习题详解

P8 (3) 设P表示命题“天下雪”，Q表示命题“我将去镇上”，R表示命题“我有时间”。以符号形式写出下列命题：

a）如果天不下雪和我有时间，那么我将去镇上。

b）我将去镇上，仅当我有时间。

c）天不下雪

d）天下雪，那么我不去镇上

解：(a) $(\neg P \wedge R) \to Q$

(b)

我有时间时，是不是一定要去镇上？ ✕

有时间 { 可去镇上 / 也可不去镇上 }　意义不明确，包含一个善意的推定

没时间　肯定不去镇上　意义明确　$\neg R \to \neg Q \Leftrightarrow Q \to R$

习 题 详 解

P8 (3) 设P表示命题“天下雪”，Q表示命题“我将去镇上”，R表示命题“我有时间”。以符号形式写出下列命题：

a）如果天不下雪和我有时间，那么我将去镇上。

b）我将去镇上，仅当我有时间。

c）天不下雪

d）天下雪，那么我不去镇上

解：(a) $(\neg P \wedge R) \to Q$

(b) (1)″仅当″表示必要条件，有：$Q \to R$　（本题正确答案）

(2)″当″表示充分条件，有：$R \to Q$

(3)″当且仅当″表示充要条件，有：$R \leftrightarrow Q$

(c) $\neg P$

(d) $P \to \neg Q$

习题详解

P12 (5) 试把原子命题表示为P,Q,R等，然后用符号译出下列各句子：

a）或者你没有写信，或者它在途中丢失了；

b）如果张三和李四都不去，他就去；

c）我们不能既划船又跑步；

d）如果你来了，那么他唱不唱歌将看你是否伴奏而定。

解：a）P：你给我写信。R：信在途中丢失了。则$\neg P$为你没有给我写信。

$\neg P$与R为不可兼或，有：$\neg(\neg P \leftrightarrow R)$

b）P：张三不去。Q：李四不去。R：他就去。

$(P \wedge Q) \rightarrow R$

c）P：我们能划船。Q：我们能跑步。

$\neg(P \wedge Q)$

d）P：你来了。Q：他唱歌。R：你伴奏。

$P \rightarrow ((R \rightarrow Q) \wedge (\neg R \rightarrow \neg Q))$

$P \rightarrow (R \leftrightarrow Q)$

先理解好原子命题的意义

习题详解

P12 (7) 用符号形式写出下列命题：

a）假如上午不下雨，我去看电影；否则就在家里读书或看报。

b）我今天进城，除非下雨。

c）仅当你走，我将留下。

解：(a）P：上午下雨。Q：我去看电影。R：我在家读书。S：我在家看报。

$$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow (R \vee S))$$

注意此题较复杂，可通过列真值表来判别取真值的三种情况。

即：下雨就在家读书或看报。

　　但若不下雨则只能看电影而不读书也不看报。

$$(\neg P \rightarrow Q \wedge \neg R \wedge \neg S) \wedge (P \rightarrow \neg Q \wedge (R \vee S))$$

习题详解

P12 (7) 用符号形式写出下列命题：

a）假如上午不下雨，我去看电影；否则就在家里读书或看报。

b）我今天进城，除非下雨。

c）仅当你走，我将留下。

解：

(b) P：我今天进城。Q：天下雨。

$\neg Q \rightarrow P$

(c) P：你走了。Q：我留下。

$Q \rightarrow P$

习题详解

P19 (7) 证明下列等价式。

b) $\neg(A \rightleftarrows B) \Leftrightarrow \neg((A \to B) \wedge (B \to A))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A)$

$\vee (B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B) \vee (A \wedge B))$

$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$

习题详解

P19 (7) 证明下列等价式。

e) $(((A\wedge B\wedge C)\to D)\wedge(C\to(A\vee B\vee D)))$

$\Leftrightarrow((\neg(A\wedge B\wedge C)\vee D)$

$\wedge(\neg C\vee(A\vee B\vee D)))$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg B\vee\neg C\vee D)$

$\wedge(\neg C\vee A\vee B\vee D)$

$\Leftrightarrow(\neg C\vee D)\vee[(\neg A\vee\neg B)\wedge(A\vee B)]$

$\Leftrightarrow(\neg C\vee D)\vee[(A\wedge\neg B)\vee(B\wedge\neg A)]$

$\Leftrightarrow(\neg C\vee D)\vee\neg[(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)]$

$\Leftrightarrow\neg[C\wedge(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)]\vee D$

$\Leftrightarrow\neg[C\wedge(A\to B)\wedge(B\to A]\vee D$

$\Leftrightarrow((C\wedge(A\rightleftarrows B))\to D)$

习题详解

P19 (8) 化简以下各式。

a) $((A\to B)\rightleftarrows(\neg B\to\neg A))\land C$;

b) $A\lor(\neg A\lor(B\land\neg B))$;

c) $(A\land B\land C)\lor(\neg A\land B\land C)$。 [1-4.

解 a) $((A\to B)\rightleftarrows(\neg B\to\neg A))\land C$

$\Leftrightarrow((A\to B)\rightleftarrows(A\to B))\land C\Leftrightarrow T\land C\Leftrightarrow C$

b) $A\lor(\neg A\lor(B\land\neg B))\Leftrightarrow A\lor(\neg A\lor F)$

$\Leftrightarrow A\lor\neg A\Leftrightarrow T$

c) $(A\land B\land C)\lor(\neg A\land B\land C)$

$\Leftrightarrow(A\lor\neg A)\land(B\land C)$

$\Leftrightarrow T\land(B\land C)\Leftrightarrow B\land C$

习题详解

P23 (1) 试证下列各式为重言式。

c) 因为 $(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow P\to R$

所以 $((P\to Q)\wedge(Q\to \bar{R}))\to(P\to R)$

为重言式。

d) 因为 $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$

$\Leftrightarrow(b\wedge(a\vee c))\vee(c\wedge a)$

$\Leftrightarrow(b\vee(c\wedge a))\wedge((a\vee c)\vee(c\wedge a))$

$\Leftrightarrow(b\vee c)\wedge(b\vee a)\wedge(a\vee c)$

所以 $((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a))\rightleftarrows((a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a))$

是重言式。

习题详解

P39 (1) 求公式 $P\wedge(P\to Q)$ 的析取范式和合取范式。

解 $P\wedge(P\to Q)\Leftrightarrow P\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P, Q$

$P\wedge(P\to Q)\Leftrightarrow P\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(P\vee(Q\wedge\neg Q))\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)$

习题详解

P39 (4) c)求下列各式的主析取范式和主合取范式，并指出哪些是重言式。

c) $P\vee(\neg P\rightarrow(Q\vee(\neg Q\rightarrow R)))$

$$\Leftrightarrow P\vee(P\vee(Q\vee(Q\vee R)))$$

$$\Leftrightarrow P\vee Q\vee R=\prod_{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1,2,3,4,5,6,7}=(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$$

$$\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$$

$$\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)$$

$$\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$$

习题详解

P39

7. A,B,C,D 四个人中要派两个人出差，按下述三个条件有几种派法？如何派？

a) 若 A 去则 C 和 D 中要去一人；

b) B 和 C 不能都去；

c) C 去则 D 要留下。

解：设 A：A 去出差。B：B 去出差。C：C 去出差。D：D 去出差。

若 A 去则 C 和 D 中要去一人。 $A\rightarrow(C\overline{\vee}D)$。

B 和 C 不能都去。 $\neg(B\wedge C)$。

C 去则 D 要留下。 $C\rightarrow\neg D$。

原题的意思是：① $A\rightarrow(\neg C\rightleftarrows D)$ ② $\neg(B\wedge C)$ ③ $C\rightarrow\neg D$ 同时成立！！！

原题 $\Leftrightarrow$ ①∧②∧③ （合取范式）类似合取的思维

问题转化为：求原题的主析取范式。在多个小项中，再根据派两人参加的条件进行筛选！

习题详解

方法一：

A	B	C	D	① $A\rightarrow(\neg C\rightleftarrows D)$	② $\neg(B\wedge C)$	③ $C\rightarrow\neg D$	①∧②∧③
T	T	T	T	F	F	F	
T	T	T	F	T	F	T	
T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	
T	F	T	T	F	T	F	
T	F	T	F	T	T	T	T √
T	F	F	T	T	T	T	T √
T	F	F	F	F	T	T	
F	T	T	T	T	F	F	
F	T	T	F	T	F	T	
F	T	F	T	T	T	T	T √
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	F	
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

故分派的方法为：$B\wedge D$，或 $D\wedge A$，或 $C\wedge A$。

习题详解

方法二：

按题意应有：$A\to(C\overline{\vee}D)$，$\neg(B\wedge C)$，$C\to\neg D$必须同时成立。

因为 $C\overline{\vee}D\Leftrightarrow(C\wedge\neg D)\vee(D\wedge\neg C)$

故 $(A\to(C\overline{\vee}D))\wedge\neg(B\wedge C)\wedge(C\to\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(D\wedge\neg C))\wedge\neg(B\wedge C)\wedge(\neg C\vee\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(D\wedge\neg C))\wedge(\neg B\vee\neg C)\wedge(\neg C\vee\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(D\wedge\neg C))\wedge((\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge\neg D)\vee\neg C)$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg C)\vee(\neg D\wedge C\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg D\wedge C\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg D\wedge C\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg D\wedge C\wedge\neg C)$

在上述的析取范式中，有些不符合题意，舍弃，得

$(\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee(\neg C\wedge D)\vee(\neg D\wedge C\wedge\neg B)$

故分派的方法为：$B\wedge D$，或 $D\wedge A$，或 $C\wedge A$。

习题详解

$P47$（2） b)仅用规则P和T证明：

$A \to (B \to C), (C \land D) \to E, \neg F \to (D \land \neg E) \Rightarrow A \to (B \to F)$

证法1:(1)$\neg(A \to (B \to F))$	P(附加前提)
(2)A	(1)T, I
(3)$\neg(B \to F)$	(1)T, I
(4)B	(3)T, I
(5)$\neg F$	(3)T, I
(6)$A \to (B \to C)$	P
(7)$B \to C$	(2)(6)T, I
(8)C	(4)(7)T, I
(9)$\neg F \to (D \land \neg E)$	P
(10)$D \land \neg E$	(5)(9)T, I
(11)D	(10)T, I
(12)$\neg E$	(10)T, I
(13)$C \land D$	(8)(11)T, I
(14)$(C \land D) \to E$	P
(15)E	(13)(14)T, I
(16)$E \land \neg E$	矛盾（12）（15）

习题详解

$P47$（2） $b)$用CP规则证明：

$$A \to (B \to C), (C \wedge D) \to E, \neg F \to (D \wedge \neg E) \Rightarrow A \to (B \to F)$$

证法2:

$(1) A$	P(附加前提)
$(2) A \to (B \to C)$	P
$(3) B \to C$	$(1)(2) T, I$
$(4) B$	P(附加前提)
$(5) C$	$(3)(4) T, I$
$(6) (C \wedge D) \to E$	P
$(7) C \to (D \to E)$	$(6) T, E$
$(8) D \to E$	$(5)(7) T, I$
$(9) \neg D \vee E$	$(8) T, E$
$(10) \neg(D \wedge \neg E)$	$(9) T, E$
$(11) \neg F \to (D \wedge \neg E)$	P
$(12) F$	$(10)(11) T, I$
$(13) B \to F$	$(5)(9) T, I$
$(14) A \to (B \to F)$	CP

习题详解

$P47$（2） c)仅用规则P和T证明：

c) (1)	$\neg(A \rightarrow F)$	P(附加前提)
(2)	A	(1)T, I
(3)	$\neg F$	(1)T, I
(4)	$A \vee B$	(2)T, I
(5)	$(A \vee B) \rightarrow C \wedge D$	P
(6)	$C \wedge D$	(4) (5)T, I
(7)	C	(6)T, I
(8)	D	(6)T, I
(9)	$D \vee E$	(8)T, I
(10)	$D \vee E \rightarrow F$	P
(11)	F	(9) (10)T, I
(12)	$F \wedge \neg F$	矛盾。(3), (11)

习题详解

P60 (2) 找出以下句子所对应的谓词表达式。

i）没有一位女同志既是国家选手又是家庭妇女。

j）有些女同志既是教练员又是国家选手。

k）所有运动员都钦佩某些教练。

l）有些大学生不钦佩运动员。

特性谓词

解：设W(x) :x是女同志。C(x)：x是国家选手。H(x)：x是家庭主妇。

J(x)：x是教练员。L(x)：x是运动员。S(x)：x是大学生。

A(x,y)：x钦佩y。

i) $\neg(\exists x)(W(x) \land C(x) \land H(x))$

j) $(\exists x)(W(x) \land J(x) \land C(x))$

k) $(\forall x)(L(x) \to (\exists y)(J(y) \land A(x,y)))$

l) $(\exists x)(S(x) \land (\forall y)(L(y) \to \neg A(x,y)))$

习题详解

P72 (4) 求证 $(\exists x)(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\rightarrow(\exists x)B(x)$。

解： $(\exists x)(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow(\exists x)(\neg A(x)\vee B(x))$

$$\Leftrightarrow(\exists x)\neg A(x)\vee(\exists x)B(x)$$

$$\Leftrightarrow\neg(\forall x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$$

$$\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\rightarrow(\exists x)B(x)$$

习题详解

$P79(2)$用CP规则证明$(\forall x)(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$

证明：$\because (\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$

所以只需证:$(\forall x)(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow \neg(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$

(1) $\neg(\forall x)P(x)$	P（附加前提）
(2) $(\exists x)\neg P(x)$	$(1)T,E$
(3) $\neg P(c)$	$(2)ES$
(4) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$	P
(5) $P(c)\vee Q(c)$	$(4)US$
(6) $Q(c)$	$(3)(5)T,I$
(7) $(\exists x)Q(x)$	$(6)EG$
(8) $\neg(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$	CP

习 题 详 解

P79 (3) 符号化下列命题并推证其结论。

a) 所有有理数是实数，某些有理数是整数，因此某些实数是整数。

解：设R(x)：x是实数。Q(x)：x是有理数。 I(x)：x是整数。

符号化为：$(\forall x)(Q(x)\to R(x))\wedge(\exists x)(Q(x)\wedge I(x))\Rightarrow(\exists x)(R(x)\wedge I(x))$

(1)	$(\exists x)(Q(x)\wedge I(x))$	P
(2)	$Q(c)\wedge I(c)$	(1) ES
(3)	$(\forall x)(Q(x)\to R(x))$	P
(4)	$Q(c)\to R(c)$	(3) US
(5)	$Q(c)$	(2) T,I

习 题 详 解

(6)	$R(c)$	(4) (5) T,I
(7)	$I(c)$	(2) T,I
(8)	$R(c) \wedge I(c)$	(6) (7) T,I
(9)	$(\exists x)\ (R(x) \wedge I(x))$	(8) EG

习题详解

P86 (6) 确定下列集合的幂集。

a) {a, {a}}

解：设A={a, {a}}

则幂集为：{ϕ, {a}, {{a}}, {a, {a}}}

习题详解

P95 (8) a) 已知$A\cup B=A\cup C$，是否必须$B=C$？

b) 已知$A\cap B=A\cap C$，是否必须$B=C$？

c) 已知$A\oplus B=A\oplus C$，是否必须$B=C$？

解：a) 不一定，反例：$A=\{a\}, B=\{a,c\}, C=\{c\}$, 则$A\cup B=A\cup C$但$B\neq C$。

b) 不一定，反例：$A=\{a\}, B=\{a,b\}, C=\{a,c\}$, 则$A\cap B=A\cap C$但$B\neq C$。

c) $B=C$。证：若$A\oplus B=A\oplus C$，对任意的$x\in B$,

(1)若$x\in A\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow x\notin A\oplus B\Leftrightarrow x\notin A\oplus C$

由$x\in A\wedge x\notin A\oplus C\Rightarrow x\in C$，所以$B\subseteq C$

(2)若$x\notin A\Rightarrow x\notin A\cap B$ 因为$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$

因此有$x\in A\oplus B\Rightarrow x\in A\oplus C$

由$x\notin A\wedge x\in A\oplus C\Rightarrow x\in C$

即$B\subseteq C$。 同理可证$C\subseteq B$。

因此$A\oplus B=A\oplus C$时，必有$B=C$。

习题详解

P110 (6) 对$\{0,1,2,3,4,5,6\}$上的关系，$\{\langle x, y\rangle \mid x<y \vee x$是质数$\}$，写出关系矩阵。

解：$R=\{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 0,4\rangle, \langle 0,5\rangle, \langle 0,6\rangle,$

$\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle,$

$\langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,6\rangle,$

$\langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 3,6\rangle,$

$\langle 4,5\rangle, \langle 4,6\rangle,$

$\langle 5,6\rangle,$

$\langle 2,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle,$

$\langle 3,0\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle,$

$\langle 5,0\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 5,5\rangle\}$

关系矩阵为：

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

习题详解

P113 (1) 分析集合A={1,2,3}上的下述五个关系。

R={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,3>}

$S=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>\}$

$T=\{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,3>\}$

$\Phi=$ 空关系

$A\times A=$ 全域关系

解：R是反对称的，传递的。

S是自反的，对称的，传递的。

T是反对称的。$<1,3>\notin T$

Φ是反自反的，对称的，反对称的，传递的。

$A\times A$是自反的，对称的，传递的。

习 题 详 解

P119 (3) 设S为X上的关系，证明若S是自反的和传递的，则$S \circ S = S$，其逆为真吗？

解：(1) 若$\langle x,z\rangle \in S \circ S$，则存在某个$y \in X$，使得$\langle x,y\rangle \in S$,且$\langle y,z\rangle \in S$。

若S是传递的，则$\langle x,z\rangle \in S$，所以有$S \circ S \subseteq S$

(2)令$\langle x,y\rangle \in S$，根据自反性，必有$\langle x,x\rangle \in S$，因此有$\langle x,y\rangle \in S \circ S$，即$S \subseteq S \circ S$。

由(1)(2)得 $S \circ S = S$

定理的逆不真。

反例：$X=\{1,2,3,\}$，$S=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,1\rangle\}$，$S \circ S = S$，但S不是自反的。

习题详解

P127 (5) 设R_1和R_2为集合A上的关系且$R_1 \supseteq R_2$，求证

a） $r(R_1) \supseteq r(R_2)$

b) $s(R_1) \supseteq s(R_2)$

c) $t(R_1) \supseteq t(R_2)$

证明：a) 因为$R_1 \supseteq R_2$，所以$R_1 \cup I_A \supseteq R_2 \cup I_A$，即$r(R_1) \supseteq r(R_2)$。

b) 因为$s(R_1)$是对称的，且$s(R_1) \supseteq R_1$，又$R_1 \supseteq R_2$，所以$s(R_1) \supseteq R_2$，

由$s(R_2)$的定义，$s(R_2)$是包含R_2的最小对称关系，故

$s(R_1) \supseteq s(R_2)$

c) 因为$t(R_1)$是传递的，且$t(R_1) \supseteq R_1$，又$R_1 \supseteq R_2$，所以$t(R_1) \supseteq R_2$，

由于$t(R_2)$是包含R_2的最小传递关系，故

$t(R_1) \supseteq t(R_2)$

习题详解

P127 (7) 设R_1和R_2为集合A上的关系，证明

a） $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$

b) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$

c) $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$

证明：a） $r(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2 \cup I_A = R_1 \cup I_A \cup R_2 \cup I_A = r(R_1) \cup r(R_2)$

b） $s(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^c = R_1 \cup R_2 \cup R_1^c \cup R_2^c$

$= (R_1 \cup R_1^c) \cup (R_1 \cup R_2^c)$

$= s(R_1) \cup s(R_2)$

c） 因为$R_1 \cup R_2 \supseteq R_1$，由上题结论知: $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1)$

同理有$t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_2)$

所以 $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$

习题详解

P135 (5) 设正整数的序偶集合A，在A上定义的二元关系R如下：

$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \in R$，当且仅当xv=yu，证明R是一个等价关系。

证明：设A上定义的二元关系R为：$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \in R \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{u}{v}$

1)对任意$\langle x, y\rangle \in A$，因为$\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$，所以$\langle\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \in R$，即R是自反的。

2) 设$\langle x, y\rangle \in A, \langle u, v\rangle \in A$，若

$$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \in R \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{x}{y} \Rightarrow \langle\langle u, v\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \in R$$，即R是对称的。

3) 设任意$\langle x, y\rangle \in A, \langle u, v\rangle \in A, \langle w, s\rangle \in A$，对

$$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \in R \wedge \langle\langle u, v\rangle, \langle w, s\rangle\rangle \in R \Rightarrow \left(\frac{x}{y} = \frac{u}{v}\right) \wedge \left(\frac{u}{v} = \frac{w}{s}\right) \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{w}{s}$$

$\Rightarrow \langle\langle x, y\rangle, \langle w, s\rangle\rangle \in R$，即R是传递的。

因此，R是A上的等价关系。

习 题 详 解

P135 (7) 设R_1和R_2为非空集合A上的等价关系，确定下述各式，哪些是A上的等价关系，不是的提供反例证明。

a) $(A\times A)-R_1$　　b) R_1-R_2

c) R_1^2　　d) $r(R_1-R_2)$

证明：a) $(A\times A)-R_1$不是A上的等价关系。反例：

设$A=\{a,b\}$，$R_1=\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$

$(A\times A)-R_1=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$，所以$(A\times A)-R_1$不是A上的等价关系。

b) R_1-R_2不是A上的等价关系。反例：

设$A=\{a,b,c\}$，$R_1=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$, $R_2\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

$R_1-R_2=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c,a\rangle\}$不是A上的等价关系。

习题详解

c) R_1^2是A上的等价关系。

若$\langle a, a\rangle \in R_1 \Rightarrow \langle a, a\rangle \in R_1 \circ R_1$，所以$R_1^2$在A上是自反的。

若$\langle a, b\rangle \in R_1^2$则存在c，使得$\langle a, c\rangle \in R_1 \wedge \langle c, b\rangle \in R_1$。由于$R_1$是对称的，有

$\langle b, c\rangle \in R_1 \wedge \langle c, a\rangle \in R_1 \Rightarrow \langle b, a\rangle \in R_1^2$，所以$R_1^2$是对称的。

若$\langle a, b\rangle \in R_1^2 \wedge \langle b, c\rangle \in R_1^2$，则有$\langle b, a\rangle \in R_1^2 \wedge \langle c, b\rangle \in R_1^2$

故存在e_1，使得$\langle b, e_1\rangle \in R_1 \wedge \langle e_1, a\rangle \in R_1$

同理存在e_2，使得$\langle c, e_2\rangle \in R_1 \wedge \langle e_2, b\rangle \in R_1$ 由R_1的传递性，得

$\langle c, b\rangle \in R_1 \wedge \langle b, a\rangle \in R_1 \Rightarrow \langle c, a\rangle \in R_1^2$，所以$R_1^2$是传递的。

结论得证。

d) 如b)所设，

$r(R_1 - R_2) = (R_1 - R_2) \cup I_A = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$

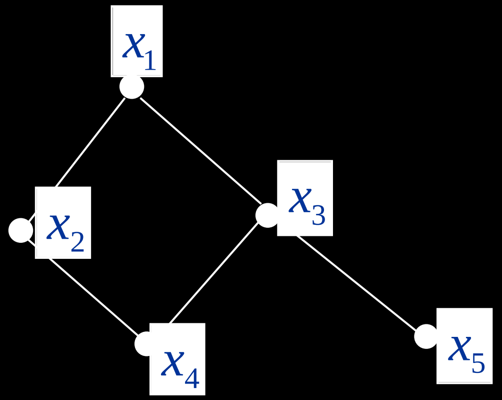
不是A上的等价关系。

习题详解

P146(6)设集合$P=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$上的偏序关系如图所示，找出$P$的最大元素，最小元素，极小元素，极大元素。找出子集$\{x_2,x_3,x_4\}$、$\{x_3,x_4,x_5\}$和$\{x_1,x_2,x_3\}$的上界，下界，上确界，下确界。

解答：P的最大元素为x_1，没有最小元素，极大元素为x_1，极小元素为x_4,x_5

子 集	上界	下界	上确界	下确界
$\{x_2,x_3,x_4\}$	x_1	x_4	x_1	x_4
$\{x_3,x_4,x_5\}$	x_1，x_3	无	x_3	无
$\{x_1,x_2,x_3\}$	x_1	x_4	x_1	x_4



习题详解

P185 2. b）分析代数系统<A, *>的交换性、等幂性及幺元、逆元情况，A={a, b, c}

*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*a*	*c*
c	*c*	*c*	*c*

对称→满足交换性

b*b≠b→不满足等幂性

幺元：a

$a^{-1}=a$； $b^{-1}=b$；c无逆元

习题详解

P185 2. d）分析代数系统<A, *>的交换性、等幂性及幺元、逆元情况，A={a, b, c}

*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*b*	*c*
c	*c*	*c*	*b*

对称→满足交换性

c*c≠c→不满足等幂性

幺元：a

a^{-1}=a； b,c无逆元

习 题 详 解

P190 3. 证明代数系统<R, *>是独异点且0为幺元，其中任意a、b有$a*b=a+b+a\cdot b$

证：（1）证封闭：因为+、· 在R上封闭，故*在R上封闭；

（2）证可结合： $\forall a, b, c\in R$

$(a*b)*c \quad =(a+b+a\cdot b)*c \ =a+b+a\cdot b+c+(a+b+a\cdot b)\cdot c$
$=a+b+c+a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b\cdot c$

$a*(b*c) \ =a*(b+c+b\cdot c) \quad =a+b+c+b\cdot c+a\cdot(b+c+b\cdot c)$
$=a+b+c+a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b\cdot c$

（3）证存在幺元：∵对任意元素a有$a*0=a+0+a\cdot 0=a$ 以及
$0*a=0+a=0\cdot a=a$ ∴0是幺元

综上可知 <R, *>满足封闭性、结合性、有幺元0，故是独异点

习 题 详 解

P197 3. 有群<G, *>，对任意G中元素a，H={y | y*a=a*y, y∈G}，证<H, *>是<G, *>的子群

证：（1）H是G的非空子集：H显然是G子集，至少群中的幺元是H元素（e*a=a*e，e∈G）

（2）证H中任意元素x、y满足$x*y^{-1}\in H$：

$(y*a)*y^{-1}=(a*y)*y^{-1} =a*(y*y^{-1}) =(y*y^{-1})*a=y*(y^{-1}*a)$

由消去律知$a*y^{-1}=y^{-1}*a$，故$y^{-1}\in H$

$(x*y^{-1})*a=x*a*y^{-1} =a*(x*y^{-1})$，符合H定义

习 题 详 解

P197 3. 有群<G, *>，对任意G中元素a，H={y | y*a=a*y, y∈G}，证<H, *>是<G, *>的子群

证明　显然 $H \subseteq G$。运算 $*$ 在 H 中显然满足结合性。

对于任意的 $x, y \in H$，以及任意的 $a \in G$，因为

$$(x*y)*a = x*y*a = x*a*y = a*x*y = a*(x*y)$$

所以，$x*y \in H$，这说明 $*$ 关于 H 是封闭的。

因为 $e*a = a*e$，所以 $e \in H$。

对于任意的 $x \in H$，由于 $x*a = a*x$，所以

$$x^{-1}*(x*a)*x^{-1} = x^{-1}*(a*x)*x^{-1}$$

即得

$$a*x^{-1} = x^{-1}*a$$

这就表明 $x^{-1} \in H$。

综上所述，$\langle H, *\rangle$ 是 $\langle G, *\rangle$ 的子群。

习 题 详 解

P200 1. 证独异点<G, *>是阿贝尔群，其中任意元素x有x*x=e

证：（1）证每个元素有逆元：因为任意元素x有x*x=e，

故根据逆元定义知$x^{-1}=x$，又<G, *>为独异点，故为群

（2）证G中任意元素x、y满足x*y =y*x：

$x*y=(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}=y*x$，所以<G, *>为交换群

（或由(x*y)*(x*y)=e=e*e=(x*x)*(y*y)证其为交换群）

习 题 详 解

P200 4. <G, $\times_7$>是否为循环群？给出生成元

$\times_7$	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]
[3]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]
[4]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]
[5]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]
[6]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

由运算表知该运算封闭、可结合、有幺元[1]，且各元素均有逆元，故是群。生成元a应满足a^6=[1]

各元素的i次方分别为

[2]: {2, 4, 1…}

[3]: {3, 2, 6, 4, 5, 1}，是生成元

[4]: {4, 2, 1…}

[5]: {5, 4, 6, 2, 3, 1}，是生成元

[6]: {6, 1…}

习 题 详 解

P221 3. 试证由下表给出的两个群<G, ★>和<S,*>是同构的。

★	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4
p_2	p_2	p_1	p_4	p_3
p_3	p_3	p_4	p_1	p_2
p_4	p_4	p_3	p_2	p_1

$\langle G, ★\rangle$

*	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	q_3	q_4	q_1	q_2
q_2	q_4	q_3	q_2	q_1
q_3	q_1	q_2	q_3	q_4
q_4	q_2	q_1	q_4	q_3

$\langle S, *\rangle$

习题详解

证明　作 G 到 S 的映射 f 为:

$$f(p_1)=q_3,\ f(p_2)=q_2,\ f(p_3)=q_1,\ f(p_4)=q_4$$

由表 5–7 可知, f 是一个双射。

容易验证:

$$f(p_1\bigstar p_1)=f(p_1)=q_3=q_3*q_3=f(p_1)*f(p_1)$$

$$f(p_1\bigstar p_2)=f(p_2)=q_2=q_3*q_2=f(p_1)*f(p_2)$$

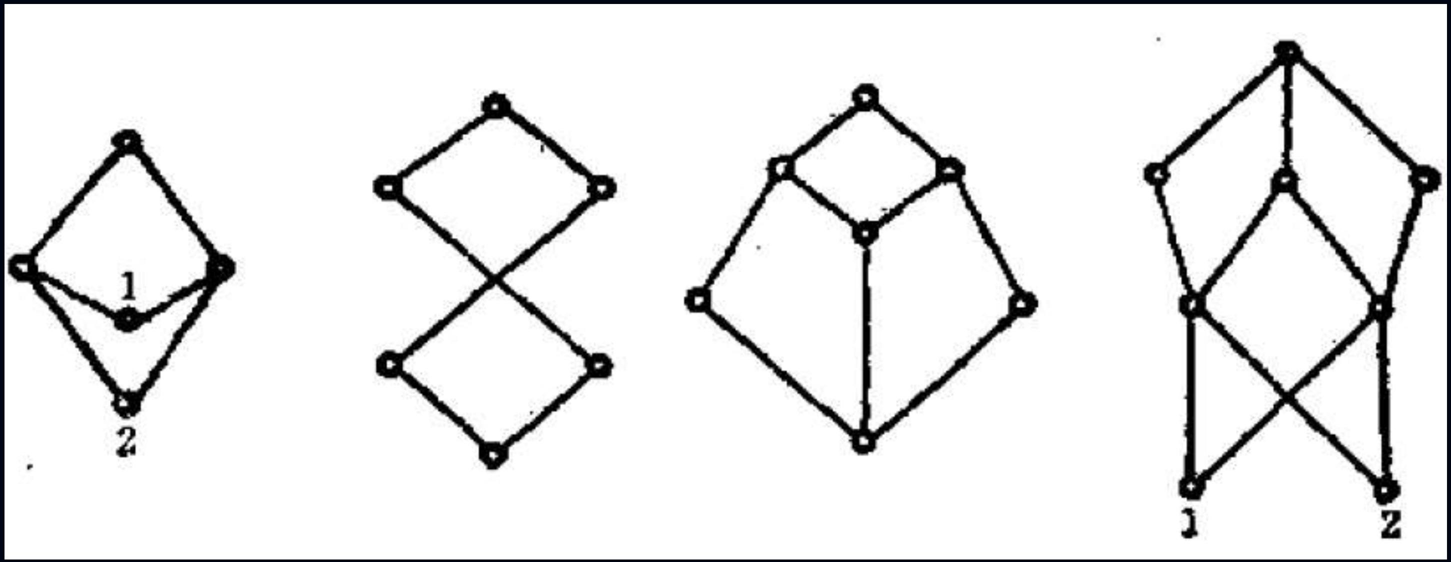
$$f(p_3\bigstar p_2)=f(p_4)=q_4=q_1*q_2=f(p_3)*f(p_2)$$

$$f(p_4\bigstar p_2)=f(p_3)=q_1=q_4*q_2=f(p_4)*f(p_2)$$

等等。其余可类似地验证。所以$\langle G,\ \bigstar\rangle$和$\langle S,\ *\rangle$同构。

习题详解

■P242 6-1.1：说明是否为格



1和2无上下确界
不是格

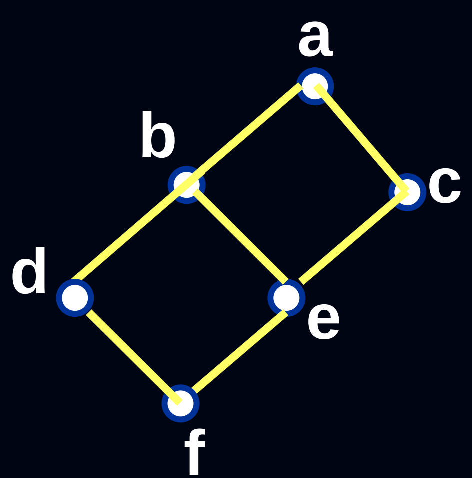
是格

是格

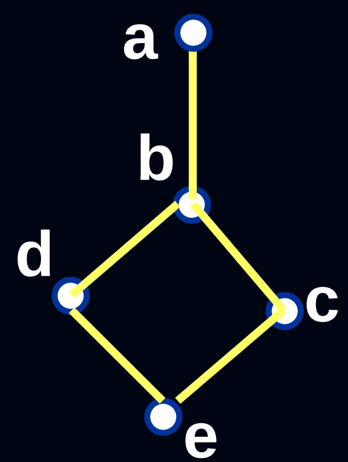
1和2无上下确界
不是格

习题详解

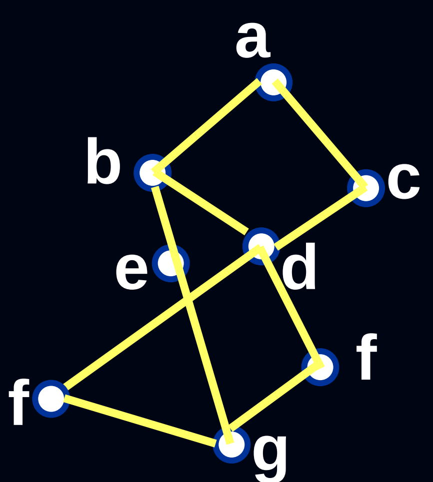
■P248 6-2.2：说明是否为分配格【主要方法：判断有无与五元非分配格同构的子格】



是分配格



是分配格



不是分配格

删去b节点后，a,d就有了盖住关系，但，已经不满足子格的概念。因此，找不到5元子格和钻石格、五角格同构。

习 题 详 解

■P248 6-2.3： 证明格<I,max,min>是分配格。

证明：

对于任意的 $a, b, c \in I$

$$\max(a, \min(b, c)) = \begin{cases} \max(a, b) = \begin{cases} a & b \leqslant c,\ b \leqslant a \\ b & b \leqslant c,\ a \leqslant b \end{cases} \\ \max(a, c) = \begin{cases} a & c \leqslant b,\ c \leqslant a \\ c & c \leqslant b,\ a \leqslant c \end{cases} \end{cases}$$

$$\min(\max(a, b), \max(a, c)) = \begin{cases} \min(a, c) = a & b \leqslant a,\ a \leqslant c \\ \min(a, a) = a & b \leqslant a,\ c \leqslant a \\ \min(b, c) = \begin{cases} b & a \leqslant b,\ a \leqslant c,\ b \leqslant c \\ c & a \leqslant b,\ a \leqslant c,\ c \leqslant b \end{cases} \\ \min(b, a) = a & a \leqslant b,\ c \leqslant a \end{cases}$$

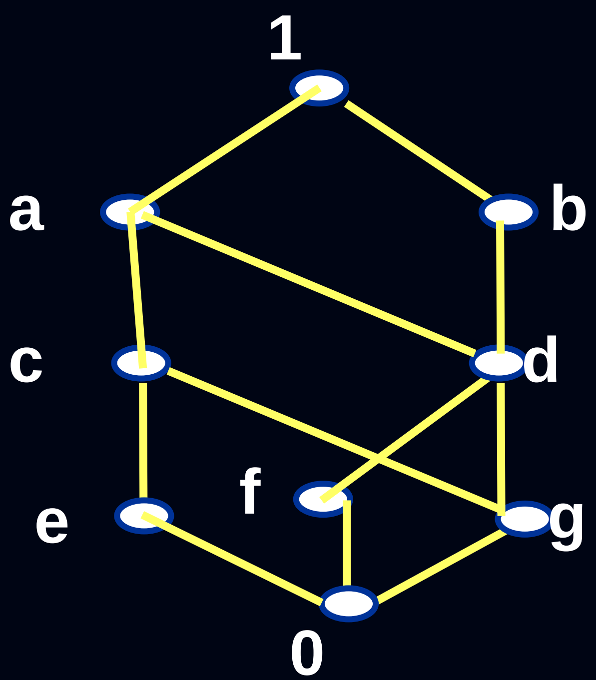
所以 $\max(a, \min(b, c)) = \min(\max(a, b), \max(a, c))$

用对偶原理可知

$$\min(a, \max(b, c)) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$$

习题详解

■P252 6-3.1： 给出下列有界格中元素的补元，说明是否分配格、是否有补格



(a) 0-1; b-e; 其余元素无补元

(c)不是有补格

(b)不是分配格：

因为有子格 <{ a, c, e, 0, f}, ≤> 与5元非分配格同构

（但<{1, a, e, 0, b}, ≤>不是子格 ）

习题详解

■P260 2：设<S,∨,∧,->是一个布尔代数，x,y∈S，证明x≤y当且仅当 $\bar{y}\preceq\bar{x}$。 。

证明 由引理 6-4.1 可知

$$\bar{y}\preceq\bar{x} \quad \text{当且仅当} \quad \bar{y}\wedge\bar{\bar{x}}=0$$

即有

$$\bar{y}\preceq\bar{x} \quad \text{当且仅当} \quad \bar{y}\wedge x=0$$

再由引理 6-4.1 即得

$$x\wedge\bar{y}=0 \quad \text{当且仅当} \quad x\preceq y$$

因此，在布尔代数中，$x\preceq y$ 当且仅当 $\bar{y}\preceq\bar{x}$。

习题详解

■P260　3：设 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 是一个布尔代数，如果在 A 上定义二元运算 $\oplus$ 为：

$$a \oplus b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$$

证明 $\langle A, \oplus \rangle$ 是一个阿贝尔群。

证明　(i) 由 $\wedge$，$\vee$，$^-$ 这三个运算在 A 上都是封闭的，所以，运算 $\oplus$ 在 A 上也是封闭的；

(ii) 对于任意的 $a, b, c \in A$

$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \oplus c &= ((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \oplus c \\
&= (((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \wedge \bar{c}) \\
&\quad \vee (\overline{((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b))} \wedge c) \\
&= (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \\
&\quad \vee (((\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee b)) \wedge c) \\
&= (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \\
&\quad \vee (((a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})) \wedge c) \\
&= (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \\
&\quad \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c)
\end{aligned}$$

同理可得

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c)$$

所以，$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$，即运算 $\oplus$ 满足结合性；

习题详解

■P260 3: 设 $\langle A, \vee, \wedge, \bar{\ } \rangle$ 是一个布尔代数，如果在 A 上定义二元运算 $\oplus$ 为：

$$a \oplus b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$$

证明 $\langle A, \oplus \rangle$ 是一个阿贝尔群。

(iii) 因为

$$a \oplus b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) = (b \wedge \bar{a}) \vee (\bar{b} \wedge a) = b \oplus a$$

所以，运算 $\oplus$ 满足可交换性；

(iv) 对于任意的 $a \in A$，有

$$a \oplus 0 = 0 \oplus a = (0 \wedge \bar{a}) \vee (\bar{0} \wedge a) = 0 \vee (1 \wedge a) = 0 \vee a = a$$

故 0 是 A 中关于运算 $\oplus$ 的幺元；

(v) 对于任意的 $a \in A$，有

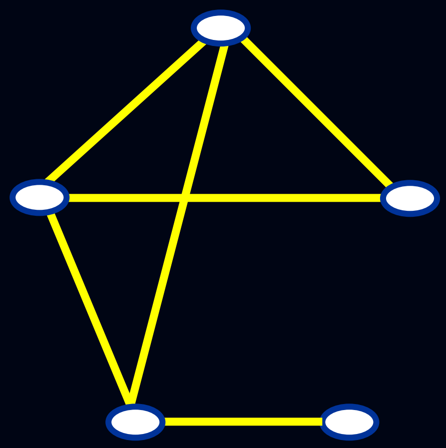
$$a \oplus a = (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$$

这说明 A 中的每一个元素均以其自身为逆元。

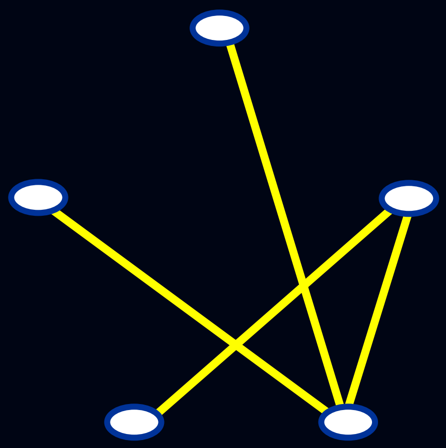
因此，$\langle A, \oplus \rangle$ 是一个阿贝尔群。

习 题 详 解

■P279 7-1 (2)： 写出下图相对于完全图的补图。



补图：



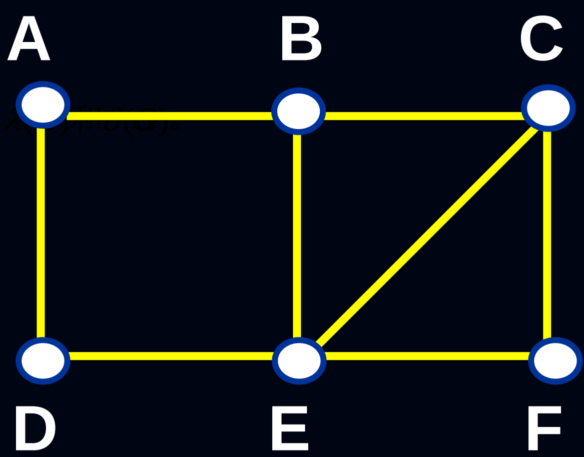
习题详解

■P279 5 (c)： 一个图是自补图，其对应的完全图的边数必为偶数。

b) 设图 G 是自补图，G 有 e 条边，G 对应的完全图的边数为 A。G 的补图 $\overline{G}$ 的边数应为 $A-e$。因为 $G\simeq\overline{G}$，故边数相等，$e=A-e$，$A=2e$，因此 G 对应的完全图的边数 A 为偶数。

习 题 详 解

■P287 7-2 (5)： 分析下图，求：a) 从A到F的所有通路。b) 从A到F的所有迹。c) A和F之间的距离。d) $k(G), \lambda(G)$和$\delta(G)$。



a) 通路共7条：ABCF,ABEF,ABCEF,ABECF,ADEF,ADECF,ADEBCF.

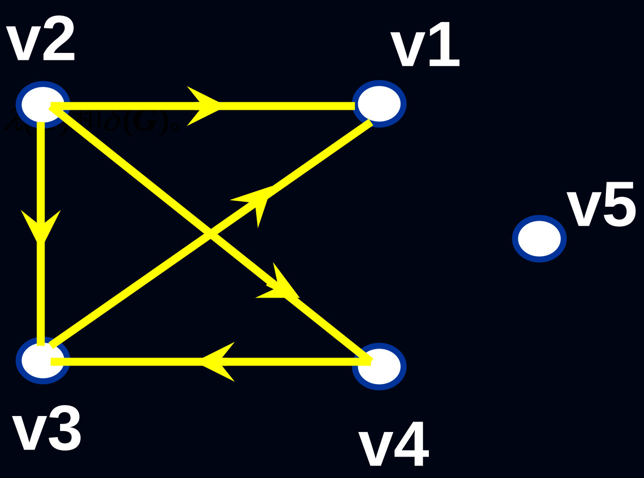
b) 迹共9条：ABCF,ABEF,ABCEF,ABECF,ADEF,ADECF,ADEBCF ADECBEF.

c) d(A,F)=3

d) $k(G) = \lambda(G) = \delta(G) = 2$

习题详解

■P300 7-3 (3)： 下图给出了一个有向图，试求该图的邻接矩阵，并求出可达性矩阵和距离矩阵。



邻接矩阵：
$$A(G)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

习 题 详 解

■P300 7-3 (3)： 下图给出了一个有向图，试求该图的邻接矩阵，并求出可达性矩阵和距离矩阵。

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

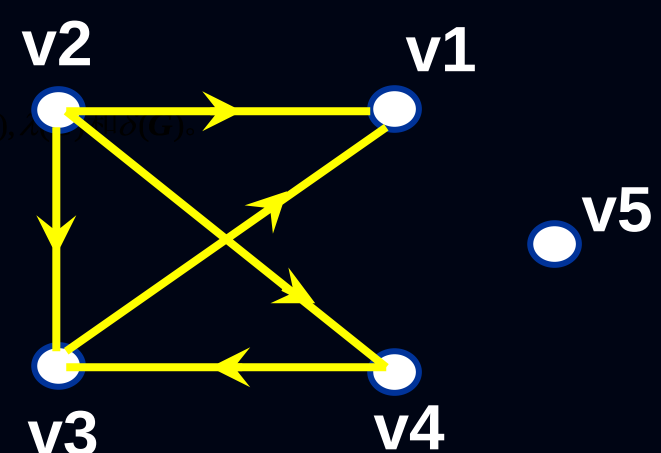
$$A^{(3)}=A^{(2)}\times A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad A^{(4)}=A^{(5)}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

习 题 详 解

■P300 7-3 (3)： 下图给出了一个有向图，试求该图的邻接矩阵，并求出可达性矩阵和距离矩阵。

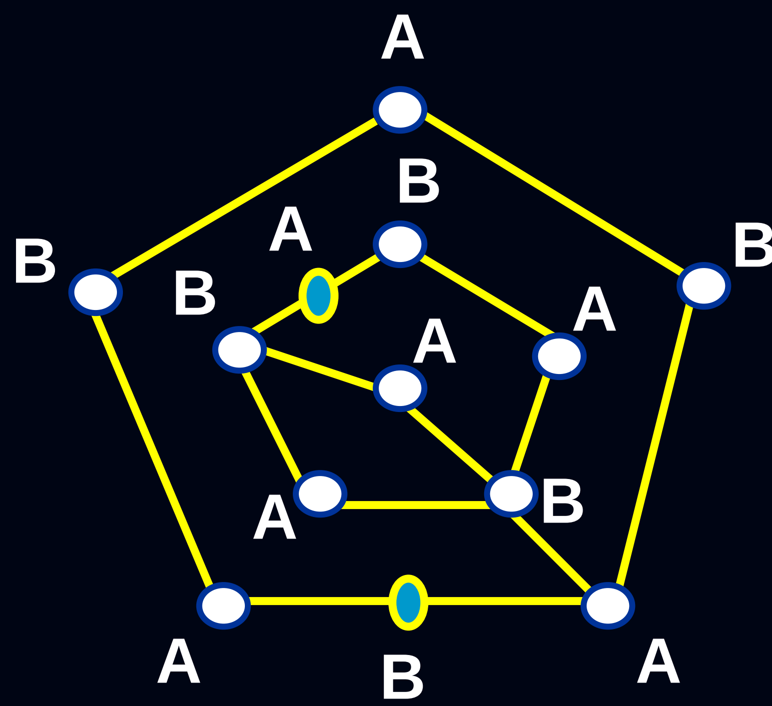
$$\therefore P(G)=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}\vee A^{(5)}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$D(G)=\begin{bmatrix}0&\infty&\infty&\infty&\infty\\1&0&1&1&\infty\\1&\infty&0&\infty&\infty\\2&\infty&1&0&\infty\\\infty&\infty&\infty&\infty&0\end{bmatrix}$$



习题详解

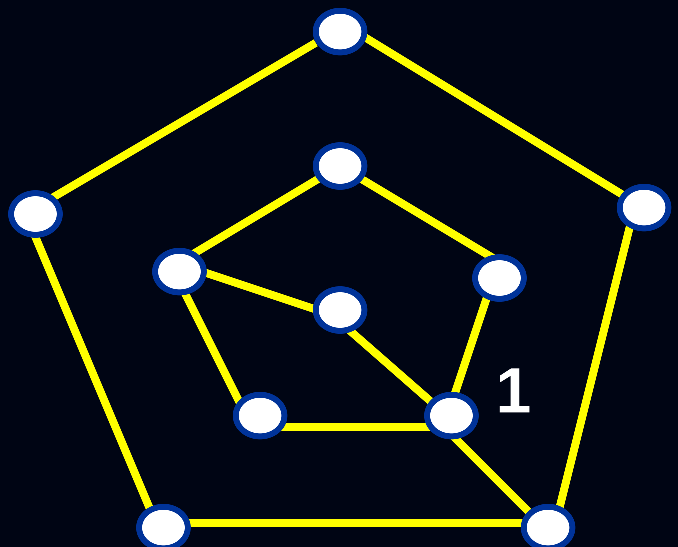
■P311 7-4 (7)： 判断下图所示的图中是否有汉密尔顿回路。



7个A， 6个B，不是汉密尔顿图。

习题详解

■换另一种方法：



令子集S={1}，则W (G-S)=2，│S│=1；

W (G-S)≤│S│不成立，因此，该图不存在汉密尔顿回路。