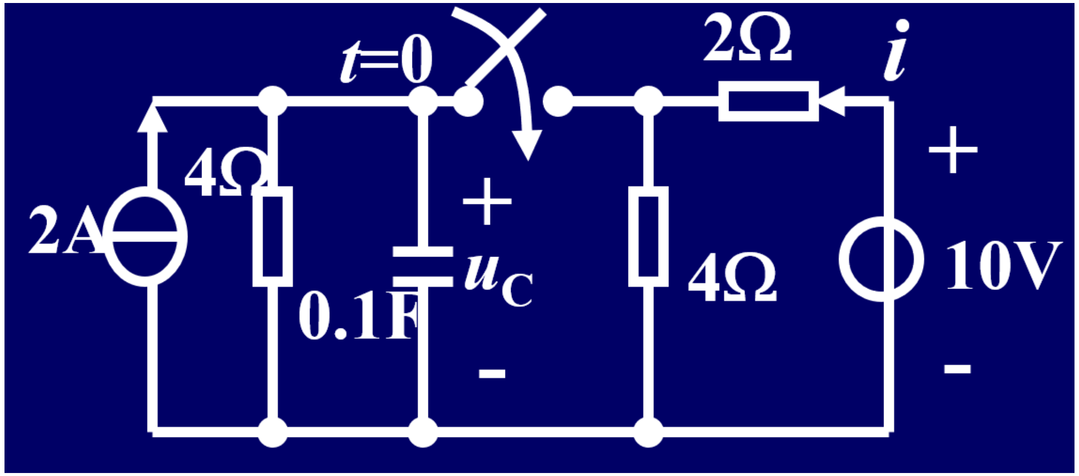


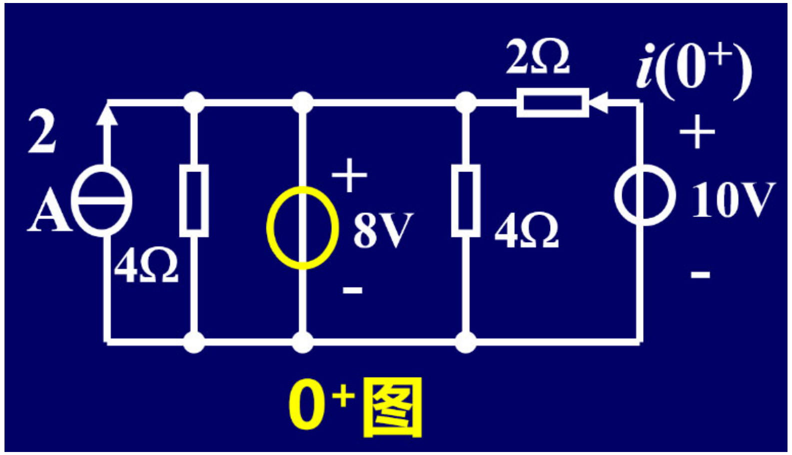
解：1、计算初始值$u_C(0^+)$、$i(0^+)$：

先求初始状态$u_C(0^-)$：开关闭合前，电路已稳定，电容相当于开路，则：

$$u_C(0^-) = 4 \times 2 = 8\text{V}$$

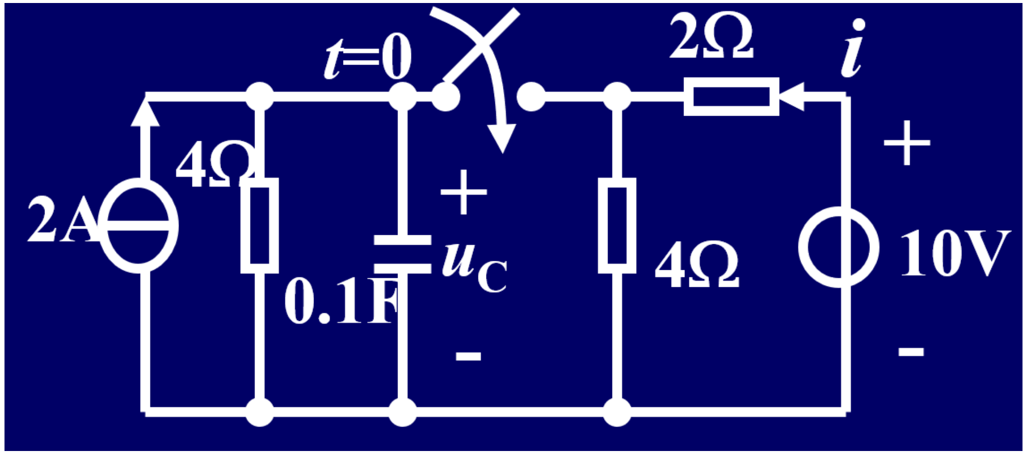
换路定则得 $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 8\text{V}$

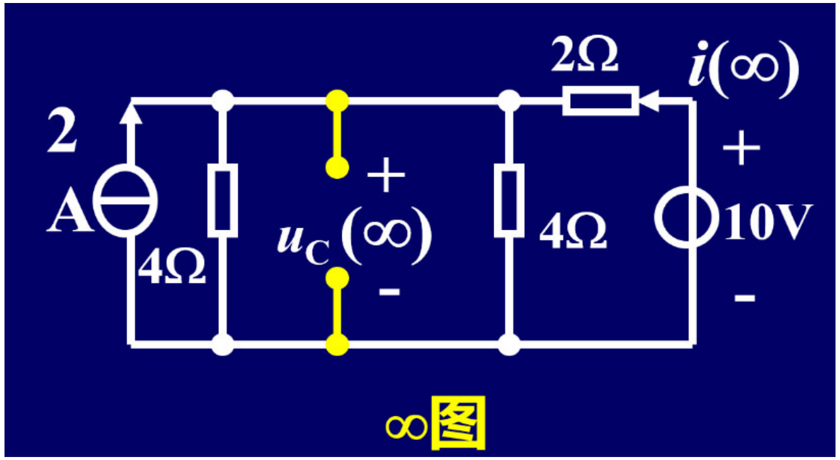




$$i(0^+) = \frac{10 - u_C(0^+)}{2} = \frac{10-8}{2} = 1\text{A}$$

2，计算稳态值$u_C(\infty)$、$i(\infty)$

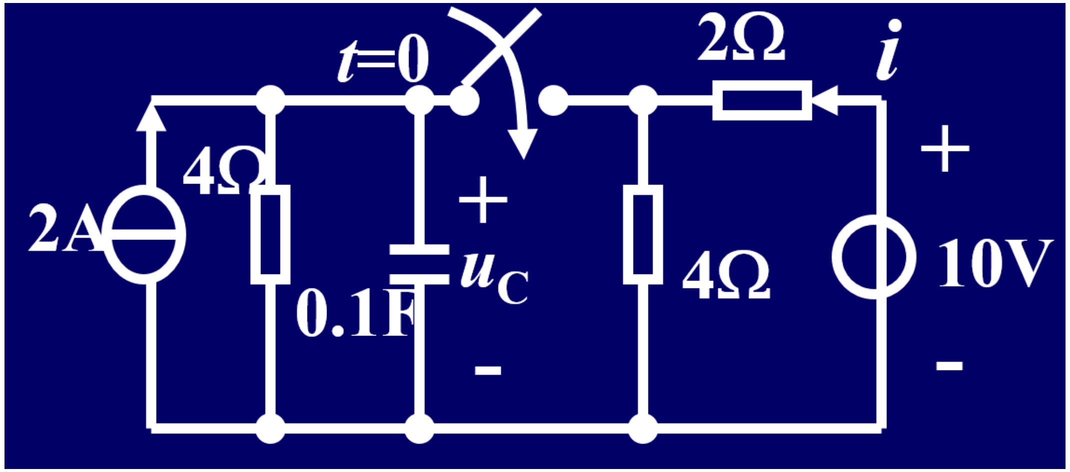


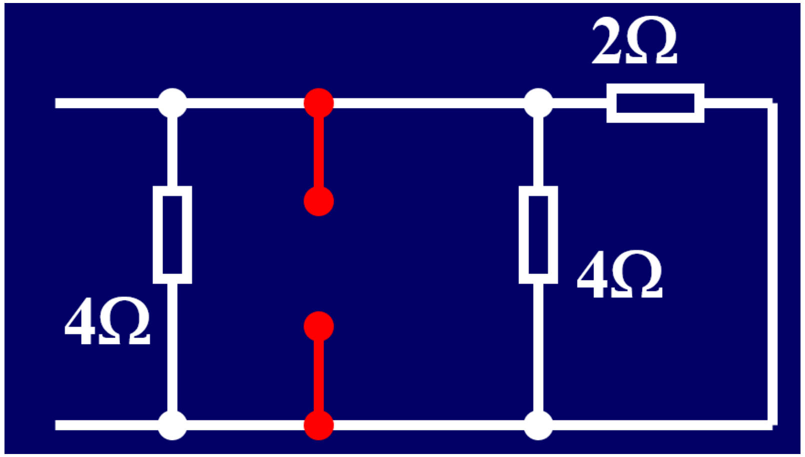


$$u_C(\infty)=(4//4//2)\times 2+\frac{4//4}{2+4//4}\times 10=2+5=7\text{V}$$

$$i(\infty)=\frac{10-u_C(\infty)}{2}=\frac{10-7}{2}=1.5\text{A}$$

3，计算时间常数τ



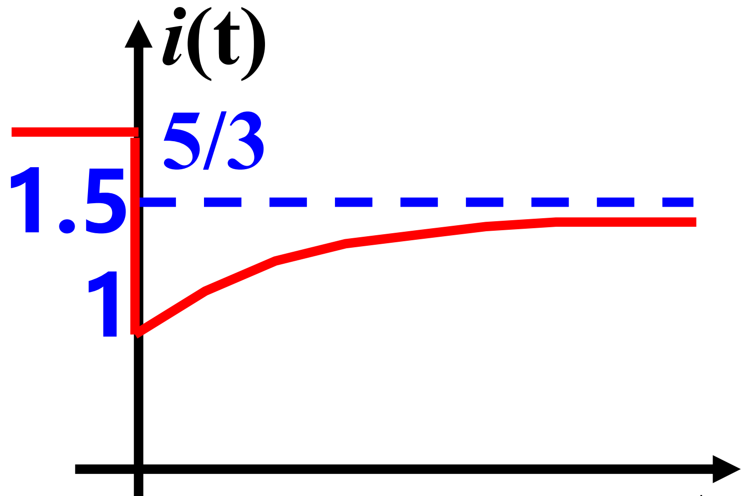


$$R_o = 4//4//2 = 1\Omega$$

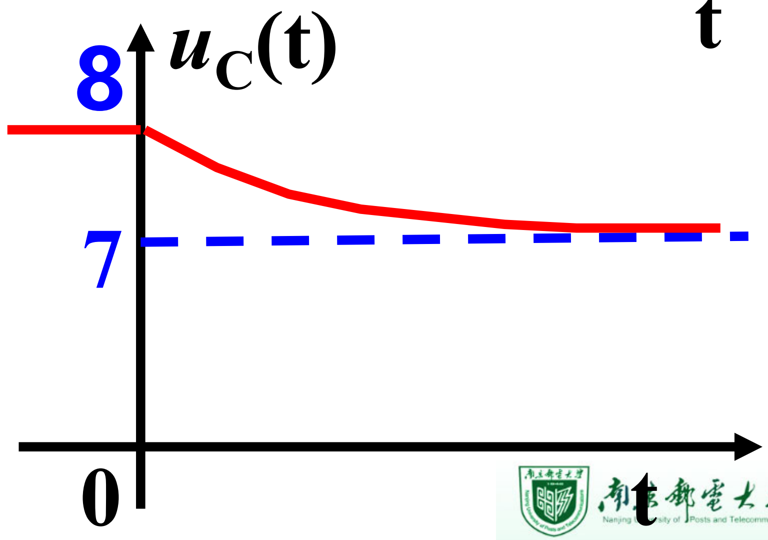
时间常数为 $\tau = R_o C = 1 \times 0.1 = 0.1\text{s}$

4，将初始值、终值及时间常数代入三要素公式，得到响应表达式：

$$i(t)=1.5+(1-1.5)\mathrm{e}^{-10t}=1.5-0.5\mathrm{e}^{-10t}\,\mathrm{A}\quad (t>0)$$

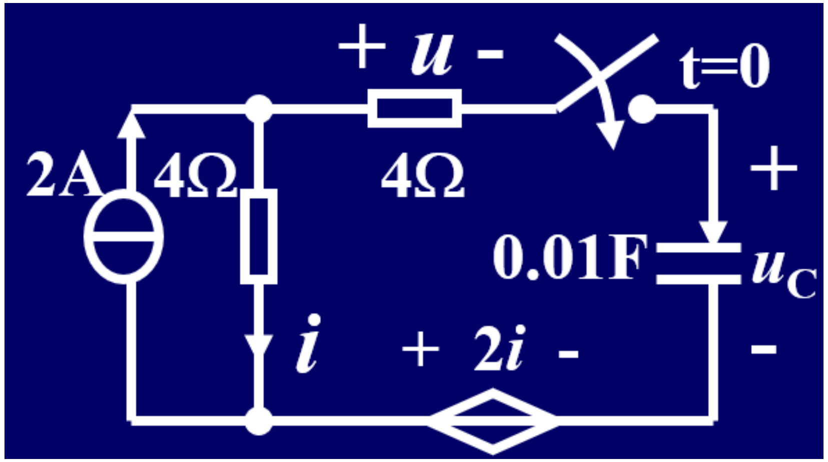


$$u_C(t)=7+(8-7)e^{-10t}=7+1e^{-10t}\,\mathrm{V}\qquad (t\geq 0)$$



例17 求$u(t)$和$i(t)$。

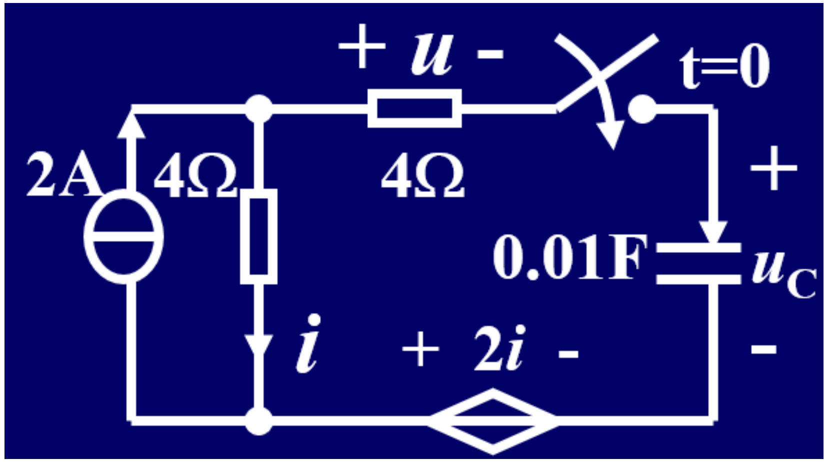
已知：$u_C(0^-)=0$

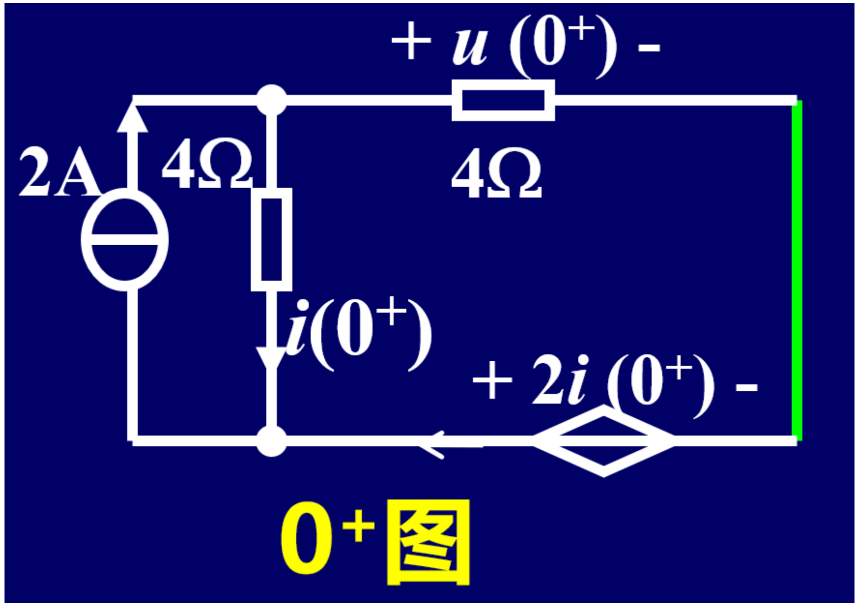


解：1、计算初始值$u(0^+)$、$i(0^+)$

零状态电路，由换路定则得：

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$$





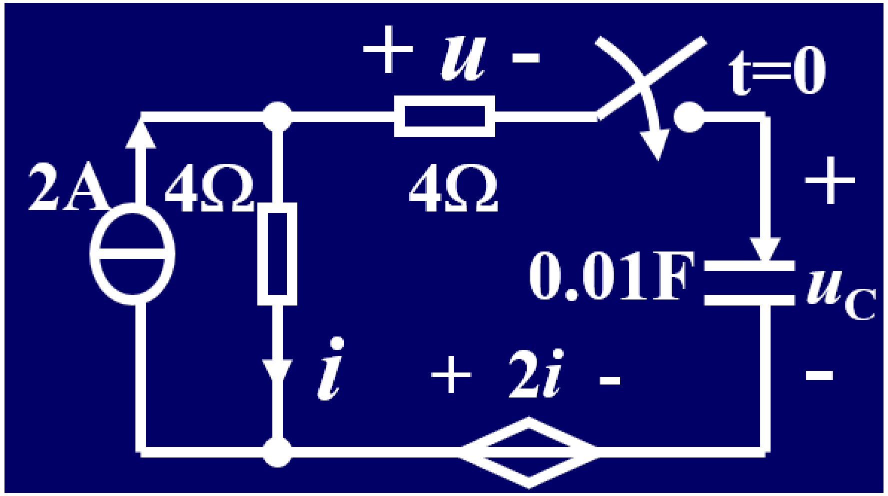
列KVL方程：

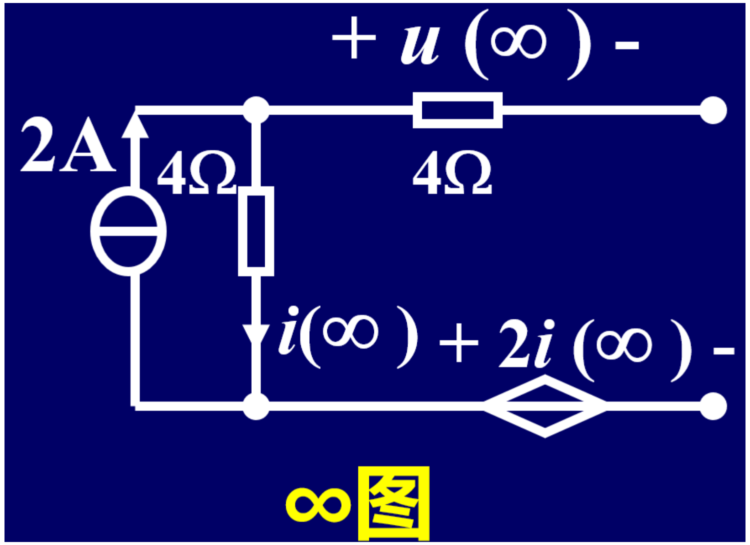
$$4[2-i(0^+)]-2i(0^+)-4i(0^+)=0$$

解得： $i(0^+)=0.8\text{A}$

则 $u(0^+)=4[2-i(0^+)]=4.8\text{V}$

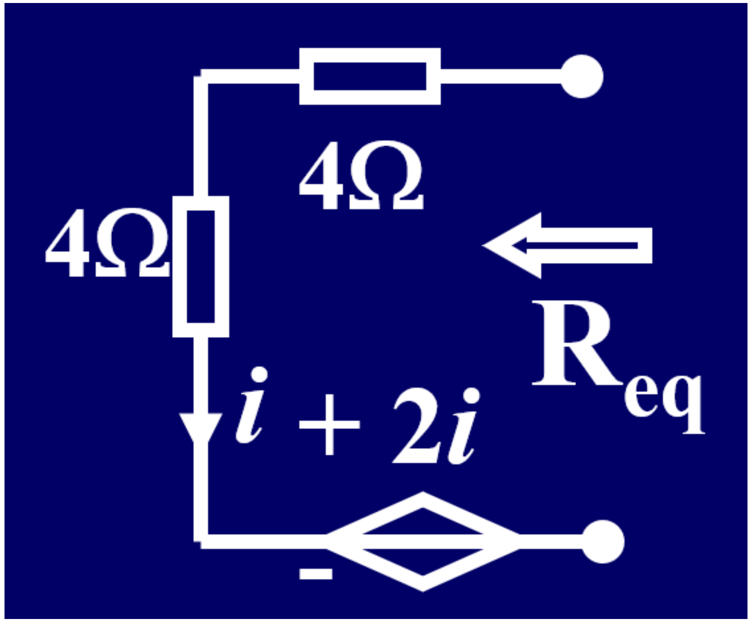
2，计算稳态值$u(\infty)$、$i(\infty)$





$$u(\infty)=0 \qquad i(\infty)=2\text{A}$$

3，计算时间常数τ



电容相连接的电阻网络如右图，用加压求流法得：

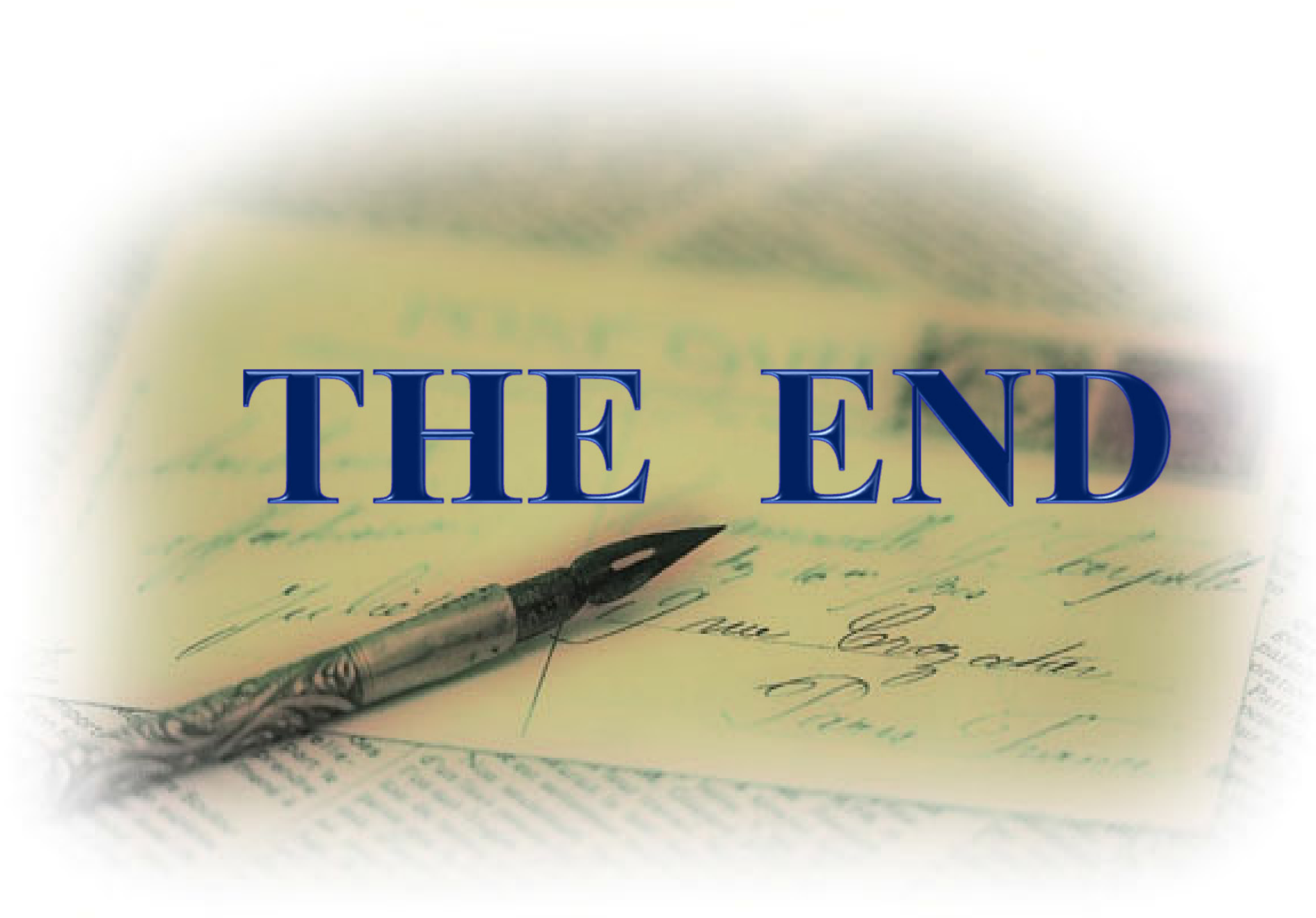
$$R_{eq} = 10\Omega$$

时间常数为 $\tau = R_{eq}C = 0.1s$

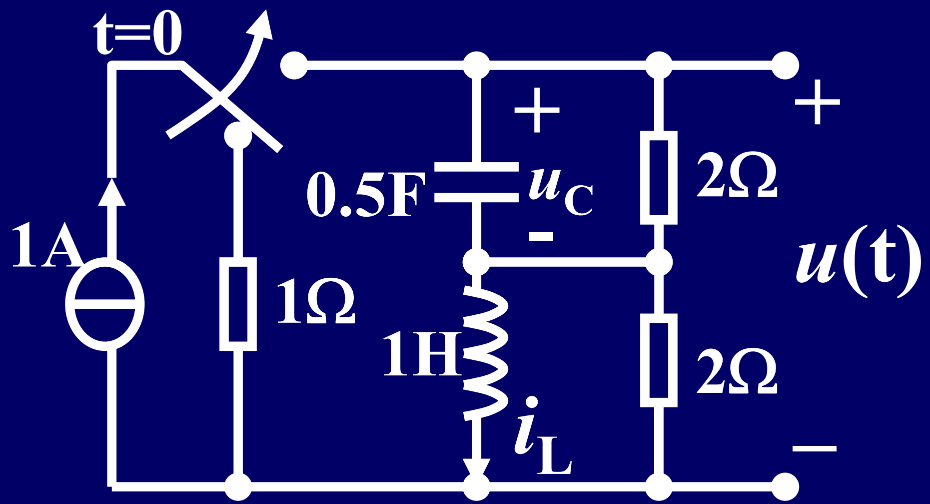
4、代入三要素公式得：

$$u(t) = 4.8e^{-10t}\text{V} \qquad (t > 0)$$

$$i(t) = 2 + (0.8 - 2)\mathrm{e}^{-10t} = 2 - 1.2\mathrm{e}^{-10t}\,\text{A} \quad (t > 0)$$


THE END

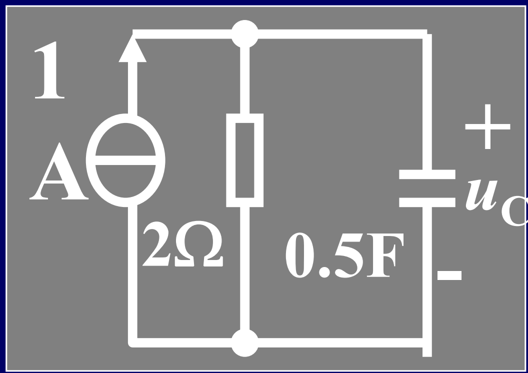
例18 求$u(t)$。已知： $u_C(0^-)=1\text{V}, i_L(0^-)=2\text{A}$

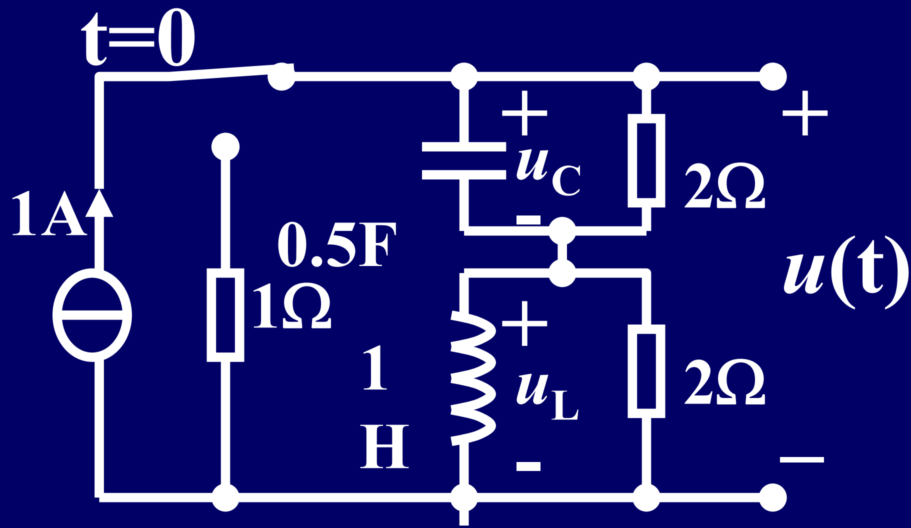


解：非一阶电路，但电路换路后可分成两部分分别求响应，然后迭加，即：

$$u(t)=u_C(t)+u_L(t)$$

RC部分：



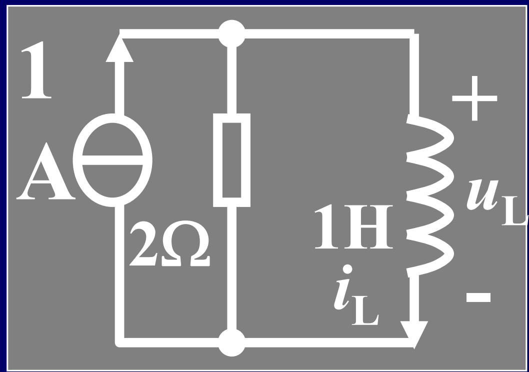


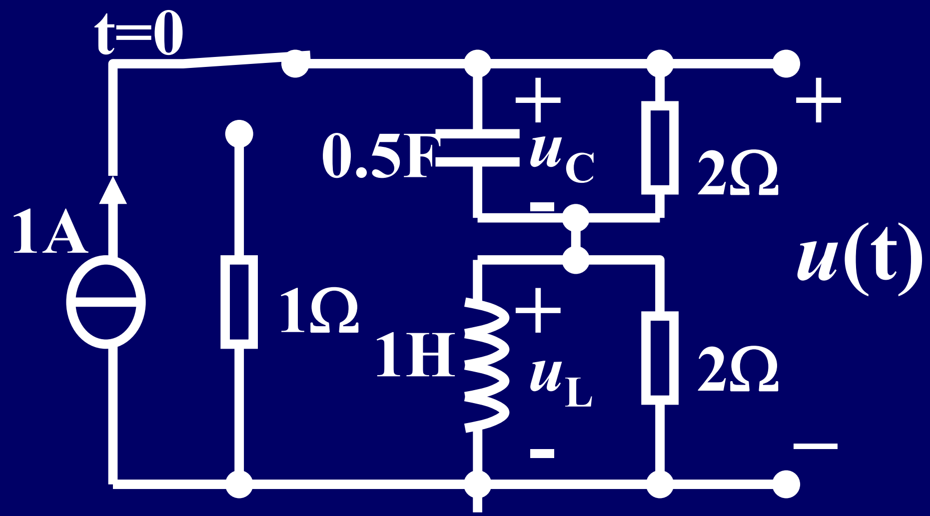
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 1\,\mathrm{V} \qquad u_C(\infty) = 2\,\mathrm{V}$$

$$R_0 = 2\Omega \qquad \therefore \tau_C = RC = 1\,\mathrm{s}$$

故有： $u_C(t) = 2 - \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{V} \quad t \geq 0$

RL部分：





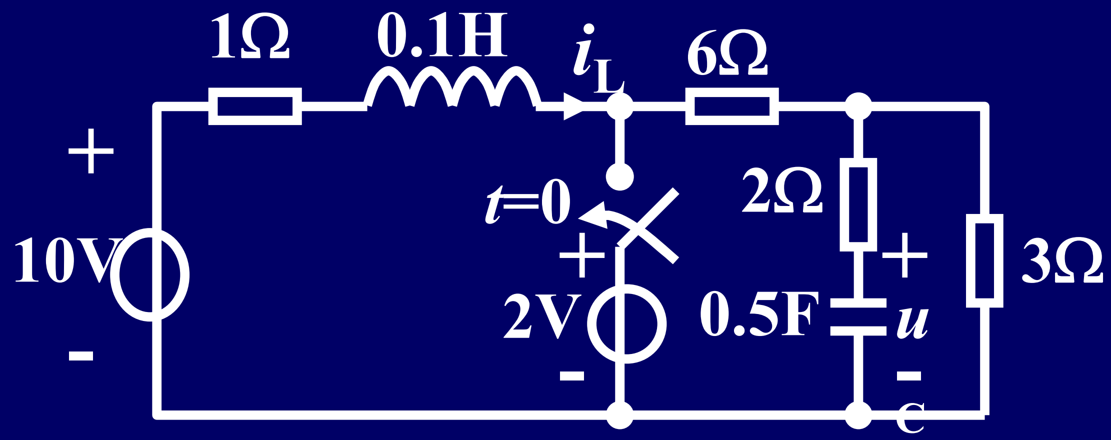
$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2\text{A}$ 故：

$u_L(0^+) = -2\,\text{V}$ $\qquad u_L(t) = -2e^{-2t}\ \text{V} \quad t>0$

$u_L(\infty) = 0$ $\qquad u(t) = u_C(t) + u_L(t)$

$\tau_L = L/R = \dfrac{1}{2}\text{s}$ $\qquad = 2 - e^{-t} - 2e^{-2t}\ \text{V} \quad t>0$

例20 原电路已稳定。求$t \geq 0$的$i_L(t)$和$u_C(t)$。

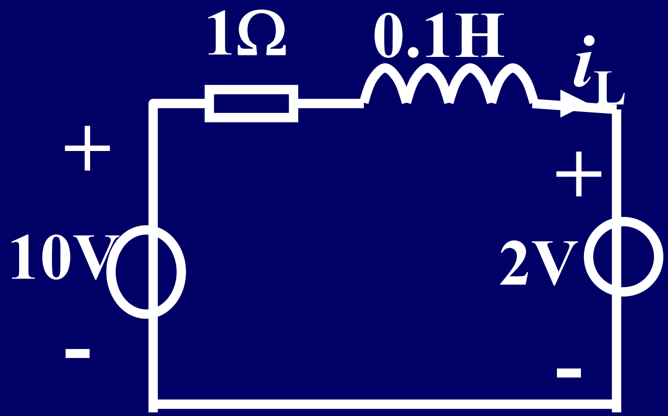


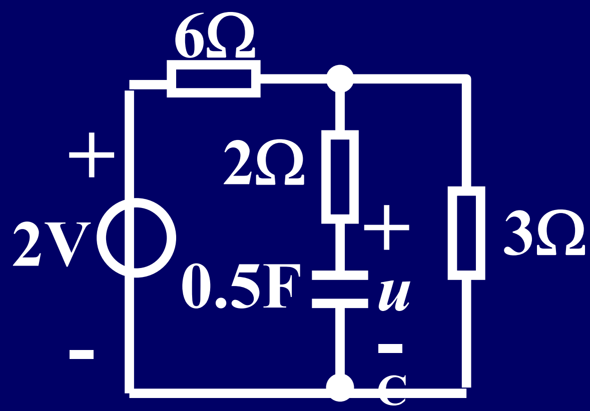
解：**1)求换路前的初始状态:**

电感L等效于短路，电容开路则:

$$i_L(0^-) = \frac{10}{1+6+3} = 1\text{A}; \quad u_C(0^-) = \frac{3}{1+6+3} \times 10 = 3\text{ V}$$

换路后，电路可分为两部分：





$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1A \qquad u_C(0^+) = u_C(0^-) = 3V$$

$$i_L(\infty) = 8\ \mathrm{A} \qquad u_C(\infty) = 2/3\ \mathrm{V}$$

$$\tau_L = L/R = 0.1\ \mathrm{s} \qquad \tau_C = RC$$

$$= (6 // 3 + 2) \times 0.5 = 2\ \mathrm{s}$$

所以 $\boldsymbol{i_{\mathrm{L}}(t) = 8 - 7\mathrm{e}^{-10t} V \quad t > 0}$

$$u_{\mathrm{C}}(t) = \frac{2}{3} + \frac{7}{3}\mathrm{e}^{-0.5t} V \quad t \geq 0$$

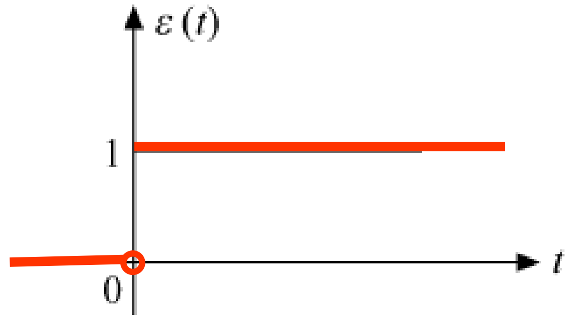
练习 P184 6-17

阶跃信号和阶跃响应

一、阶跃信号

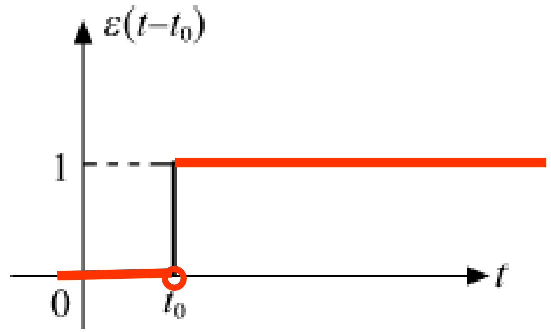
单位阶跃信号

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

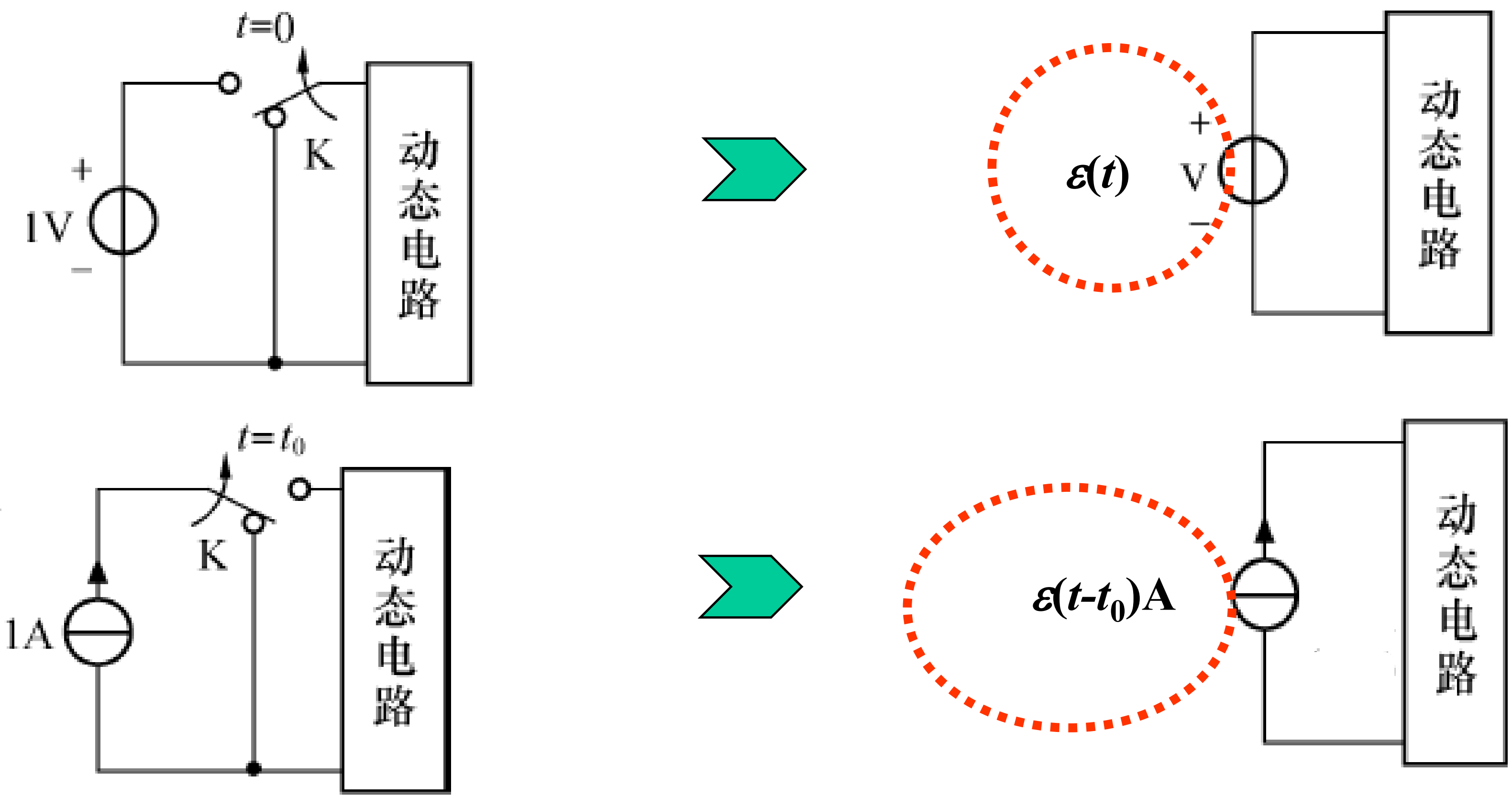


延迟单位阶跃信号

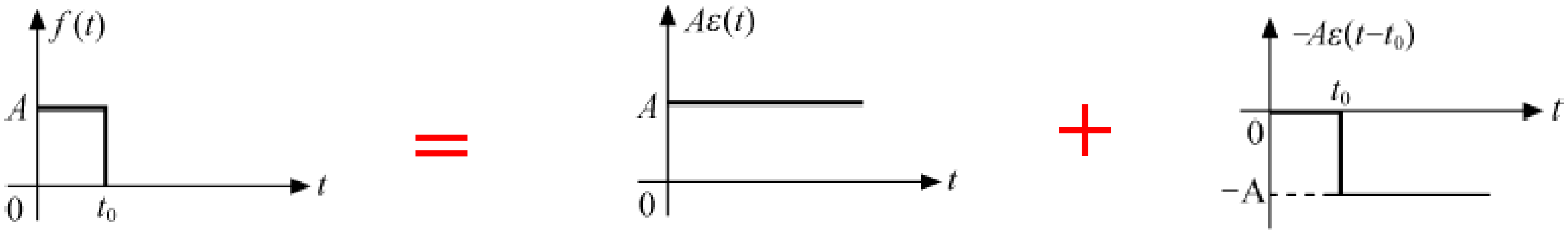
$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$



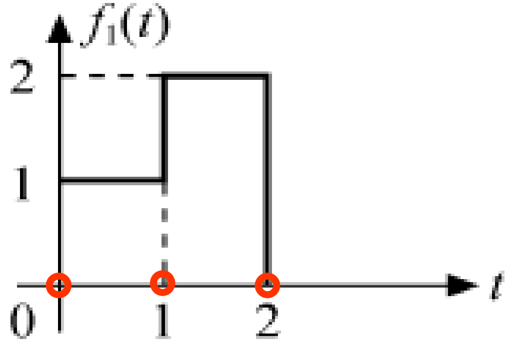
阶跃函数用途　　描述开关动作



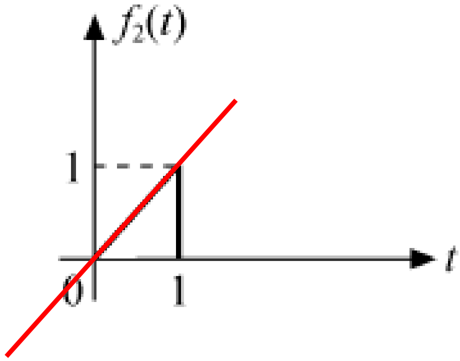
阶跃函数用途　描述各种信号



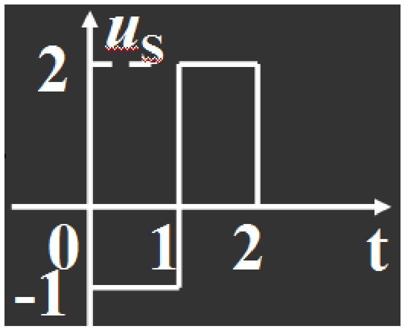
$$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t - t_0)$$



$$f_1(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)-2\varepsilon(t-2)$$



$$f_2(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$$

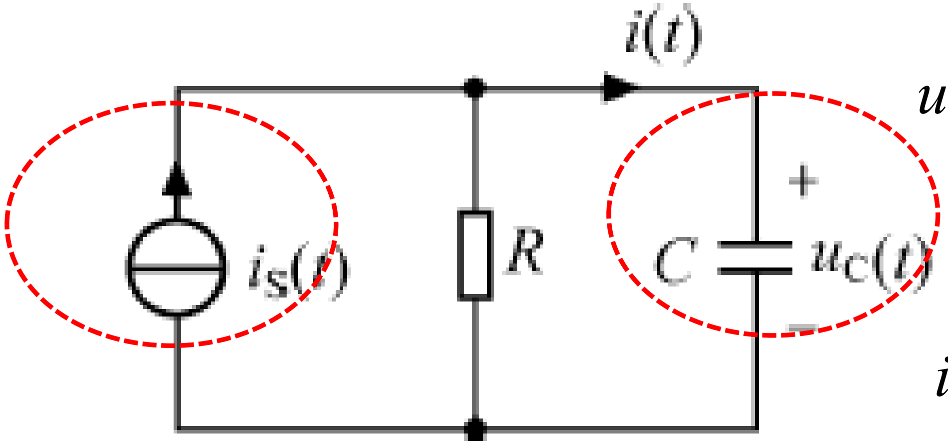


$$u_S(t)=-\varepsilon(t)+3\varepsilon(t-1)-2\varepsilon(t-2)$$

二、阶跃响应

单位阶跃响应 s(t)：零状态时电路在单位阶跃信号激励下的响应。

求下图中单位阶跃响应$u_c(t), i(t)$.



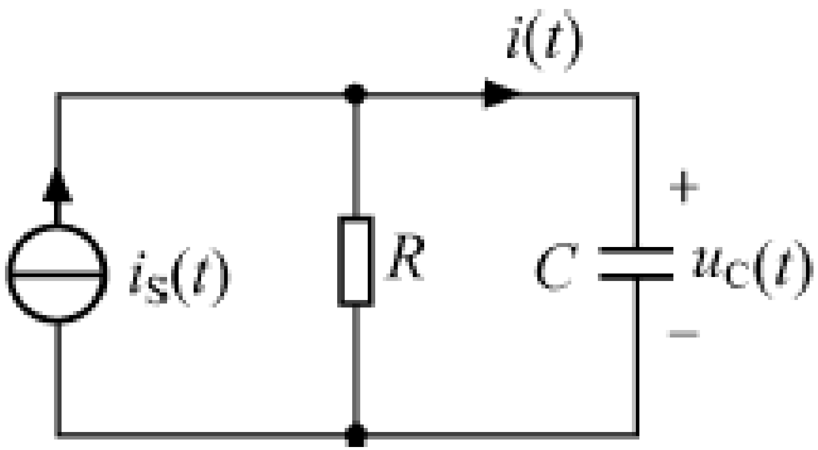
$u_C(t)$ ➜ 阶跃响应 s(t) $S_{u_C}(t)$

$i(t)$ ➜ 阶跃响应 s(t) $S_i(t)$

$$u_C(0^-) = 0$$

$$i_S(t) = \varepsilon(t)\mathrm{A}$$

利用三要素法求**阶跃响应** $s(t)$



$S_{u_C}(t)$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

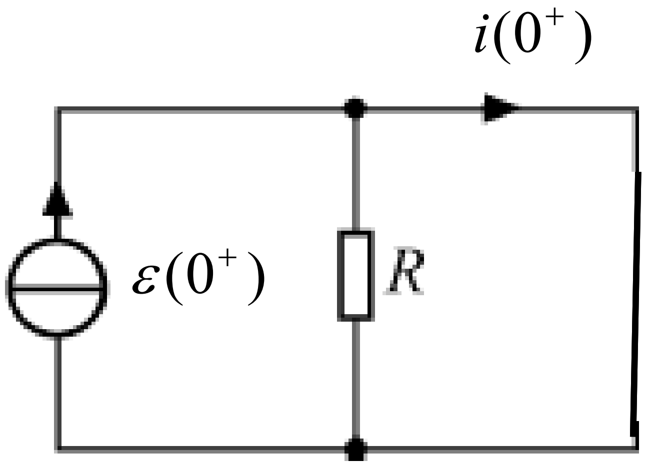
$$u_C(\infty) = R\cdot\varepsilon(\infty) = R$$

$$\tau = R\cdot C$$

$$u_c(t) = S_{u_C}(t) = R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

清楚表明整个时间域的响应，无须再标注t的范围

利用三要素法求阶跃响应



$S_i(t)$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

$$i(0^+) = \varepsilon(0^+) = 1$$

$$i(\infty) = 0$$

$$\tau = R \cdot C$$

$$i(t) = S_i(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

如果$i_s(t)$变为：(1) $i_s(t) = \varepsilon(t - t_0)$ 响应$i(t)$变为多少？

（2） $i_s(t) = A\varepsilon(t) - B\varepsilon(t - t_0)$

线性时不变电路

激励 → 响应

$i_s(t)=\varepsilon(t) \quad \Rightarrow \quad i(t)=S_i(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\mathrm{A}$

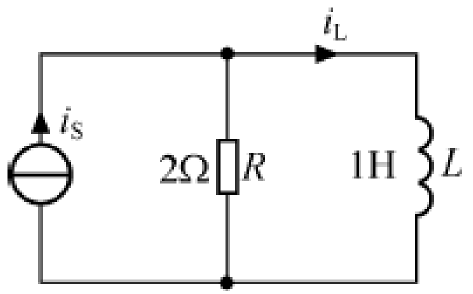
$i_s(t)=\mathrm{A}\varepsilon(t) \quad \Rightarrow \quad i(t)=\mathrm{A}S_i(t)=\mathrm{A}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\mathrm{A}$

$i_s(t)=\varepsilon(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad i(t)=S_i(t-t_0)=e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}}\varepsilon(t-t_0)\mathrm{A}$

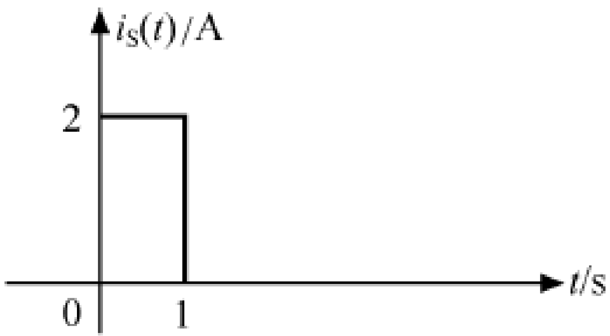
$i_s(t)=\mathrm{A}\varepsilon(t)-\mathrm{B}\varepsilon(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad i(t)=\mathrm{A}S_i(t)-\mathrm{B}S_i(t-t_0)$

A，*B*是常数

【例1】求图(a)所示电路在图(b)所示脉冲电流作用下的零状态响应i_{LZS}，并画出波形。



(a)



(b)

分析:求零状态响应i_{LZS}

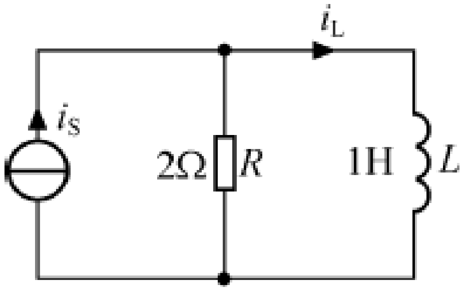
$$i_L(0^-)=0$$
$$i_S(t)=2\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)$$

$$i_{LZS}=2s_i(t)-2s_i(t-1)$$

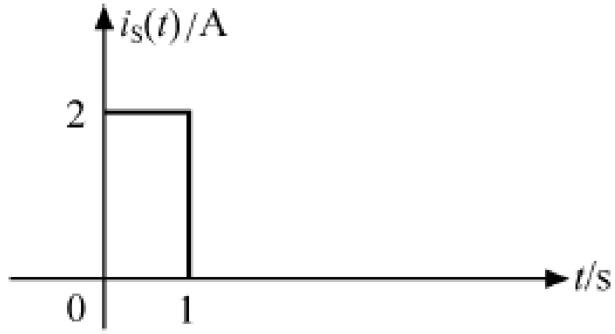
i_L的阶跃响应$s_i(t)$

$$i_L(0^-)=0$$
$$i_S(t)=\varepsilon(t)$$

$\Rightarrow$ $s_i(t)$



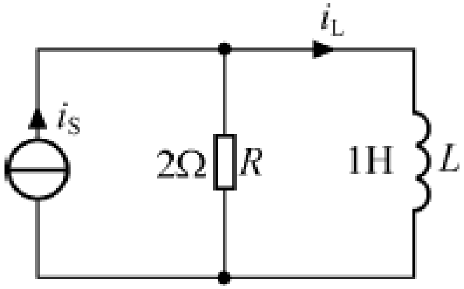
(a)



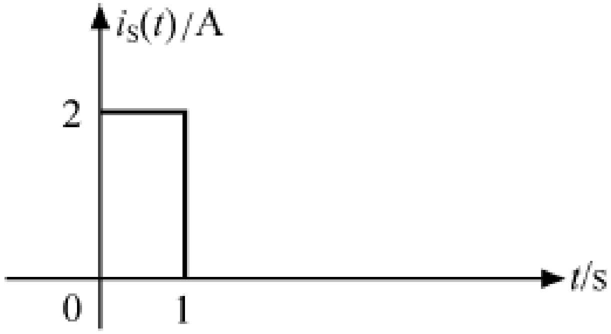
(b)

解：1.用阶跃函数表示(b)图所示的脉冲电流，

$$i_S(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)\,\mathrm{A}$$



(a)



(b)

2. 求阶跃响应$s_i(t)$ 令 $i_s(t)=\varepsilon(t)$, $i_L(0^-)=0$,根据三要素法

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=0 \qquad i_L(\infty)=1\text{A}$$

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{1}{2}\text{S}$$

$$S_i(t)=(1-e^{-2t})\varepsilon(t)\text{A}$$

3.根据电路的线性时不变性

$$\varepsilon(t) \Rightarrow \boxed{S_{\mathrm{i}}(t)} \qquad S_{\mathrm{i}}(t) = (1-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)\,\mathrm{A}$$

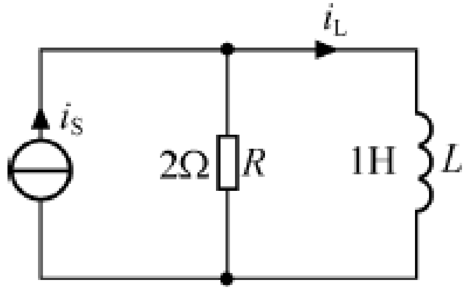
$$i_{\mathrm{S}}(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)\,\mathrm{A} \Rightarrow$$

$$i_{\mathrm{LZS}}(t) = 2S_{\mathrm{i}}(t) - 2S_{\mathrm{i}}(t-1)$$

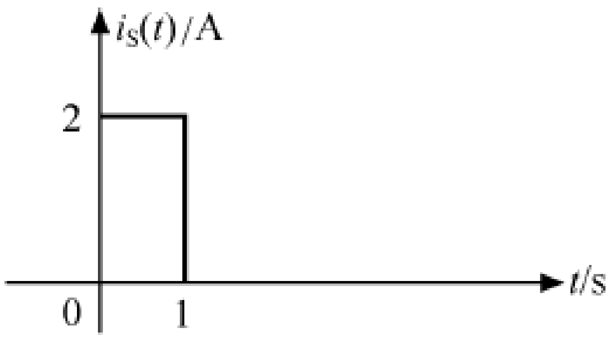
$$= 2(1-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t) - 2(1-\mathrm{e}^{-2(t-1)})\varepsilon(t\text{-}1)\ \ \mathrm{A}$$

【例2】求图(a)所示电路在图(b)所示脉冲电流作用下的响应i_L，已知 $i_L(0^-)=2A$ 。

全响应



(a)



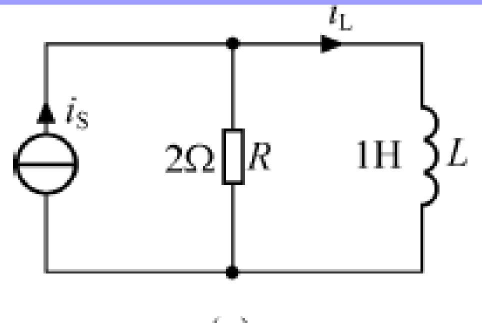
(b)

【例1】求图(a)所示电路在图(b)所示脉冲电流作用下的零状态响应i_{LZS}。

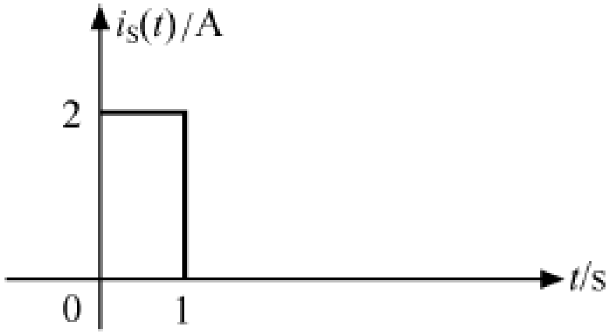
$$i_L(0^-)=0$$

$$i_S(t)=2\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)$$

【例2】求图(a)所示电路在图(b)所示脉冲电流作用下的响应i_L，已知 $i_L(0^-)=2A$ 。



(a)



(b)

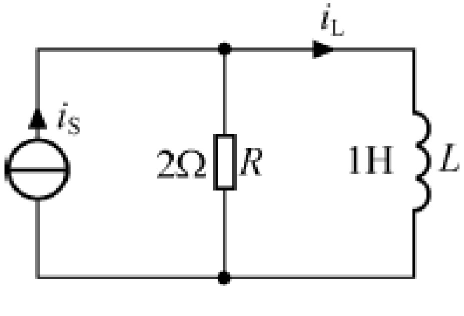
分析：全响应$i(t)$ ＝ 零状态响应$i_{LZS}(t)$ ＋ 零输入响应$i_{LZI}(t)$

$i_L(0^-)=2A$
$i_S(t)=2\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)$

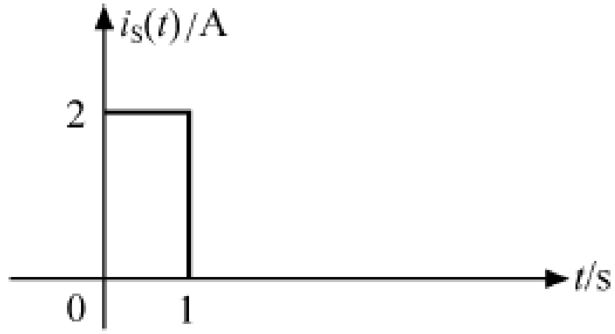
$i_L(0^-)=0$
$i_S(t)=2\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)$

$i_L(0^-)=2A$
$i_S(t)=0$

【例2】求图(a)所示电路在图(b)所示脉冲电流作用下的零状态响应i_{LZS} **（例1）**+在i_L（0-）=2A下的零输入响应



(a)



(b)

1. 求零输入响应$i_{LZI}(t)$　令 $i_s(t)=0$, i_L（0^-）$=2A$，根据三要素法

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2A \qquad i_L(\infty) = 0A$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{2}S$$

$$i_{LZI}(t) = 2e^{-2t}A, \qquad t > 0$$

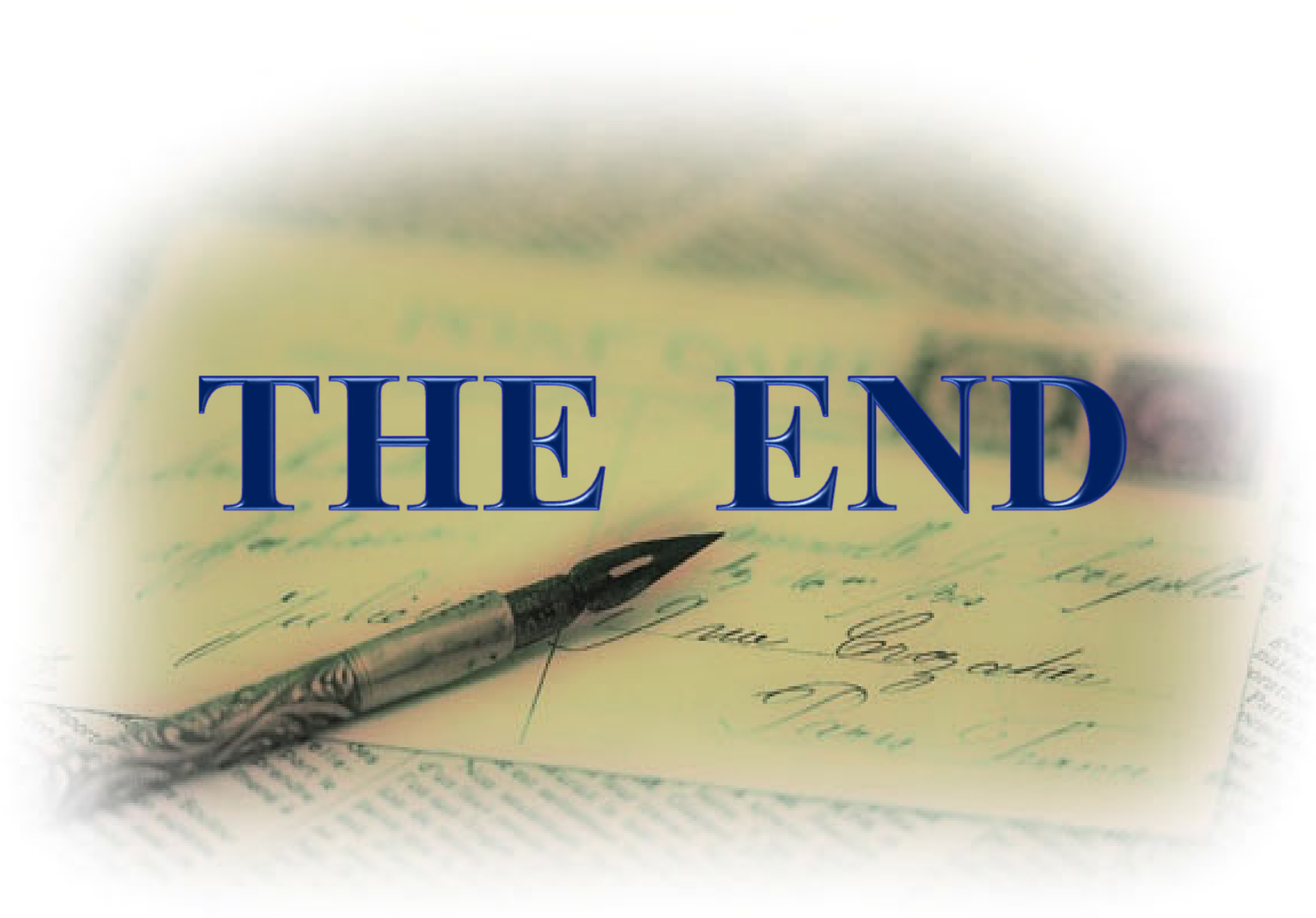
2. 根据例1得到的零状态响应$i_{LZS}(t)$

$$i_{\mathrm{LZS}}(t)=2(1-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)-2(1-\mathrm{e}^{-2(t-1)})\varepsilon(t\text{-}1)\ \ \mathrm{A}$$

3. 全响应$i(t)$

$$i(t)=i_{\mathrm{LZi}}(t)+i_{\mathrm{LZS}}(t)$$

$$=2\mathrm{e}^{-2t}+2(1-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)-2(1-\mathrm{e}^{-2(t-1)})\varepsilon(t\text{-}1)\ \ \mathrm{A} \qquad t>0$$



THE END