第一章作业

计算机学院
计算机科学与技术系

P8 (3) 设P 表示命题“天下雪”，Q 表示命题“我将去镇上”，R 表示命题“我有时间”。以符号形式写出下列命题：

a）如果天不下雪和我有时间，那么我将去镇上。

b）我将去镇上，仅当我有时间。

c）天不下雪

d）天下雪，那么我不去镇上

解：(a) $(\neg P \wedge R) \rightarrow Q$

(b) ⑴"仅当"表示必要条件，有：$Q \rightarrow R$ （本题正确答案）

⑵"当"表示充分条件，有：$R \rightarrow Q$

⑶"当且仅当"表示充要条件，有：R □ Q

(c) $\neg P$

(d) $P \rightarrow \neg Q$

P8-5

- a) 王强身体很好，成绩也很好

  P: 王强身体很好。 Q: 王强成绩很好。

  $\mathbf{P \wedge Q}$

b) 小李一边看书，一边听音乐

  P: 小李看书。 Q: 小李听音乐。

  $\mathbf{P \wedge Q}$

c) 气候很好或很热

  P:气候很好。 Q:气候很热。

  答案一：$\mathbf{(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)}$

  答案二：$\mathbf{\neg (P \leftrightarrows Q)}$

P8-5

d) 如果a和b是偶数，则a+b是偶数

答案一（最佳答案）：

P: a是偶数。 Q: b是偶数。R: a+b是偶数

$$P \wedge Q \rightarrow R$$

答案二（?）：P: a和b是偶数。 Q: a+b是偶数。

$$P \rightarrow Q$$

e) 四边形ABCD是平行四边形，当且仅当它的对边平行

P: 四边形ABCD是平行四边形。

Q: 四边形ABCD的对边平行。

$$P \leftrightarrow Q$$

P8-5

- 停机的原因在于语法错误或程序错误

  答案一：P: 停机的错误在于语法错误

  Q: 停机的错误在于程序错误

  $\mathbf{P \vee Q}$

  答案二（？）：P: 语法错误。 Q: 程序错误。R: 停机

  $(P \vee Q) \rightarrow R$

P12-7

a) 假如上午不下雨，我去看电影；否则就在家里读书或看报。

P: 上午下雨。　Q: 我去看电影。

R: 我在家读书。 R: 我在家看报。

$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow (R \vee S))$

b) 我今天进城，除非下雨。

P: 我今天进城。　Q: 今天下雨。

$\neg Q \rightarrow P$ 或 $\neg P \rightarrow Q$

c) 仅当你走，我将留下。

P: 你走。　Q: 我留下。

$Q \rightarrow P$

P17-1 b) $(P \wedge R) \vee (P \rightarrow Q)$的真值表

P	Q	R	$P \wedge R$	$P \rightarrow Q$	$(P \wedge R) \vee (P \rightarrow Q)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T

P17-1 d) $(P \vee \neg Q) \wedge R$ 的真值表

P	Q	R	¬Q	P ∨¬Q	(P ∨¬Q) ∧ R
T	T	T	F	T	F
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T

P19-7 a)

试证 $A \to (B \to A) \Leftrightarrow \neg A \to (A \to \neg B)$

证明：$A \to (B \to A)$

$$\Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee A)$$

$$\Leftrightarrow A \vee (\neg A \vee \neg B)$$

$$\Leftrightarrow A \vee (A \to \neg B)$$

$$\Leftrightarrow \neg A \to (A \to \neg B)$$

注意

1、左右两个命题实为永真命题；

2、注意区别“=”与“⇔”，数理逻辑里面并不存在“=”符号；

3、本题也可以用真值表或者左右两边同时推证。

P19-7 b)

试证 $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$

$\neg(A \leftrightarrow B)$

$\Leftrightarrow \neg((A \to B) \wedge (B \to A))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B) \vee (B \wedge A))$

$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$

注意

1、本题可以用真值表或左右两边同时推证；

2、注意区别“=”与“$\Leftrightarrow$”，数理逻辑里面并不存在“=”符号。

P19-7 e) $(((A \wedge B \wedge C) \rightarrow D) \wedge (C \rightarrow (A \vee B \vee D))) \Leftrightarrow ((C \wedge (A \leftrightarrow B)) \rightarrow D)$

左边 $\Leftrightarrow ((\neg(A \wedge B \wedge C) \vee D) \wedge (\neg C \vee (A \vee B \vee D)))$

$\Leftrightarrow ((\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg C \vee A \vee B \vee D))$

$\Leftrightarrow (\neg C \vee D) \vee ((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$

$\Leftrightarrow (\neg C \vee D) \vee ((\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge A))$

$\Leftrightarrow (\neg C \vee D) \vee \neg((A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A))$

$\Leftrightarrow (\neg C \vee D) \vee \neg((B \rightarrow A) \vee (A \rightarrow B))$

$\Leftrightarrow \neg C \vee \neg(A \leftrightarrow B) \vee D$

$\Leftrightarrow \neg(C \wedge (A \leftrightarrow B)) \vee D$

$\Leftrightarrow (C \wedge (A \leftrightarrow B)) \rightarrow D$

注意

1、本题可以用真值表或者左右两边同时推证；

2、注意区别“=”与“$\Leftrightarrow$”，数理逻辑里面并不存在“=”符号。

P23-1c)

试证 $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$为重言式

证明：

因为 $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \Rightarrow (P \to R)$

所以$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$是重言式

此证法不妥！ 可用真值表法或者等价推理方式证明

P23-1c)

试证 $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$为重言式

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$	$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T

从上述真值表可以看出，对于命题分量P、Q、R的所有真值指派，命题$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$的真值均为T，因此该命题为重言式。

P23-2a) 不构造真值表证明蕴含式

$$(P \to Q) \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$$

证法1：设$P \to Q$为T, 则

1) P为T,Q为T, 所以$P \wedge Q$为T,所以$P \to P \wedge Q$为T

2)P为F, 则$P \to P \wedge Q$为T

证法2：设$P \to (P \wedge Q)$为F, 则P为T,$P \wedge Q$为F

则必有P为T, Q为F, 所以$\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$为F.

P23-8 e) 逻辑推证

$\neg A \rightarrow (B \vee C), D \vee E, (D \vee E) \rightarrow \neg A \Rightarrow B \vee C$

证明：

假定$\neg A \rightarrow (B \vee C), D \vee E, (D \vee E) \rightarrow \neg A$ 为T,

则因为$(D \vee E) \rightarrow \neg A$ 和$D \vee E$为T,

必有$\neg A$ 为T,

又$\neg A \rightarrow (B \vee C)$为T, 所以$B \vee C$为T

第二章作业与习题

P59-1

a) 小张不是工人。

a:小张　W(x): x是工人。　$\neg W(a)$

b) 他是田径或球类运动员。

S(x):x是田径运动员, B(x):x是球类运动员, h:他

$S(h) \vee B(h)$

c) 小莉是非常聪明和美丽的。

C(x):x是聪明的，B(x):x是美丽的，a:小莉

$C(a) \wedge B(a)$

d) 若m是奇数，则2m不是奇数。

O(x):x是奇数。$O(m) \rightarrow \neg O(2m)$

P59-1

e) 每一个有理数是实数。

R(x): x是实数，Q(x):x是有理数。

$(\forall x)(R(x)\rightarrow Q(x))$

f) 某些实数是有理数。

$(\exists x)(R(x) \wedge Q(x))$

g) 并非每一个实数都是有理数。

$\neg(\forall x)(R(x)\rightarrow Q(x))$

h) 直线A与直线B平行当且仅当A与B不相交。

P(x,y):直线x平行与直线y, G(x,y):直线x与直线y相交。

$P(A,B)\leftrightarrow \neg G(A,B)$

P59-2

a) 所有教练员是运动员。

J(x): x是教练员, L(x): x是运动员

$(\forall x)(J(x)\rightarrow L(x))$

b) 某些运动员是大学生. (L(x), S(x): x是大学生)

$(\exists x)(L(x) \wedge S(x))$

c) 某些教练员是年老的, 但是健壮的.(O(x),V(x))

$(\exists x)(J(x)\wedge O(x)\wedge V(x))$

d) 金教练既不年老但也不是健壮的.

j:金教练 $\neg O(j) \wedge \neg V(j)$

练习 P59-2

e) 不是所有运动员都是教练. (L(x),J(x))

$\neg(\forall x)(L(x) \rightarrow J(x))$

f) 某些大学生运动员是国家选手.

(S(x), L(x),C(x))

$(\exists x)(S(x) \wedge L(x) \wedge C(x))$

g) 没有一个国家选手不是健壮的. (C(x),V(x))

$\neg(\exists x)(C(x) \wedge \neg V(x))$

h) 所有老的国家选手都是运动员.(O(x),C(x),L(x))

$(\forall x)(O(x) \wedge C(x) \rightarrow L(x))$

练习 P59-2

i) 没有一位女同志既是国家选手又是家庭妇女。

$(W(x),C(x),H(x))$　　$\neg(\exists x)(W(x)\wedge C(x)\wedge L(x))$

j) 有些女同志既是教练员又是国家选手。

$W(x),J(x),C(X)$　　$(\exists x)(W(x)\wedge J(x)\wedge C(x))$

k) 所有运动员都钦佩某些教练。$(A(x,y))$

$(\forall x)(L(x)\rightarrow (\exists y)(J(y)\wedge A(x,y)))$

l) 有些大学生不钦佩运动员。$(S(x),L(x),A(x,y))$

$(\exists x)(S(x)\wedge (\forall y)(L(y)\rightarrow \neg A(x,y)))$

P62-3

a) 如果有限个数的乘积等于零，那么至少有一个因子等于零。

N(x):x是有限个数的乘积，Z(x):x等于零，F(x):x是乘积中的一个因子。

$(\forall x)(N(x) \wedge Z(x) \rightarrow (\exists y)(F(y) \wedge Z(y)))$

b) 对于每一个实数x,存在一个更大的实数y。

R(x):x是实数，G(x,y):x大于y，

$(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(R(y) \wedge G(y,x))$

c) 存在实数x,y和z,使得x与y之和大于x与z之积。

R(x):x是实数，G(x,y):x大于y，

$(\exists x) (\exists y) (\exists z)(R(x) \wedge R(y) \wedge R(z) \wedge G(x+y,x\cdot y))$

P71 2-5 (1) b (2) a

- **见教材和板书**

P79-1 证明下列各式

$$a)(\forall x)(\neg A(x) \to B(x)), (\forall x)\neg B(x) \Rightarrow (\exists x)A(x)$$

证明

$(1)(\forall x)(\neg A(x) \to B(x))$	P
$(2)\neg A(u) \to B(u)$	$US(1)$
$(3)(\forall x)\neg B(x)$	P
$(4)\neg B(u)$	$US(3)$
$(5)\neg B(u) \to A(u)$	$T(2)$
$(6)A(u)$	$T(4)(5)$
$(7)(\exists x)A(x)$	$EG(6)$

P79-2 用CP规则证明

$a)(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

证明

$1)(\forall x)P(x)$	P附加前提
$2)P(u)$	$ES1)$
$3)(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$	P
$4)P(u) \rightarrow Q(u)$	$ES3)$
$5)Q(u)$	$T2)4)$
$6)(\forall x)Q(x)$	$UG5)$
$7)(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$	CP

P79-3 符号化下列命题并推证其结论

a)所有有理数是实数，某些有理数是整数，因此某些实数是整数。

证明 令 **R(x): x是实数, Q(x): x是有理数, I(x): x是整数。**

命题符号化为:

$$前提: (\forall x)(Q(x) \to R(x)), (\exists x)(Q(x) \wedge I(x))$$

$$结论: (\exists x)(R(x) \wedge I(x))$$

前提: $(\forall x)(Q(x) \to R(x)), (\exists x)(Q(x) \wedge I(x))$

结论: $(\exists x)(R(x) \wedge I(x))$

1)	$(\exists x)(Q(x) \wedge I(x))$	P
2)	$Q(c) \wedge I(c)$	$ES1)$
3)	$(\forall x)(Q(x) \to R(x))$	P
4)	$Q(c) \to R(c)$	$US3)$
5)	$Q(c)$	$T2)$
6)	$R(c)$	$T4)5)$
7)	$I(c)$	$T2)$
8)	$R(c) \wedge I(c)$	$T6)7)$
9)	$(\exists x)(R(x) \wedge I(x))$	$EG8)$

P79-3 符号化下列命题并推证其结论

b)任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车，每一个人或者喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车，因而有的人不爱步行。

证明 令 **P(x): x**喜欢步行, **Q(x): x**喜欢乘汽车, **R(x): x**喜欢骑自行车.

命题符号化为:

前提: $(\forall x)(P(x) \to \neg Q(x)), (\forall x)(Q(x) \vee R(x)),$
$(\exists x)\neg R(x)$

结论: $(\exists x)\neg P(x)$

前提: $(\forall x)(P(x)\to\neg Q(x)),(\forall x)(Q(x)\vee R(x)),$
$(\exists x)\neg R(x)$

结论: $(\exists x)\neg P(x)$

$1)(\exists x)\neg R(x)$	P
$2)\neg R(c)$	$ES1)$
$3)(\forall x)(Q(x)\vee R(x))$	P
$4)Q(c)\vee R(c)$	$US3)$
$5)Q(c)$	$T2)4)$
$6)(\forall x)(P(x)\to\neg Q(x))$	P
$7)P(c)\to\neg Q(c)$	$US5)$
$8)\neg P(c)$	$T5)7)$
$9)(\exists x)\neg P(x)$	$EG8)$

P79-3 符号化下列命题并推证其结论

c)每个大学生不是文科学生就是理工科学生，有的大学生是优等生，小张不是理工科学生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科学生。

证明 令 **G(x): x是大学生, L(x): x是文科学生，P(x): x是理工科学生，S(x):x是优秀生，c:小张.命题符号化为:**

前提：$(\forall x)(G(x) \to L(x) \vee P(x))$,

$(\exists x)(G(x) \wedge S(x))$, $\neg P(c)$, $S(c)$

结论：$G(c) \to L(c)$

前提： $(\forall x)(G(x) \to L(x) \vee P(x))$,
$(\exists x)(G(x) \wedge S(x))$, $\neg P(c) \wedge S(c)$

结论：$G(c) \to L(c)$

1) $G(c)$	P（附加前提）
2) $(\forall x)(G(x) \to L(x) \vee P(x))$	P
3) $G(c) \to L(c) \vee P(c)$	US 2)
4) $L(c) \vee P(c)$	T 1)3)
5) $\neg P(c)$	P
6) $L(c)$	T 4)5)
7) $G(c) \to L(c)$	CP

第三章 作业

P86-4 判断下列命题是否为真

a)如果$A\in B$及$B\subseteq C$，则$A\in C$。

- 真。

c)如果$A\subseteq B$及$B\in C$，则$A\in C$。

- 假。例如，$A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$,$C=\{\{a,b\}\}$

e)如果$A\in B$及$B\nsubseteq C$，则$A\notin C$。

- 假。例如，$A=\{a\}$,$B=\{\{a\},b\}$,$C=\{\{a\}\}$

P86-6 确定下列集合的幂集

$$a)P(\{a,\{a\}\})=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$$

$$b)P(\{\{1,\{2,3\}\}\})=\{\varnothing,\{\{1,\{2,3\}\}\}\}$$

$$c)P(\{\varnothing,a,\{b\}\})=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{b\}\},$$

$$\{\varnothing,a\},\{\varnothing,\{b\}\},\{a,\{b\}\},$$

$$\{\varnothing,a,\{b\}\}\}$$

P86-6 确定下列集合的幂集

$$d)P(P(\varnothing)) = P\{\{\varnothing\}\}$$

$$= \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$e)P(P(P(\varnothing))) = P(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$$

$$= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

P87-10

- $B_{17}=B_{00010001}=\{a_4,a_8\}$
- $B_{31}=B_{00011111}=\{a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}$
- $\{a_2,a_6,a_7\}=B_{01000110}=B_{70}$
- $\{a_1,a_6,a_8\}=B_{10000001}=B_{129}$

P95-5 证明

$$a)(A-B)-C=A-(B\cup C)$$

证明： 对任意x,

$$x\in(A-B)-C$$

$$\Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge x\notin C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A-(B\cup C)$$

所以$(A-B)-C=A-(B\cup C)$

P95-6 确定以下各式

$$\varnothing \cap \{\varnothing\} = \varnothing$$

$$\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$$

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \varnothing = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\varnothing\} = \{\{\varnothing\}\}$$

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing\}$$

P95-11 $a) A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

$$(A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

$$= ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A \cap C) - (A \cap B))$$

$$= ((A \cap B) \cap \sim (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \cap \sim (A \cap B))$$

$$= ((A \cap B) \cap (\sim A \cup \sim C)) \cup ((A \cap C) \cap (\sim A \cup \sim B))$$

$$= (A \cap B \cap \sim A) \cup (A \cap B \cap \sim C)$$

$$\cup (A \cap C \cap \sim A) \cup (A \cap C \cap \sim B)$$

$$= (A \cap B \cap \sim C) \cup (A \cap C \cap \sim B)$$

$$= A \cap ((B \cap \sim C) \cup (C \cap \sim B))$$

$$= A \cap ((B - C) \cup (C - B))$$

$$= A \cap (B \oplus C)$$

P104-1

- **设A={0,1},B={1,2},确定下面集合:**

$$A^2 \times B = \{<0,0>,<0,1>,<1,0>,<1,1>\} \times \{1,2\}$$

$$= \{<<0,0>,1>,<<0,1>,1>,<<1,0>,1>,<<1,1>,1>,$$

$$<<0,0>,2>,<<0,1>,2>,<<1,0>,2>,<<1,1>,2>\}$$

$$= \{<0,0,1>,<0,1,1>,<1,0,1>,<1,1,1>,$$

$$<0,0,2>,<0,1,2>,<1,0,2>,<1,1,2>\}$$

P105-2

- **设A={a,b},构成集合P(A) × A**

$$P(A)\times A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\times\{a,b\}$$

$$=\{<\varnothing,a>,<\varnothing,b>,$$

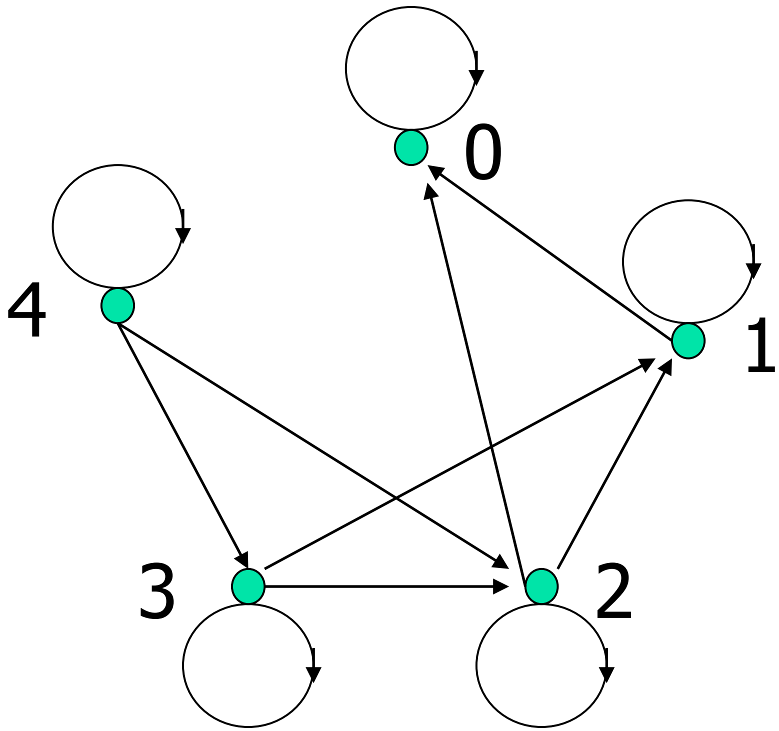
$$<\{a\},a>,<\{a\},b>,$$

$$<\{b\},a>,<\{b\},b>,$$

$$<\{a,b\},a>,<\{a,b\},b>\}$$

P110-5 试给出如下关系的关系图

$c)\{<x,y>|\, 0 \le x-y < 3\}$，这里$A=\{0,1,2,3,4\}$



P110-6

- **对{0,1,2,3,4,5,6}上的二元关系，**
  {<x,y>|x<y∨ x是质数}

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

P110-7

- **已知$P=\{<1,2>,<2,4>,<3,3>\}$**
  $Q=\{<1,3>,<2,4>,<4,2>\}$，则：
- **$P\cup Q=\{<1,2>,<2,4>,<3,3>, <1,3>, <4,2>\}$**
- **$P\cap Q=\{<2,4>\}$**
- **$\mathrm{dom}\ P=\{1,2,3\}$, $\mathrm{dom}\ Q=\{1,2,4\}$**
- **$\mathrm{ran}\ P=\{2,3,4\}$, $\mathrm{ran}\ Q=\{2,3,4\}$**
- **$\mathrm{dom}\ P\cap Q=\{2\}$, $\mathrm{ran}\ P\cap Q=\{4\}$**

P113-1判断关系的性质

- **已知集合A={1,2,3}上的五个关系：**
- **R={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,3>}** **反对称、传递**
- **S={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>}** **自反、对称、传递**
- **T={<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,3>}** **反对称**
- **∅ =空关系** **反自反、对称、反对称、传递**
- **A A=全域关系** **自反、对称、传递**

P113-4

- **如果关系R和S是自反的，对称的和可传递的，证明$R\cap S$亦是自反、对称和可传递的。**

证明：设R和S是自反的，对称的和可传递的

1）对任意$x\in X$，有$<x,x>\in R$和$<x,x>\in S$，所以$<x,x>\in R\cap S$, 即$R\cap S$在X上是自反的。

2)对任意$<x,y>\in R\cap S$，有$<x,y>\in R\wedge <x,y>\in S$，因为R和S是对称的，故必有$<y,x>\in R\wedge <y,x>\in S$。即$<y,x>\in R\cap S$,即$R\cap S$在X上是对称的。

3）对任意$<x,y>\in R\cap S\wedge <y,z>\in R\cap S$，则有

$<x,y>\in R \wedge <x,y>\in S \wedge <y,z>\in R \wedge <y,z>\in S$，因为R和S都是传递的，所以$<x,z>\in R$,$<x,z>\in S$,即$<x,z>\in R\cap S$，所以$R\cap S$在X上是传递的。

P119-3

- 设S为X上的关系，证明若S是自反的和传递的，则 $S\circ S=S$，其逆为真吗?

证明： 首先证明 $S\circ S\subseteq S$。因为若 $\langle x,z\rangle \in S\circ S$，则存在某个 $y \in X$，使得 $\langle x,y\rangle \in S$，且 $\langle y,z\rangle \in S$。因为S是X上的传递关系，所以 $\langle x,z\rangle \in S$，所以 $S\circ S\subseteq S$。

然后证明 $S \subseteq S\circ S$。令 $\langle x,y\rangle \in S$，因为S是自反的，所以有 $\langle x,x\rangle \in S$，因此有 $\langle x,y\rangle \in S\circ S$，即 $S \subseteq S\circ S$。

所以 $S\circ S=S$。

但是其逆不真。例如：

$X=\{1,2,3\}$，$S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,1\rangle\}$，$S\circ S=S$，但是S不是自反的。

P127-2a)用矩阵运算和作图方法求出R的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

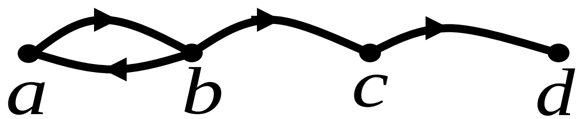
$$X=\{a,b,c,d\},$$

$$R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$$

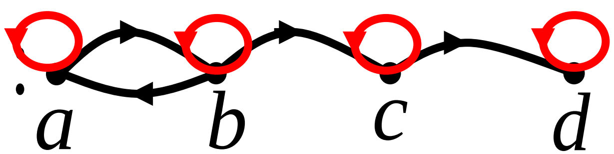
解： 自反闭包

$$M_{r(R)}=M_R+M_{I_X}$$

$R:$



$r(R):$



$$=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

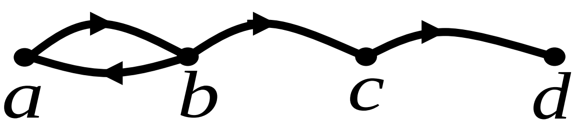
P127-2a)用矩阵运算和作图方法求出R的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

$$X=\{a,b,c,d\},$$

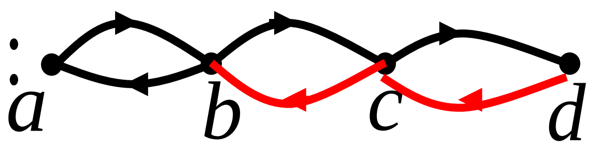
$$R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$$

解： 对称闭包

$R:$



$s(R):$

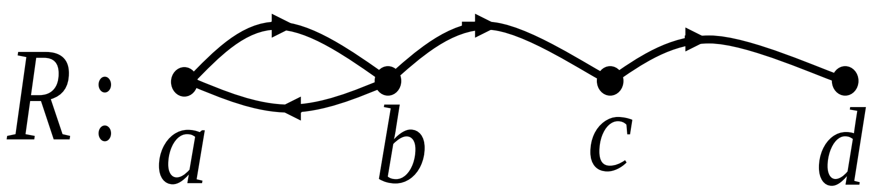


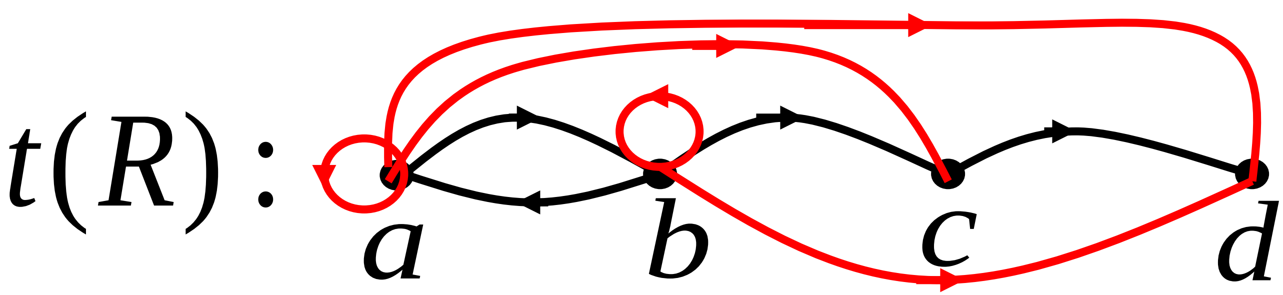
P127-2a)用矩阵运算和作图方法求出R的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

$$X=\{a,b,c,d\},$$

$$R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$$

解： 传递闭包





传递闭包

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R^{(2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^{(3)}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R^{(4)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

P127-2b)用Warshall算法求传递闭包。

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

i=1,j=2

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

i=2,j=1,2

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

i=3,j=1,2

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

i=4,j=1,2,3

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

设R1和R2是A上的关系，证明：

$$r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$$

证明：

$$\begin{aligned} r(R_1 \cup R_2) &= R_1 \cup R_2 \cup I_A \\ &= R_1 \cup I_A \cup R_2 \cup I_A \\ &= r(R_1) \cup r(R_2) \end{aligned}$$

P130 (1)

四个元素的集合共有多少个不同的划分?

解: 整数4可划分为

$$4,\ 1+3,\ 1+1+2,\ 2+2,\ 1+1+1+1$$

$$1+C_4^1+\quad C_4^2+1/2C_4^2+\quad C_4^4\quad =15\ (\text{种})$$

P130 (2)

设$\{A_1, A_2, \cdots\cdots A_k\}$是集合$A$的一个划分，我们定义$A$上的一个二元关系$R$，使$\langle a,b\rangle \in R$当且仅当$a$和$b$在这个划分的同一块中，证明$R$是自反、对称和传递的。

(3) 传递性： **设$a,b,c \in A$，若有$\langle a,b\rangle \in R$，且$\langle b,c\rangle \in R$，则必$\exists i$，使得$a \in A_i$，$b \in A_i$；且必$\exists j$，使得$b \in A_j$，$c \in A_j$；这样$i=j$。因为若$i \neq j$，则$b \in A_i \cap A_j$，故$A_i \cap A_j \neq \varnothing$，这与$A_i$，$A_j$是$A$的划分块矛盾，因此$a,b,c$属于同一分块，则$\langle a,c\rangle \in R$，即$R$有是传递的。**

P134（2）

试问由四个元素组成的有限集上所有的等价关系的个数为多少?

解: 因为等价关系与划分是一一对应的，因此由上节P130(1)四个元素的集合共有15个不同的划分，可知等价关系的个数也为15个。

P134（3）

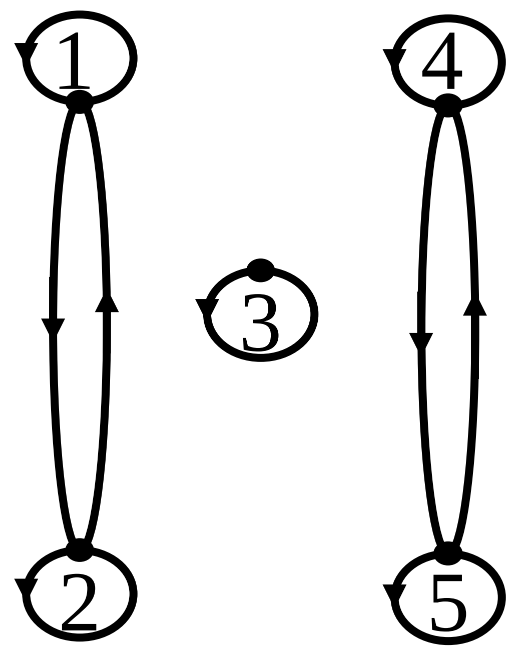
给定集合$S=\{1,2,3,4,5\}$，找出 S上的等价关系R，此关系R能够产生划分$\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$并划出关系图。

解：可用如下方法产生一个等价关系：

$\boldsymbol{R} =$

$\{1,2\}\times\{1,2\}\cup\{3\}\times\{3\}\cup\{4,5\}\times\{4,5\};$

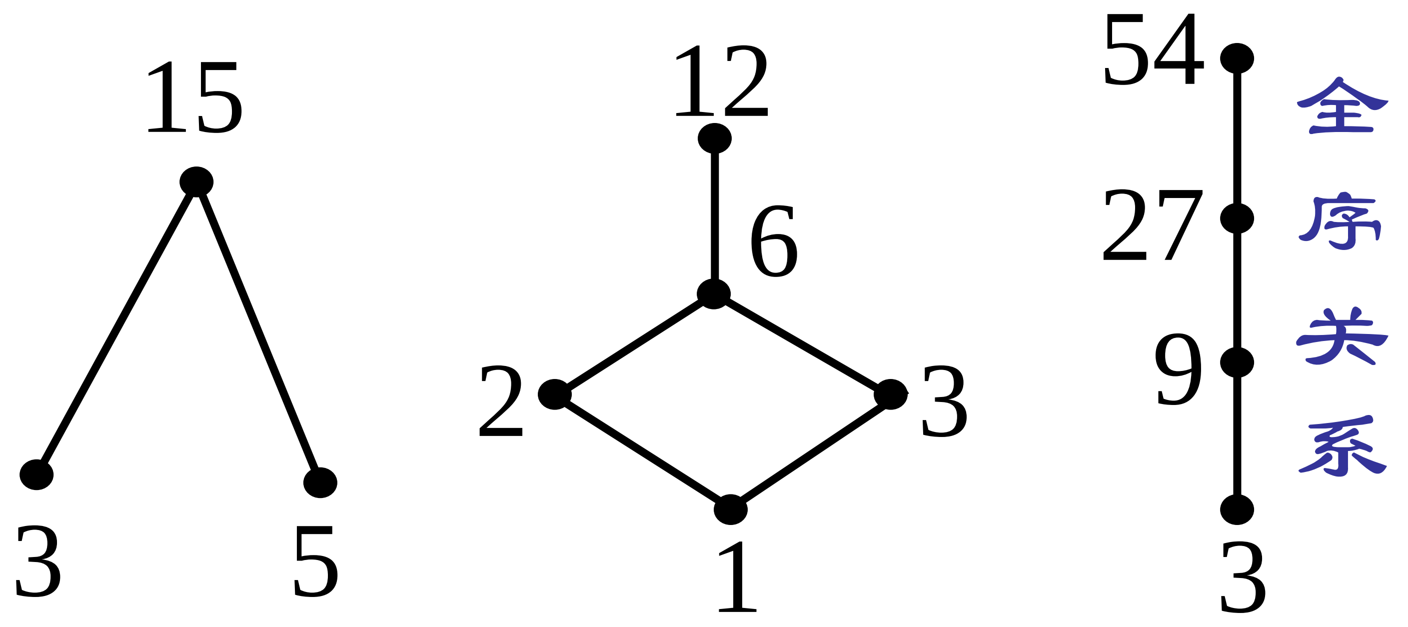
$= \{<1,2>,<2,1>,<4,5>,<5,4>\}\cup I_A$



P145（1）

设集合为{3,5,15},{1,2,3,6,12},{3,9,27,54},偏序关系为整除，划出这些集合的偏序关系图，并指出哪些是全序关系。

解:



P145（4）

找出在集合$\{0,1,2,3\}$上包含序偶$<0,3>$和$<2,1>$的线序关系。

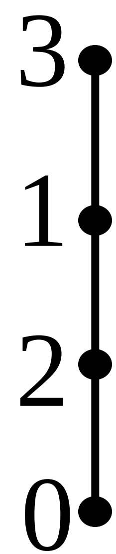
解： $R =$

$\{<0,2>,<0,1>,$

$<0,3>,<2,1>,$

$<2,3>,<1,3>\}$

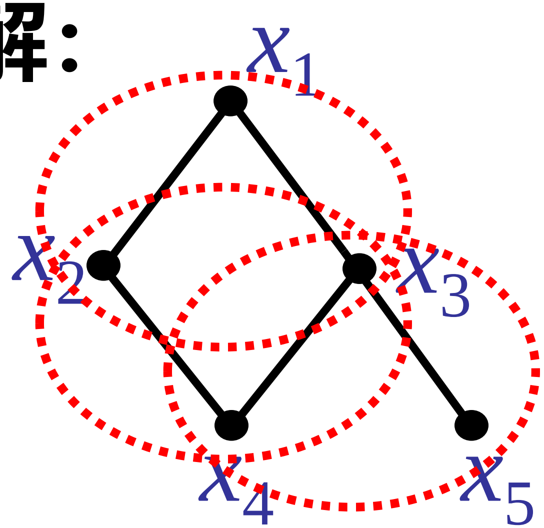
$\cup I_A$



P145（6）

设集合$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$上的四个偏序关系图如图。找出$P$的最大元素、最小元素、极大元素、极小元素。找出子集$\{x_2, x_3, x_4\}$、$\{x_3, x_4, x_5\}$、$\{x_1, x_2, x_3\}$的上界、下界、上确界、下确界。

解:



极大元素： x_1

最大元素： x_1

极小元素： x_4, x_5

最小元素： 无

习 题 详 解

P185 2. b）分析代数系统<A, *>的交换性、等幂性及幺元、逆元情况，A={a, b, c}

*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*a*	*c*
c	*c*	*c*	*c*

对称→满足交换性

b*b≠b→不满足等幂性

幺元：a

$a^{-1}=a$； $b^{-1}=b$

习 题 详 解

P190 3. 证明代数系统<R, *>是独异点且0为幺元，其中任意a、b有$a*b=a+b+a\cdot b$

证：（1）证封闭：因为+、· 在R上封闭，故*在R上封闭；

（2）证可结合：$(a*b)*c \quad =(a+b+a\cdot b)*c$
$=a+b+a\cdot b+c+(a+b+a\cdot b)\cdot c \quad =a+b+c+a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b\cdot c$

$a*(b*c) \quad =a*(b+c+b\cdot c) \quad =a+b+c+b\cdot c+a\cdot(b+c+b\cdot c)$
$=a+b+c+a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b\cdot c$

（3）证存在幺元：∵对任意元素a有$a*0=a+0+a\cdot 0=a$ 以及
$0*a=0+a=0\cdot a=a$ ∴0是幺元

综上可知 <R, *>满足封闭性、结合性、有幺元0，故是独异点

习 题 详 解

P197 3. 有群<G, *>，对任意G中元素a，H={y | y*a=a*y, y∈G}，证<H, *>是<G, *>的子群

证：（1）H是G的非空子集：H显然是G子集，至少群中的幺元是H元素（e*a=a*e，e∈G）

（2）证H中任意元素x、y满足$x*y^{-1}\in H$：

对任意的x, y ∈H，有：

$$a*y^{-1}=(y^{-1}*y)*a*y^{-1}=y^{-1}*(y*a)*y^{-1}$$

$$=y^{-1}*(a*y)*y^{-1}=y^{-1}*a*(y*y^{-1})=y^{-1}*a$$

因此有：$(x*y^{-1})*a=x*a*y^{-1}=a*(x*y^{-1})$，符合H定义

习题详解

P185 2. b）分析代数系统<A, *>的交换性、等幂性及幺元、逆元情况，A={a, b, c}

*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*a*	*c*
c	*c*	*c*	*c*

对称→满足交换性

b*b≠b→不满足等幂性

幺元：a

$a^{-1}=a$； $b^{-1}=b$

习 题 详 解

P190 3. 证明代数系统<R, *>是独异点且0为幺元，其中任意a、b有a*b=a+b+a·b

证： （1）证封闭：因为+、· 在R上封闭，故*在R上封闭；

（2）证可结合：(a*b)*c =(a+b+a·b)*c =a+b+a·b+c+(a+b+a·b)·c =a+b+c+a·b+b·c+a·c+a·b·c

a*(b*c) =a*(b+c+b·c) =a+b+c+b·c+a·(b+c+b·c) =a+b+c+a·b+b·c+a·c+a·b·c

（3）证存在幺元：∵对任意元素a有a*0=a+0+a·0=a 以及 0*a=0+a=0·a=a ∴0是幺元

综上可知 <R, *>满足封闭性、结合性、有幺元0，故是独异点

习题详解

P197 3. 有群<G, *>，对任意G中元素a，H={y | y*a=a*y, y∈G}，证<H, *>是<G, *>的子群

证：（1）H是G的非空子集：H显然是G子集，至少群中的幺元是H元素（e*a=a*e，e∈G）

（2）证H中任意元素x、y满足$x*y^{-1}\in H$：

对任意的x, y ∈H，有：

$$a*y^{-1}=(y^{-1}*y)*a*y^{-1}=y^{-1}*(y*a)*y^{-1}$$

$$=y^{-1}*(a*y)*y^{-1}=y^{-1}*a*(y*y^{-1})=y^{-1}*a$$

因此有：$(x*y^{-1})*a=x*a*y^{-1}=a*(x*y^{-1})$，符合H定义

习 题 详 解

P197 3. 有群<G, *>，对任意G中元素a，H={y | y*a=a*y, y∈G}，证<H, *>是<G, *>的子群

证明　显然 $H \subseteq G$。运算 $*$ 在 H 中显然满足结合性。

对于任意的 $x,\ y \in H$，以及任意的 $a \in G$，因为

$$(x*y)*a = x*y*a = x*a*y = a*x*y = a*(x*y)$$

所以，$x*y \in H$，这说明 $*$ 关于 H 是封闭的。

因为 $e*a = a*e$，所以 $e \in H$。

对于任意的 $x \in H$，由于 $x*a = a*x$，所以

$$x^{-1}*(x*a)*x^{-1} = x^{-1}*(a*x)*x^{-1}$$

即得

$$a*x^{-1} = x^{-1}*a$$

这就表明 $x^{-1} \in H$。

综上所述，$\langle H, *\rangle$ 是 $\langle G, *\rangle$ 的子群。

习题详解

P200 4. $<G, \times_7>$是否为循环群？给出生成元

$\times_7$	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]
[3]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]
[4]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]
[5]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]
[6]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

由运算表知该运算封闭、可结合、有幺元[1]，且各元素均有逆元，故是群。生成元a应满足a^6=[1]

各元素的*i*次方分别为

[2]: {2, 4, 1…}

[3]: {3, 2, 6, 4, 5, 1}，是生成元

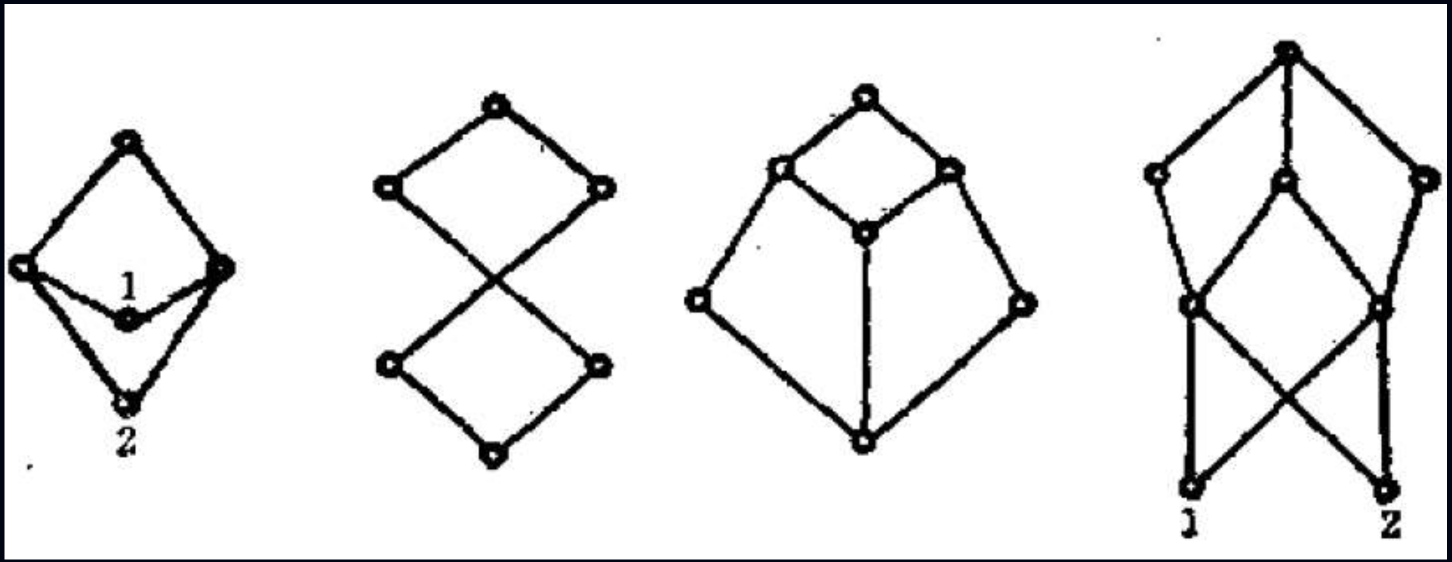
[4]: {4, 2, 1…}

[5]: {5, 4, 6, 2, 3, 1}，是生成元

[6]: {6, 1…}

习 题 详 解

■P242 6-1.1：说明是否为格



1和2无上下确界不是格

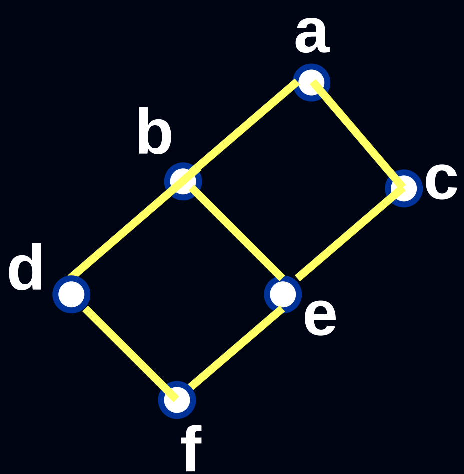
是格

是格

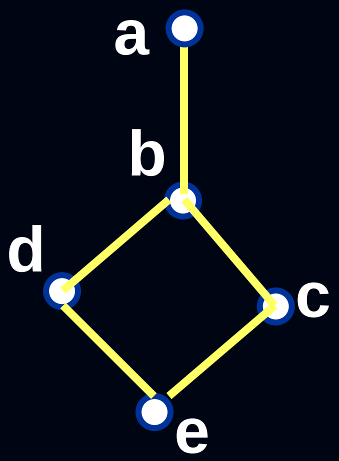
1和2无上下确界不是格

习 题 详 解

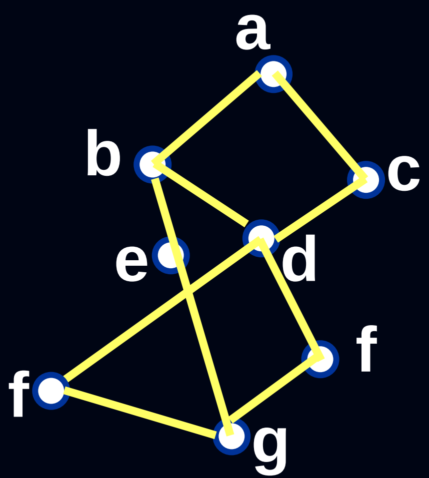
■P248 6-2．2：说明是否为分配格【主要方法：判断有无与五元非分配格同构的子格】



是分配格



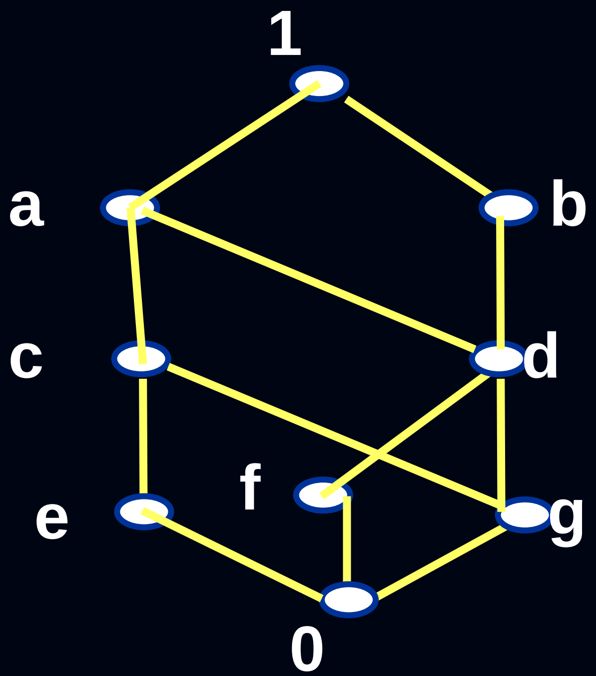
是分配格



不是分配格

习题详解

■P252 6-3.1： 给出下列有界格中元素的补元，说明是否分配格、是否有补格



(a) 0-1; b-e; 其余元素无补元

(c)不是有补格

(b)不是分配格：

因为有子格 <{ a, c, e, 0, f}, ≤> 与5元非分配格同构

（但<{1, a, e, 0, b}, ≤>不是子格 ）

习 题 详 解

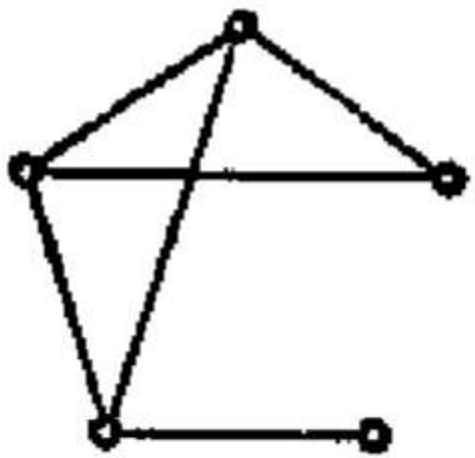
- **P260 6-4.1：** 证明两式成立

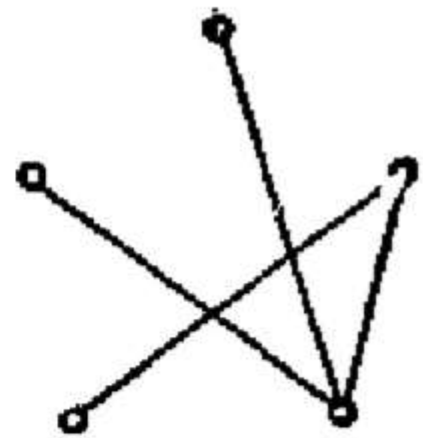
$$a \vee (\bar{a} \wedge b) = (a \vee \bar{a}) \wedge (a \vee b) = 1 \wedge (a \vee b) = a \vee b$$

$$a \wedge (\bar{a} \vee b) = (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b$$

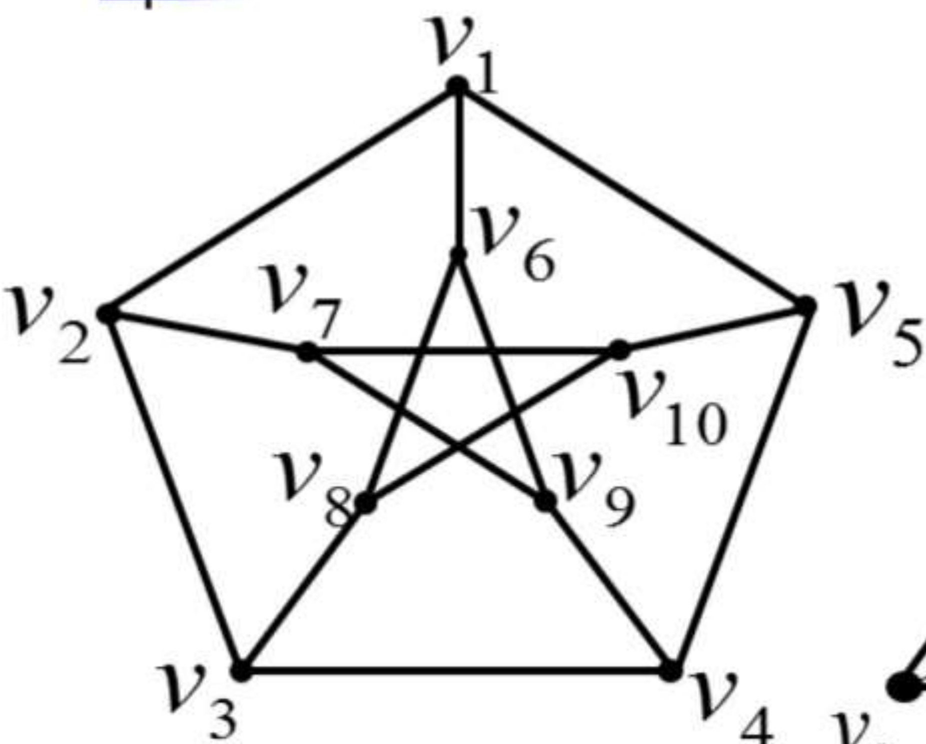
第七章作业

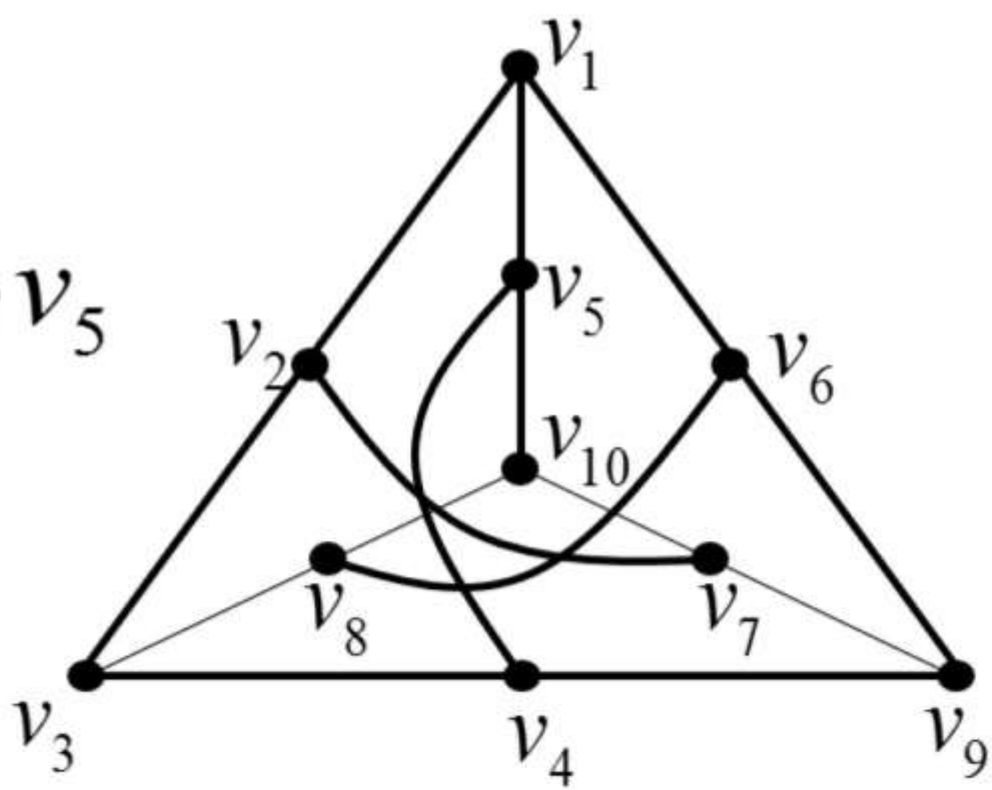
P279-2 求图相对于完全图的补图





P279-7 证明如下两个图是同构的。

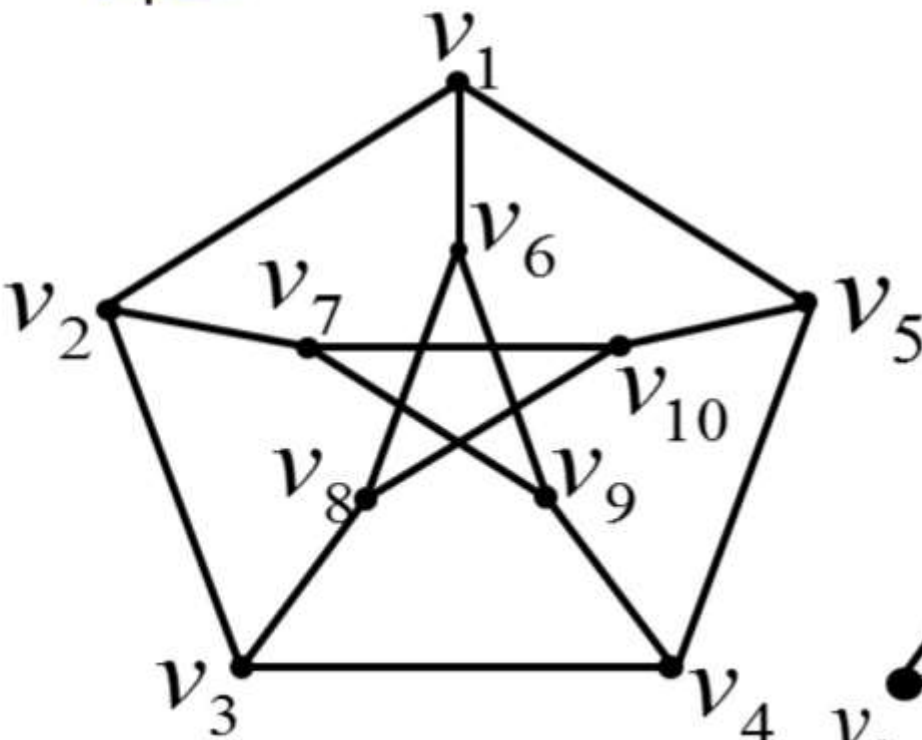


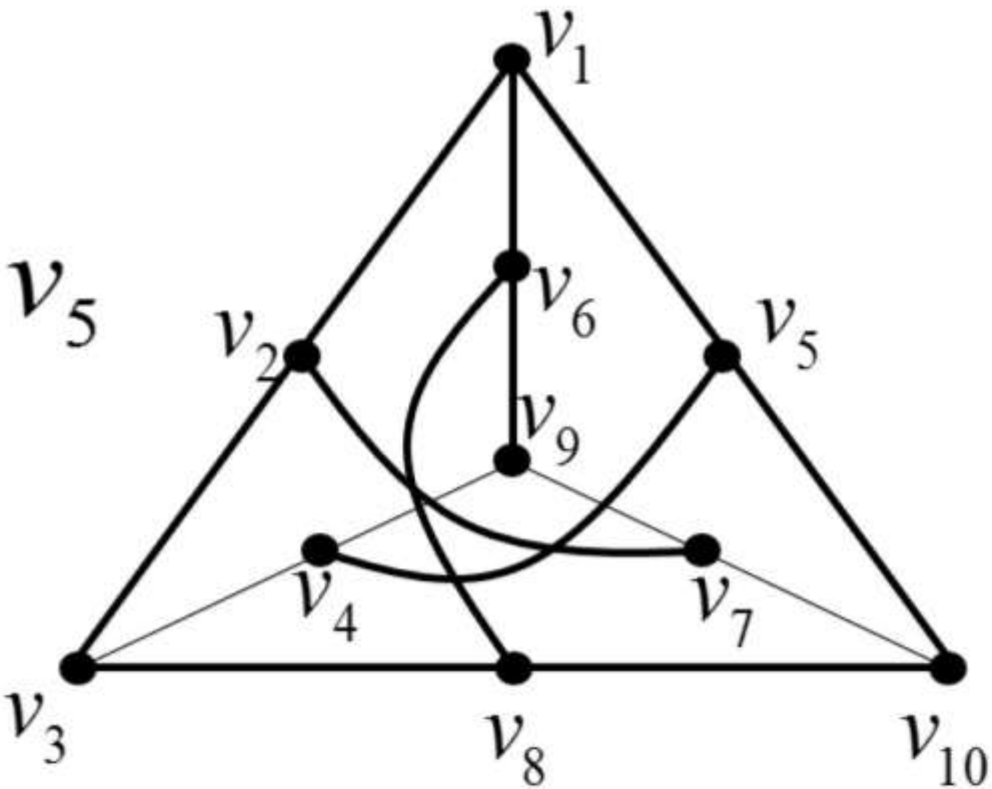


建立如上图所示的结点间的双射，可以证明两图同构。

（答案不唯一）

P279-7 证明如下两个图是同构的。

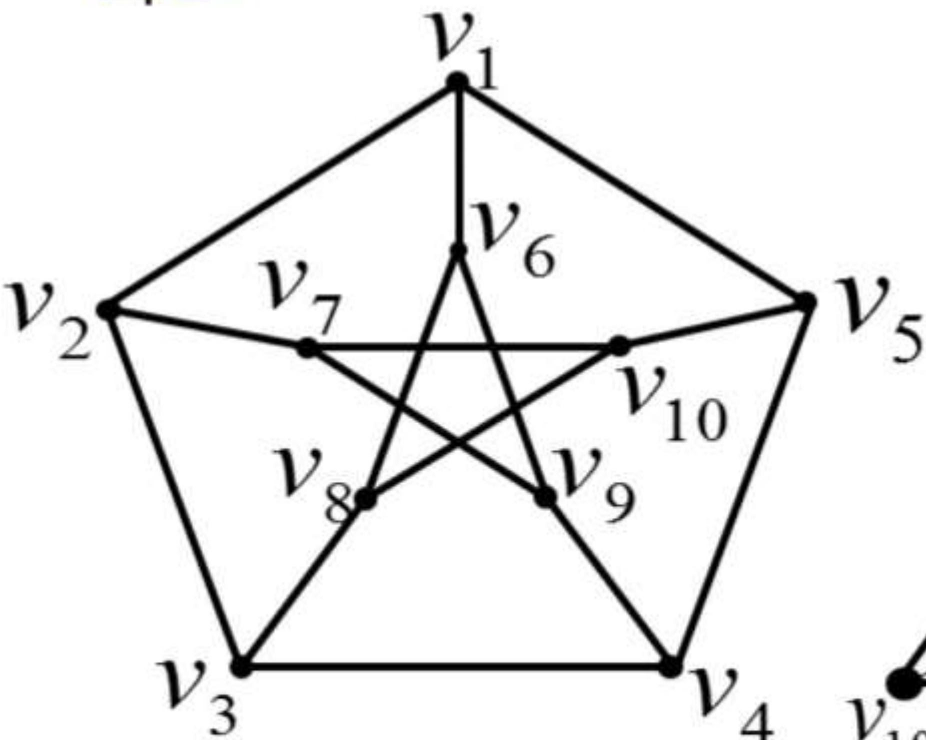


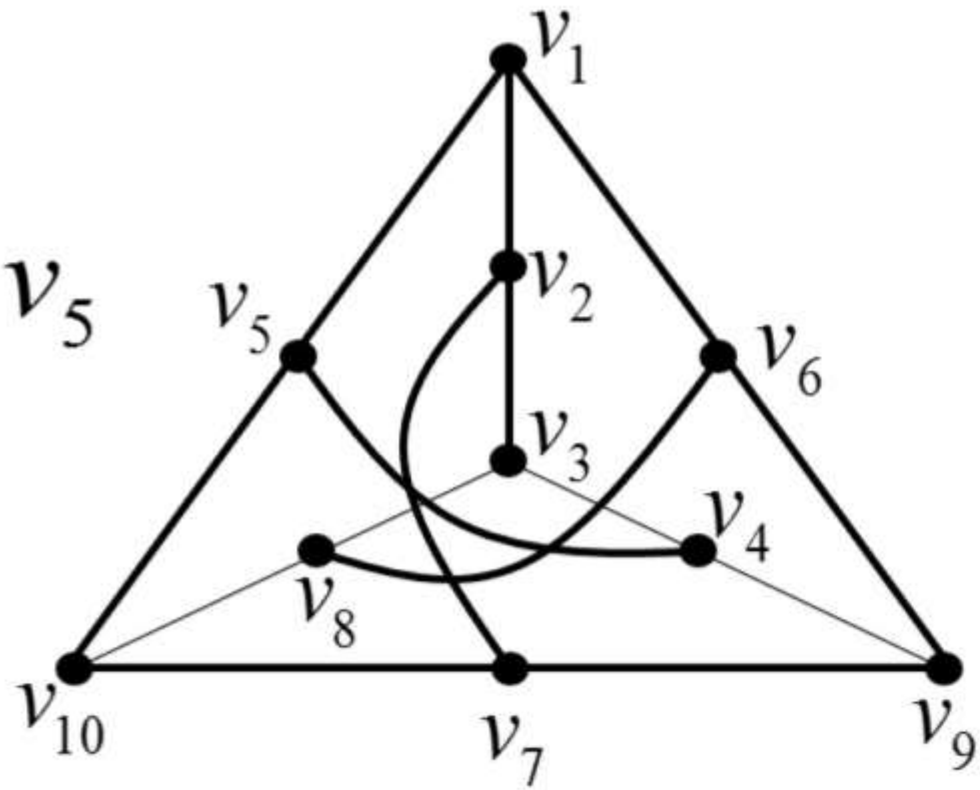


建立如上图所示的结点间的双射，可以证明两图同构。

（答案不唯一）

P279-7 证明如下两个图是同构的。

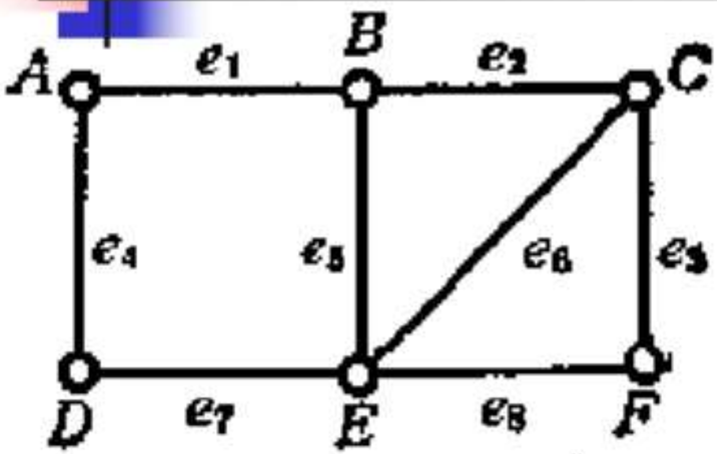




建立如上图所示的结点间的双射，可以证明两图同构。

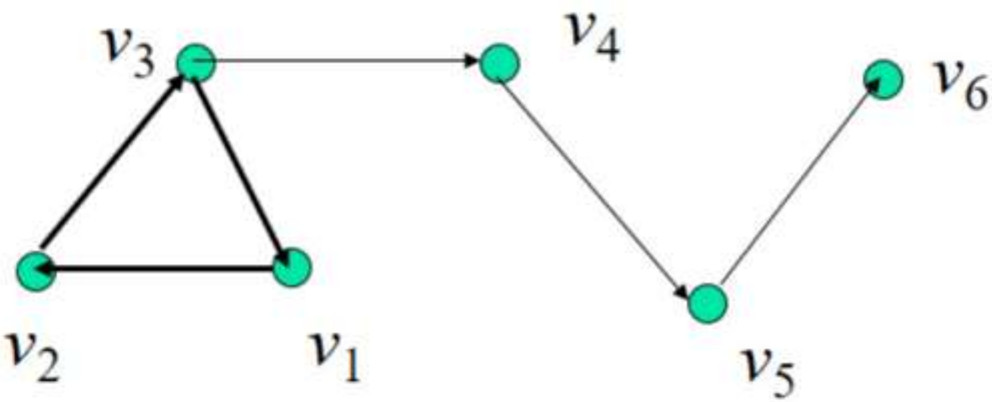
（答案不唯一）

P287-5

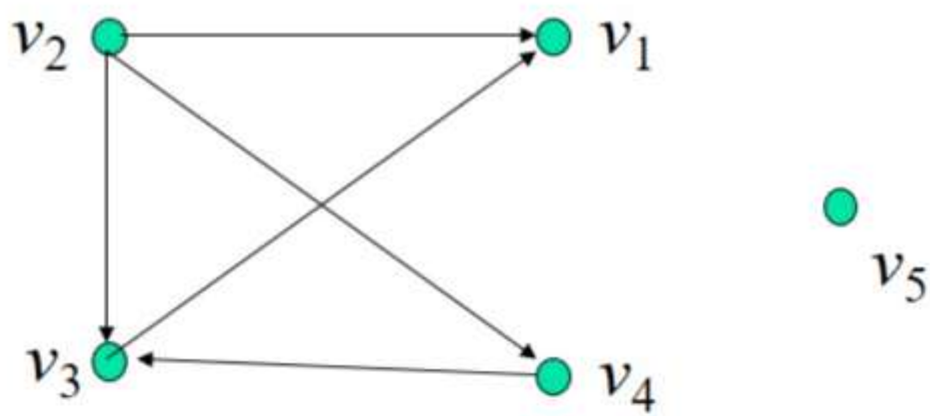


- 从A到F的所有通路：
  - Ae1Be2Ce3F
  - Ae1Be2Ce6Ee8F
  - Ae1Be5Ee8F
  - Ae1Be5Ee6CE3F
  - Ae4De7Ee5Be2Ce3F
  - Ae4De7Ee8F
  - Ae4De7Ee6Ce3F
- 从A到F的所有的迹：
  - Ae1Be2Ce3F
  - Ae1Be2Ce6Ee8F
  - Ae1Be5Ee8F
  - Ae1Be5Ee6CE3F
  - Ae4De7Ee5Be2Ce3F
  - Ae4De7Ee8F
  - Ae4De7Ee6Ce3F
  - Ae4De7Ee6Ce2Be5Ee8F
  - Ae4De7Ee5Be2Ce6Ee8F
- **A和F之间的距离：3**
- **$k(G)=\lambda(G)=\delta(G)=2$**

P287-8 求有向图的强分图、单侧分图和弱分图



- 强分图：结点集$\{v_1, v_2, v_3\}$,$\{v_4\}$,$\{v_5\}$,$\{v_6\}$导出的子图。
- 单侧分图：结点集$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$导出的子图。
- 弱分图：结点集$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$导出的子图。



$$A(G)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$P(G)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$D(G)=\begin{bmatrix}0&\infty&\infty&\infty&\infty\\1&0&1&1&\infty\\1&\infty&0&\infty&\infty\\2&\infty&1&0&\infty\\\infty&\infty&\infty&\infty&0\end{bmatrix}$$

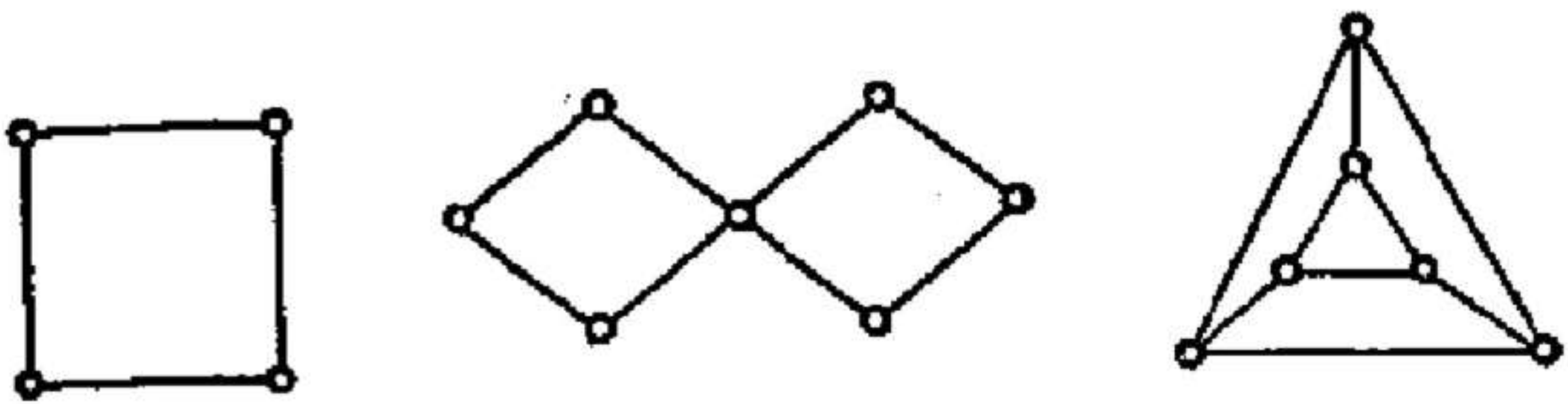
P300-4 写出图G的完全关联矩阵，并验证其秩是否如定理7-3.2所述

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
A	1	0	0	0	1	0	0	0	1
B	0	1	1	0	0	1	0	0	0
C	0	0	0	1	0	0	1	0	1
D	1	1	0	0	0	0	0	1	0
E	0	0	0	1	1	1	0	0	0
F	0	0	1	0	0	0	1	1	0

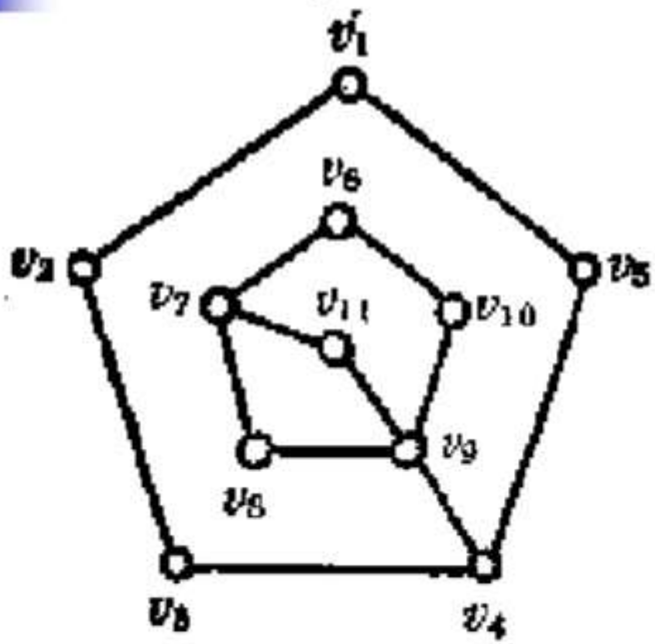
P311-1 一笔画问题：每个图恰有两个奇数度结点，都能一笔画

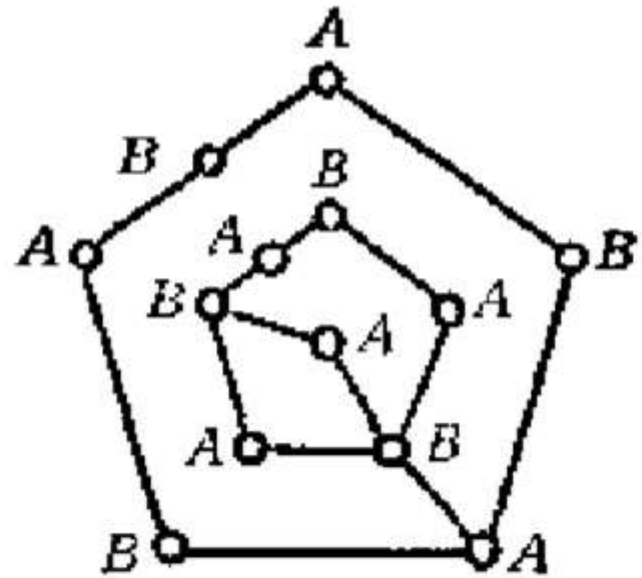
P311-6

- 画一个有一条欧拉回路和一条汉密尔顿回路的图。
- 画一个有一条欧拉回路，但没有一条汉密尔顿回路的图。
- 画一个没有一条欧拉回路，但有一条汉密尔顿回路的图。



P311-7判断下图是否有汉密尔顿回路





- 方法1：对左图中的结点标记A和B, 可见A有7个，B有6个，所以没有汉密尔顿回路。
- 方法2：删除左图中的结点v9，图的连通分支为2，即W(G-{v9}) >|{v9}|，所以没有H回路。