离散数学课后习题答案（左孝凌版）

1-1，1-2

（1） 解：

a) 是命题，真值为 T。

b) 不是命题。

c) 是命题，真值要根据具体情况确定。

d) 不是命题。

e) 是命题，真值为 T。

f) 是命题，真值为 T。

g) 是命题，真值为 F。

h) 不是命题。

i) 不是命题。

（2） 解：

原子命题：我爱北京天安门。

复合命题：如果不是练健美操，我就出外旅游拉。

（3） 解：

a) $(\neg P \wedge R)\rightarrow Q$

b) $Q\rightarrow R$

c) $\neg P$

d) $P\rightarrow\neg Q$

（4） 解：

a)设 Q:我将去参加舞会。R:我有时间。P:天下雨。

$Q\leftrightarrow(R\wedge\neg P)$:我将去参加舞会当且仅当我有时间和天不下雨。

b)设 R:我在看电视。Q:我在吃苹果。

$R\wedge Q$:我在看电视边吃苹果。

c) 设 Q:一个数是奇数。R:一个数不能被 2 除。

$(Q\rightarrow R)\wedge(R\rightarrow Q)$:一个数是奇数，则它不能被 2 整除并且一个数不能被 2 整除，则它是奇数。

(5) 解：

a) 设 P：王强身体很好。Q：王强成绩很好。$P\wedge Q$

b) 设 P：小李看书。Q：小李听音乐。$P\wedge Q$

c) 设 P：气候很好。Q：气候很热。$P\vee Q$

d) 设 P： a 和 b 是偶数。Q：a+b 是偶数。$P\rightarrow Q$

e) 设 P：四边形 ABCD 是平行四边形。Q ：四边形 ABCD 的对边平行。$P\leftrightarrow Q$

f) 设 P：语法错误。Q：程序错误。R：停机。$(P\vee Q)\rightarrow R$

(6) 解：

a) P:天气炎热。Q:正在下雨。 $P\wedge Q$

b) P:天气炎热。R:湿度较低。 $P\wedge R$

c) R:天正在下雨。S:湿度很高。 $R\vee S$

d) A:刘英上山。B:李进上山。 $A\wedge B$

e) M:老王是革新者。N:小李是革新者。 $M\vee N$

f) L:你看电影。M:我看电影。 $\neg L\rightarrow\neg M$

g) P:我不看电视。Q:我不外出。 R:我在睡觉。 $P\wedge Q\wedge R$

h) P:控制台打字机作输入设备。Q:控制台打字机作输出设备。$P\wedge Q$

1-3

（1）解：

a)　不是合式公式，没有规定运算符次序（若规定运算符次序后亦可作为合式公式）

b)　是合式公式

c)　不是合式公式（括弧不配对）

d)　不是合式公式（R 和 S 之间缺少联结词）

e)　是合式公式。

（2）解：

a）　A 是合式公式，(A∨B)是合式公式，(A→(A∨B)) 是合式公式。这个过程可以简记为：

A；(A∨B)；(A→(A∨B))

同理可记

b）　A；¬A ；(¬A∧B) ；((¬A∧B)∧A)

c）　A；¬A ；B；(¬A→B) ；(B→A) ；((¬A→B)→(B→A))

d）　A；B；(A→B) ；(B→A) ；((A→B)∨(B→A))

（3）解：

a）　((((A→C)→((B∧C)→A))→((B∧C)→A))→(A→C))

b）　((B→A)∨(A→B))。

（4）解：

a）是由 c）式进行代换得到，在 c）中用 Q 代换 P，(P→P)代换 Q.

d）是由 a）式进行代换得到，在 a）中用 P→(Q→P)代换 Q.

e）是由 b）式进行代换得到，用 R 代换 P，S 代换 Q，Q 代换 R，P 代换 S.

（5）解：

a）P：你没有给我写信。 R：信在途中丢失了。 P　Q

b）P：张三不去。Q：李四不去。R：他就去。　(P∧Q)→R

c）P：我们能划船。 Q：我们能跑步。 ¬(P∧Q)

d）P：你来了。Q：他唱歌。R：你伴奏。 P→(Q↔R)

（6）解：

P:它占据空间。 Q:它有质量。 R:它不断变化。 S:它是物质。

这个人起初主张：(P∧Q∧R) ↔ S

后来主张：(P∧Q↔S)∧(S→R)

这个人开头主张与后来主张的不同点在于：后来认为有 P∧Q 必同时有 R，开头时没有这样的主张。

（7）解：

a）P：上午下雨。 Q:我去看电影。 R:我在家里读书。 S:我在家里看报。(¬P→Q)∧(P→(R∨S))

b）P：我今天进城。Q:天下雨。¬Q→P

c）P：你走了。 Q:我留下。Q→P

1-4

（4）解：a)

P　Q　R	Q∧R	P∧(Q∧R)	P∧Q	(P∧Q)∧R

T T T	T	T	T	T
T T F	F	F	T	F
T F T	F	F	F	F
T F F	F	F	F	F
F T T	T	F	F	F
F T F	F	F	F	F
F F T	F	F	F	F
F F F	F	F	F	F

所以，P∧(Q∧R) ⇔ (P∧Q)∧R

b)

P Q R	Q∨R	P∨(Q∨R)	P∨Q	(P∨Q)∨R
T T T	T	T	T	T
T T F	T	T	T	T
T F T	T	T	T	T
T F F	F	T	T	T
F T T	T	T	T	T
F T F	T	T	T	T
F F T	T	T	F	T
F F F	F	F	F	F

所以，P∨(Q∨R) ⇔ (P∨Q)∨R

c）

P Q R	Q∨R	P∧（Q∨R）	P∧Q	P∧R	（P∧Q）∨（P∧R）
T T T	T	T	T	T	T
T T F	T	T	T	F	T
T F T	T	T	F	T	T
T F F	F	F	F	F	F
F T T	T	F	F	F	F
F T F	T	F	F	F	F
F F T	T	F	F	F	F
F F F	F	F	F	F	F

所以，P∧(Q∨R) ⇔ (P∧Q)∨(P∧R)

d）

P Q	¬P	¬Q	¬P∨¬Q	¬(P∧Q)	¬P∧¬Q	¬(P∨Q)
T T	F	F	F	F	F	F
T F	F	T	T	T	F	F
F T	T	F	T	T	F	F
F F	T	T	T	T	T	T

所以，¬(P∧Q) ⇔¬P∨¬Q， ¬(P∨Q) ⇔¬P∧¬Q

（5）解：如表，对问好所填的地方，可得公式 F_1～F_6，可表达为

P	Q	R	F1	F2	F3	F4	F5	F6

T	T	T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	T	F	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	F	T	T	T

F1: $(Q\rightarrow P)\rightarrow R$

F2: $(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

F3: $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\vee R)$

F4: $(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$

F5: $(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)$

F6: $\neg(P\vee Q\vee R)$

(6)

	Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T
	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T

解：由上表可得有关公式为

1. F　2. $\neg(P\vee Q)$　3. $\neg(Q\rightarrow P)$　4. $\neg P$

5. $\neg(P\rightarrow Q)$　6. $\neg Q$　7. $\neg(P\leftrightarrow Q)$　8. $\neg(P\wedge Q)$

9. $P\wedge Q$　10. $P\leftrightarrow Q$　11. Q　12. $P\rightarrow Q$

13. P　14. $Q\rightarrow P$　15. $P\vee Q$　16. T

(7) 证明：

a) $A\rightarrow(B\rightarrow A)\Leftrightarrow\neg A\vee(\neg B\vee A)$

$\Leftrightarrow A\vee(\neg A\vee\neg B)$

$\Leftrightarrow A\vee(A\rightarrow\neg B)$

$\Leftrightarrow\neg A\rightarrow(A\rightarrow\neg B)$

b) $\neg(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow\neg((A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))$

$\Leftrightarrow\neg((A\wedge B)\vee\neg(A\vee B))$

$\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge\neg(A\wedge B)$

或 $\neg(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow\neg((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge A)\vee(B\wedge\neg B)\vee(B\wedge A))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg A\wedge\neg B)\vee(B\wedge A))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg(A\vee B))\vee(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge\neg(A\wedge B)$

c) $\neg(A\rightarrow B)\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee B)\Leftrightarrow A\wedge\neg B$

d) $\neg(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow\neg((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A))$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$

e) $(((A\wedge B\wedge C)\rightarrow D)\wedge(C\rightarrow(A\vee B\vee D)))$

$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B\wedge C)\vee D)\wedge(\neg C\vee(A\vee B\vee D))$

$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B\wedge C)\vee D)\wedge(\neg(\neg A\wedge\neg B\wedge C)\vee D)$

$\Leftrightarrow (\neg(A\wedge B\wedge C)\wedge\neg(\neg A\wedge\neg B\wedge C))\vee D$

$\Leftrightarrow((A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge C))\rightarrow D$

$\Leftrightarrow(((A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))\wedge C)\rightarrow D$

$\Leftrightarrow((C\wedge(A\leftrightarrow B))\rightarrow D)$

f) $A\rightarrow(B\vee C)\Leftrightarrow\neg A\vee(B\vee C)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\vee C$

$\Leftrightarrow\neg(A\wedge\neg B)\vee C$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\rightarrow C$

g) $(A\rightarrow D)\wedge(B\rightarrow D)\Leftrightarrow(\neg A\vee D)\wedge(\neg B\vee D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)\vee D$

$\Leftrightarrow\neg(A\vee B)\vee D$

$\Leftrightarrow(A\vee B)\rightarrow D$

h) $((A\wedge B)\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow(D\vee C))$

$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B)\vee C)\wedge(\neg B\vee(D\vee C))$

$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B)\wedge(\neg B\vee D))\vee C$

$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B)\wedge\neg(\neg D\wedge B))\vee C$

$\Leftrightarrow\neg((A\wedge B)\vee(\neg D\wedge B))\vee C$

$\Leftrightarrow((A\vee\neg D)\wedge B)\rightarrow C$

$\Leftrightarrow(B\wedge(D\rightarrow A))\rightarrow C$

（8）解：

a) $((A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B\rightarrow\neg A))\wedge C$

$\Leftrightarrow((\neg A\vee B)\leftrightarrow(B\vee\neg A))\wedge C$

$\Leftrightarrow((\neg A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\vee B))\wedge C$

$\Leftrightarrow T\wedge C\Leftrightarrow C$

b) $A\vee(\neg A\vee(B\wedge\neg B))\Leftrightarrow(A\vee\neg A)\vee(B\wedge\neg B)\Leftrightarrow T\vee F\Leftrightarrow T$

c) $(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)$

$\Leftrightarrow(A\vee\neg A)\wedge(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow T\wedge(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow B\wedge C$

（9）解：1）设 C 为 T，A 为 T，B 为 F，则满足 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C$，但 $A\Leftrightarrow B$ 不成立。

2）设 C 为 F，A 为 T，B 为 F，则满足 $A\wedge C\Leftrightarrow B\wedge C$，但 $A\Leftrightarrow B$ 不成立。

3）由题意知$\neg A$ 和$\neg B$ 的真值相同，所以 A 和 B 的真值也相同。

习题 1-5

（1） 证明：

a) $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow(P\wedge(\neg P\vee Q))\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee Q$

$\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee Q$

$\Leftrightarrow\neg P\vee T$

$\Leftrightarrow T$

b) $\neg P\rightarrow(P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow P\vee(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(P\vee\neg P)\vee Q$

$\Leftrightarrow T\vee Q$

$\Leftrightarrow T$

c) $((P\to Q)\wedge(Q\to R))\to(P\to R)$

因为$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow(P\to R)$

所以 $(P\to Q)\wedge(Q\to R)$为重言式。

d) $((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\ \vee(c\wedge a))\leftrightarrow(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$

因为$((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a))$

$\Leftrightarrow((a\vee c)\wedge b)\vee(c\wedge a)$

$\Leftrightarrow((a\vee c)\vee(c\wedge a))\wedge(b\vee(c\wedge a))$

$\Leftrightarrow(a\vee c)\wedge(b\vee c)\wedge(b\vee a)$

所以$((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\ \vee(c\wedge a))\leftrightarrow(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$ 为重言式。

（2） 证明：

a) $(P\to Q)\Rightarrow P\to(P\wedge Q)$

解法 1：

设 $P\to Q$ 为 T

（1）若 P 为 T，则 Q 为 T，所以 $P\wedge Q$ 为 T，故 $P\to(P\wedge Q)$为 T

（2）若 P 为 F，则 Q 为 F，所以 $P\wedge Q$ 为 F，$P\to(P\wedge Q)$为 T

命题得证

解法 2：

设 $P\to(P\wedge Q)$为 F ，则 P 为 T，$(P\wedge Q)$为 F ，故必有 P 为 T，Q 为 F ，所以 $P\to Q$ 为 F。

解法 3：

$(P\to Q)\ \to(P\to(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow\neg\ (\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow\neg\ (\neg P\vee Q)\vee((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow T$

所以$(P\to Q)\Rightarrow P\to(P\wedge Q)$

b) $(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\vee Q$

设 $P\vee Q$ 为 F，则 P 为 F，且 Q 为 F，

故 $P\to Q$ 为 T，$(P\to Q)\to Q$ 为 F，

所以$(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\vee Q$。

c) $(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))\Rightarrow R\to Q$

设 $R\to Q$ 为 F，则 R 为 T，且 Q 为 F，又 $P\wedge\neg P$ 为 F

所以 $Q\to(P\wedge\neg P)$为 T，$R\to(P\wedge\neg P)$为 F

所以 $R\to(R\to(P\wedge\neg P))$为 F，所以$(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))$为 F

即$(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))\Rightarrow R\to Q$ 成立。

（3） 解：

a) $P\to Q$ 表示命题“如果 8 是偶数，那么糖果是甜的”。

b) a)的逆换式 $Q\to P$ 表示命题“如果糖果是甜的，那么 8 是偶数”。

c) a)的反换式$\neg P\to\neg Q$ 表示命题“如果 8 不是偶数，那么糖果不是甜的”。

d) a)的逆反式$\neg Q\to\neg P$ 表示命题“如果糖果不是甜的，那么 8 不是偶数”。

（4） 解：

a) 如果天下雨，我不去。

设 P：天下雨。Q：我不去。$P\to Q$

逆换式 $Q\to P$ 表示命题:如果我不去，则天下雨。

逆反式$\neg Q\to\neg P$ 表示命题:如果我去，则天不下雨

b) 仅当你走我将留下。

设 S：你走了。R：我将留下。$R\to S$

逆换式 $S\to R$ 表示命题：如果你走了则我将留下。

逆反式 $\neg S\to\neg R$ 表示命题：如果你不走，则我不留下。

c) 如果我不能获得更多帮助，我不能完成个任务。

设 E：我不能获得更多帮助。H：我不能完成这个任务。$E\to H$

逆换式 $H\to E$ 表示命题：我不能完成这个任务，则我不能获得更多帮助。

逆反式 $\neg H\to\neg E$ 表示命题：我完成这个任务，则我能获得更多帮助

（5） 试证明 $P\leftrightarrow Q$，Q 逻辑蕴含 P。

证明：解法 1：

本题要求证明 $(P\leftrightarrow Q)\wedge Q\Rightarrow P$,

设 $(P\leftrightarrow Q)\wedge Q$ 为 T，则 $(P\leftrightarrow Q)$ 为 T，Q 为 T，故由 $\leftrightarrow$ 的定义，必有 P 为 T。

所以 $(P\leftrightarrow Q)\wedge Q\Rightarrow P$

解法 2：

由体题可知，即证 $((P\leftrightarrow Q)\wedge Q)\to P$ 是永真式。

$((P\leftrightarrow Q)\wedge Q)\to P$

$\Leftrightarrow (((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\wedge Q)\to P$

$\Leftrightarrow (\neg((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\vee\neg Q)\vee P$

$\Leftrightarrow (((\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q))\vee\neg Q)\vee P$

$\Leftrightarrow ((\neg Q\vee\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg Q\vee P\vee Q))\vee P$

$\Leftrightarrow ((\neg Q\vee\neg P)\wedge T)\vee P$

$\Leftrightarrow \neg Q\vee\neg P\vee P$

$\Leftrightarrow \neg Q\vee T$

$\Leftrightarrow T$

（6） 解：

P：我学习   Q：我数学不及格   R：我热衷于玩扑克。

如果我学习，那么我数学不会不及格： $P\to\neg Q$

如果我不热衷于玩扑克，那么我将学习： $\neg R\to P$

但我数学不及格： Q

因此我热衷于玩扑克。 R

即本题符号化为：$(P\to\neg Q)\wedge(\neg R\to P)\wedge Q\Rightarrow R$

证：

证法 1：$((P\to\neg Q)\wedge(\neg R\to P)\wedge Q)\to R$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P\vee\neg Q)\wedge(R\vee P)\wedge Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg R\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R$

$\Leftrightarrow ((\neg Q\vee P)\wedge(\neg Q\vee Q))\vee((R\vee\neg R)\wedge(R\vee\neg P))$

$\Leftrightarrow \neg Q\vee P\vee R\vee\neg P$

$\Leftrightarrow T$

所以，论证有效。

证法 2：设 $(P\to\neg Q)\wedge(\neg R\to P)\wedge Q$ 为 T，

则因 Q 为 T，$(P\to\neg Q)$ 为 T，可得 P 为 F，

由 $(\neg R\to P)$ 为 T，得到 R 为 T。

故本题论证有效。

（7） 解：

P：6 是偶数   Q：7 被 2 除尽   R：5 是素数

如果 6 是偶数，则 7 被 2 除不尽 $P\to\neg Q$

或 5 不是素数，或 7 被 2 除尽 $\neg R\vee Q$

5 是素数　　　　　　　　　　　　　R

所以 6 是奇数　　　　　　　　　　　$\neg P$

即本题符号化为：$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R\Rightarrow\neg P$

证：

证法 1：$((P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R)\rightarrow\neg P$

$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R)\vee\neg P$

$\Leftrightarrow((P\wedge Q)\vee(R\wedge\neg Q)\vee\neg R)\vee\neg P$

$\Leftrightarrow((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q))\vee((\neg R\vee R)\wedge(\neg R\vee\neg Q))$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\vee(\neg R\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow T$

所以，论证有效，但实际上他不符合实际意义。

证法 2：$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R$ 为 T，

则有 R 为 T，且 $\neg R\vee Q$ 为 T，故 Q 为 T，

再由 $P\rightarrow\neg Q$ 为 T，得到 $\neg P$ 为 T。

（8）　证明：

a)　$P\Rightarrow(\neg P\rightarrow Q)$

设 P 为 T，则 $\neg P$ 为 F，故 $\neg P\rightarrow Q$ 为 T

b)　$\neg A\wedge B\wedge C\Rightarrow C$

假定 $\neg A\wedge B\wedge C$ 为 T，则 C 为 T。

c)　$C\Rightarrow A\vee B\vee\neg B$

因为 $A\vee B\vee\neg B$ 为永真，所以 $C\Rightarrow A\vee B\vee\neg B$ 成立。

d)　$\neg(A\wedge B)\Rightarrow\neg A\vee\neg B$

设 $\neg(A\wedge B)$ 为 T，则 $A\wedge B$ 为 F。

若 A 为 T，B 为 F，则 $\neg A$ 为 F，$\neg B$ 为 T，故 $\neg A\vee\neg B$ 为 T。

若 A 为 F，B 为 T，则 $\neg A$ 为 T，$\neg B$ 为 F，故 $\neg A\vee\neg B$ 为 T。

若 A 为 F，B 为 F，则 $\neg A$ 为 T，$\neg B$ 为 T，故 $\neg A\vee\neg B$ 为 T。

命题得证。

e)　$\neg A\rightarrow(B\vee C)$，$D\vee E$，$(D\vee E)\rightarrow\neg A\Rightarrow B\vee C$

设 $\neg A\rightarrow(B\vee C)$，$D\vee E$，$(D\vee E)\rightarrow\neg A$ 为 T，

则 $D\vee E$ 为 T，$(D\vee E)\rightarrow\neg A$ 为 T，所以 $\neg A$ 为 T

又 $\neg A\rightarrow(B\vee C)$ 为 T，所以 $B\vee C$ 为 T。命题得证。

f)　$(A\wedge B)\rightarrow C$，$\neg D$，$\neg C\vee D\Rightarrow\neg A\vee\neg B$

设 $(A\wedge B)\rightarrow C$，$\neg D$，$\neg C\vee D$ 为 T，则 $\neg D$ 为 T，$\neg C\vee D$ 为 T，所以 C 为 F

又 $(A\wedge B)\rightarrow C$ 为 T，所以 $A\wedge B$ 为 F，所以 $\neg A\vee\neg B$ 为 T。命题得证。

（9）解：

a)　如果他有勇气，他将得胜。

P：他有勇气　　　　　Q：他将得胜

原命题：$P\rightarrow Q$　　　　逆反式：$\neg Q\rightarrow\neg P$ 表示：如果他失败了，说明他没勇气。

b)　仅当他不累他将得胜。

P：他不累　　　　　Q：他得胜

原命题：$Q\rightarrow P$　　　　逆反式：$\neg P\rightarrow\neg Q$ 表示：如果他累，他将失败。

习题　1-6

(1)解：

a)　$(P\wedge Q)\wedge\neg P\Leftrightarrow(P\wedge\neg P)\wedge Q\Leftrightarrow\neg(T\vee Q)$

b)　$(P\rightarrow(Q\vee\neg R))\wedge\neg P\wedge Q$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee(Q\vee\neg R))\wedge\neg P\wedge Q$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge\neg P\wedge Q)\vee(\neg R\wedge\neg P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg R\wedge Q)$

$\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$

$\Leftrightarrow\neg(P\vee\neg Q)$

c) $\neg P\wedge\neg Q\wedge(\neg R\rightarrow P)$

$\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q\wedge(R\vee P)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge P)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee F$

$\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q\wedge R$

$\Leftrightarrow\neg(P\vee Q\vee\neg R)$

(2) 解：

a) $\neg P\Leftrightarrow P\downarrow P$

b) $P\vee Q\Leftrightarrow\neg(P\downarrow Q)\Leftrightarrow(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)$

c) $P\wedge Q\Leftrightarrow\neg P\downarrow\neg Q\Leftrightarrow(P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q)$

(3)解：

$P\rightarrow(\neg P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow\neg P\vee P$

$\Leftrightarrow(\neg P\uparrow\neg P)\uparrow(P\uparrow P)$

$\Leftrightarrow P\uparrow(P\uparrow P)$

$P\rightarrow(\neg P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow\neg P\vee P$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\downarrow P)$

$\Leftrightarrow\neg((P\downarrow P)\downarrow P)$

$\Leftrightarrow((P\downarrow P)\downarrow P)\downarrow((P\downarrow P)\downarrow P)$

(4)解：

$P\uparrow Q$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\downarrow\neg Q)$

$\Leftrightarrow\neg((P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q))$

$\Leftrightarrow((P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q))\downarrow((P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q))$

(5)证明：

$\neg(B\uparrow C)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg B\vee\neg C)$

$\Leftrightarrow\neg B\downarrow\neg C$

$\neg(B\downarrow C)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg B\wedge\neg C)$

$\Leftrightarrow\neg B\uparrow\neg C$

(6)解：联结词“↑”和“↓”不满足结合律。举例如下：

a)给出一组指派：P为T，Q为F，R为F，则$(P\uparrow Q)\uparrow R$为T，$P\uparrow(Q\uparrow R)$为F

故 $(P\uparrow Q)\uparrow R\not\Leftrightarrow P\uparrow(Q\uparrow R)$.

b)给出一组指派：P为T，Q为F，R为F，则$(P\downarrow Q)\downarrow R$为T，$P\downarrow(Q\downarrow R)$为F

故(P↓Q)↓R　　P↓(Q↓R).

(7)证明：

设变元 P，Q，用连结词↔,¬ 作用于 P，Q 得到：P，Q，¬ P，¬ Q，P↔Q，P↔P，Q↔Q，Q↔P。

但 P↔Q⇔Q↔P，P↔P⇔Q↔Q，故实际有：

P，Q，¬ P，¬ Q，P↔Q，P↔P（T）　　　　　　　　　　　　　　　（A）

用¬ 作用于（A）类，得到扩大的公式类（包括原公式类）：

P，Q，¬ P，¬ Q，¬ （P↔Q），　T，F，　P↔Q　　　　　　　　　　（B）

用↔作用于（A）类，得到：

P↔Q，P↔¬ P⇔F，P↔¬ Q⇔¬ （P↔Q），P↔（P↔Q）⇔Q，P↔（P↔P）⇔P，

Q↔¬ P⇔¬ （P↔Q），Q↔¬ Q⇔F，Q↔（P↔Q）⇔P，Q↔T⇔Q,

¬ P↔¬ Q⇔P↔Q，¬ P↔（P↔Q）⇔¬ Q，¬ P↔T⇔¬ P,

¬ Q↔（P↔Q）⇔¬ P，¬ Q↔T⇔¬ Q,

（P↔Q）↔（P↔Q）⇔P↔Q.

因此，（A）类使用运算后，仍在（B）类中。

对（B）类使用¬ 运算得：

¬ P，¬ Q，P，Q，　P↔Q，　F，T，

¬ （P↔Q），

仍在（B）类中。

对（B）类使用↔运算得：

P↔Q，P↔¬ P⇔F，P↔¬ Q⇔¬ （P↔Q），P↔¬ （P↔Q）⇔¬ Q，P↔T⇔P，P↔F⇔¬ P，P↔（P↔Q）⇔Q，

Q↔¬ P⇔¬ （P↔Q），Q↔¬ Q⇔F，Q↔¬ （P↔Q）⇔¬ P，Q↔T⇔Q, Q↔F⇔¬ Q，　Q↔（P↔Q）⇔P，

¬ P↔¬ Q⇔P↔Q，¬ P↔¬ （P↔Q）⇔Q，¬ P↔T⇔¬ P, ¬ P↔F⇔P,¬ P↔（P↔Q）⇔¬ Q，

¬ Q↔¬ （P↔Q）⇔P，¬ Q↔T⇔¬ Q, ¬ Q↔T⇔¬ Q,¬ Q↔（P↔Q）⇔¬ P，

¬ （P↔Q）↔T⇔¬ （P↔Q），¬ （P↔Q）↔F⇔P↔Q，¬ （P↔Q）↔（P↔Q）⇔F

T↔F⇔F，T↔（P↔Q）⇔ P↔Q

F↔（P↔Q）⇔ ¬ （P↔Q）

（P↔Q）↔（P↔Q）⇔P↔Q.

故由（B）类使用↔运算后，结果仍在（B）中。

由上证明：用↔,¬ 两个连结词，反复作用在两个变元的公式中，结果只能产生（B）类中的公式，总共仅八个不同的公式，故{↔,¬ }不是功能完备的，更不能是最小联结词组。

已证{↔,¬ }不是最小联结词组，又因为 P $\overline{\vee}$ Q⇔ ¬ （P↔Q），故任何命题公式中的联结词，如仅用{　　，¬ }表达，则必可用{↔,¬ }表达，$\overline{\vee}$其逆亦真。故{　　，¬ }也必不是最小联结词组。　$\overline{\vee}$

(8)证明{∨}，{∧}和{→}不是最小联结词组。

证明：若{∨}，{∧}和{→}是最小联结词，则

¬ P⇔（P∨P∨……）

¬ P⇔（P∧P∧……）

¬ P⇔P→(P→(P→……)

对所有命题变元指派 T，则等价式左边为 F，右边为 T，与等价表达式矛盾。

所以{∨}，{∧}和{→}不是最小联结词。

(9)证明{¬ ,→}和{¬ ,　}是最小联结词组。

证明：因为{¬ ,∨}为最小联结词组，且 P∨Q⇔¬ P→Q

所以{¬ ,→}是功能完备的联结词组，又{¬ },{→}都不是功能完备的联结词组。

所以{¬ ,→}是最小联结词组。

又因为 P→Q⇔¬ (P　Q)，所以{¬ ,　}是功能完备的联结词组，又{¬ },{　}不是功能完备的联结词组，

所以{¬ ,　}是最小联结词组。

习题 1-7

（1）解：

$P\wedge(P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)$

$P\wedge(P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee(\neg Q\wedge Q))\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)$

(2) 解：

a) $(\neg P\wedge Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\wedge Q)\vee R$

$\Leftrightarrow P\vee\neg Q\vee R$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)\vee(R\wedge P)\vee(R\wedge\neg P)$

b) $P\rightarrow((Q\wedge R)\rightarrow S)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg(Q\wedge R)\vee S)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee\neg R\vee S$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg R\wedge S)\vee(\neg R\wedge\neg S)\vee(S\wedge P)\vee(S\wedge\neg P)$

c) $\neg(P\vee\neg Q)\wedge(S\rightarrow T)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)\wedge(\neg S\vee T)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q\wedge\neg S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge T)$

d) $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee R$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee R$

$\Leftrightarrow(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$

e) $\neg(P\wedge Q)\wedge(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge P)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg Q\wedge P)\vee(\neg Q\wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q)\vee(\neg Q\wedge P)$

（3）解：

a) $P\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow(P\vee\neg P)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

$\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

b) $\neg(P\rightarrow Q)\vee(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(P\vee P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P\vee Q)$

c) $\neg(P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$

$\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg Q\vee\neg P)$

d) $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$

e) $(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\wedge(Q\vee P)\wedge(Q\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\wedge(Q\vee P)$

（4）解：

a) $(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow(P\leftrightarrow\neg Q)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee(P\leftrightarrow\neg Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow\sum_{1,2,3}$

$\Leftrightarrow P\vee Q=\Pi_0$

b) $Q\wedge(P\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(Q\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge Q=\sum_3$

$\Leftrightarrow\Pi_{0,1,2}$

$\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)$

c) $P\vee(\neg P\rightarrow(Q\vee(\neg Q\rightarrow R))$

$\Leftrightarrow P\vee(P\vee(Q\vee(Q\vee R))$

$\Leftrightarrow P\vee Q\vee R=\Pi_0$

$\Leftrightarrow\sum_{1,2,3,4,5,6,7}$

$=(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

d) $(P\rightarrow(Q\wedge R))\wedge(\neg P\rightarrow(\neg Q\wedge\neg R))$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee(Q\wedge R))\wedge(P\vee(\neg Q\wedge\neg R))$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg P)\vee(P\wedge(Q\wedge R))\vee((\neg Q\wedge\neg R)\wedge\neg P)\vee((\neg Q\wedge\neg R)\wedge(Q\wedge R))$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)=\sum_{0,7}$

$\Leftrightarrow\Pi_{1,2,3,4,5,6}$

$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

e) $P\rightarrow(P\wedge(Q\rightarrow P)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(P\wedge(\neg Q\vee P)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee P)$

$\Leftrightarrow T\vee(T\wedge\neg Q)\Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow\sum_{0,1,2,3}=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$

f) $(Q\rightarrow P)\wedge(\neg P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg Q\vee P)\wedge\neg P\wedge Q$

$\Leftrightarrow(\neg Q\vee P)\wedge\neg(P\vee\neg Q)\Leftrightarrow F$

$\Leftrightarrow\Pi_{0,1,2,3}=(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$

（5）证明：

a)

$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow C)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)$

$A\rightarrow(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow\neg A\vee(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)$

b)

$(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee B)\vee(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow A\wedge(B\vee\neg B)$

$\Leftrightarrow A\wedge T$

$\Leftrightarrow A$

$(\neg A\to B)\ \wedge(B\to A)$

$\Leftrightarrow\ (A\vee B)\ \wedge(\neg B\vee A)$

$\Leftrightarrow A\vee(B\wedge\neg B)$

$\Leftrightarrow A\vee F$

$\Leftrightarrow A$

c)

$A\wedge B\wedge(\neg A\vee\neg B)$

$\Leftrightarrow\ ((A\wedge\neg A)\vee(A\wedge\neg B))\wedge B$

$\Leftrightarrow A\wedge B\wedge\neg B$

$\Leftrightarrow F$

$\neg A\wedge\neg B\wedge(A\vee B)$

$\Leftrightarrow\ ((\neg A\wedge A)\vee(\neg A\wedge B))\wedge\neg B$

$\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B\wedge B$

$\Leftrightarrow F$

d)

$A\vee(A\to(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow A\vee\neg A\vee(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow T$

$\neg A\vee\neg B\vee(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow\neg(A\wedge B)\ \vee(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow T$

(6)解：$A\Leftrightarrow R\uparrow(Q\wedge\neg(R\downarrow P))$，则 $A^*\Leftrightarrow R\downarrow(Q\vee\neg(R\uparrow P))$

$A\Leftrightarrow R\uparrow(Q\wedge\neg(R\downarrow P))$

$\Leftrightarrow\neg(R\wedge(Q\wedge(R\vee P)))$

$\Leftrightarrow\neg R\vee\neg Q\vee\neg(R\vee P)$

$\Leftrightarrow\neg(R\wedge Q)\ \vee\neg(R\vee P)$

$A^*\Leftrightarrow R\downarrow(Q\vee\neg(R\uparrow P))$

$\Leftrightarrow\neg(R\vee(Q\vee(R\wedge P))$

$\Leftrightarrow\neg R\wedge\neg Q\wedge\neg(R\wedge P)$

$\Leftrightarrow\neg(R\vee Q)\ \wedge\neg(R\wedge P)$

(7) 解：设 A：A 去出差。B：B 去出差。C：C 去出差。D：D 去出差。

若 A 去则 C 和 D 中要去一个。　　$A\to(C\,\overline{\vee}\,D)$

B 和 C 不能都去。　　$\neg(B\wedge C)$

C 去则 D 要留下。　　$C\to\neg D$

按题意应有：$A\to(C\,\overline{\vee}\,D)$，$\neg(B\wedge C)$，$C\to\neg D$ 必须同时成立。

因为 $C\,\overline{\vee}\,D\ \Leftrightarrow\ (C\wedge\neg D)\ \vee(D\wedge\neg C)$

故 $(A\to(C\,\overline{\vee}\,D))\wedge\neg(B\wedge C)\ \wedge(C\to\neg D)$

$\Leftrightarrow\ (\neg A\vee(C\wedge\neg D)\ \vee(D\wedge\neg C))\ \wedge\neg(B\wedge C)\ \wedge(\neg C\vee\neg D)$

$\Leftrightarrow\ (\neg A\vee(C\wedge\neg D)\ \vee(D\wedge\neg C))\ \wedge(\neg B\vee\neg C)\ \wedge(\neg C\vee\neg D)$

$\Leftrightarrow\ (\neg A\vee(C\wedge\neg D)\ \vee(D\wedge\neg C))\ \wedge((\neg B\wedge\neg C)\ \vee(\neg B\wedge\neg D)\ \vee(\neg C\wedge\neg D)\ \vee\neg C)$

$\Leftrightarrow\ \underline{(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)}\ \vee\underline{(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg D)}\ \vee\underline{(\neg A\wedge\neg C\wedge\neg D)}\ \vee(\neg A\wedge\neg C)$

$\vee(\neg B\wedge\neg C\wedge D)\ \vee\underline{(\neg C\wedge D\wedge\neg B\wedge\neg D)}\ \vee\underline{(\neg C\wedge D\wedge\neg C\wedge\neg D)}$

∨(¬ C∧D∧¬ C) ∨(¬ D∧C∧¬ B∧¬ C) ∨(¬ D∧C∧¬ B∧¬ D)

∨(¬ D∧C∧¬ C∧¬ D) ∨(¬ D∧C∧¬ C)

在上述的析取范式中，有些（画线的）不符合题意，舍弃，得

(¬ A∧¬ C) ∨(¬ B∧¬ C∧D) ∨ (¬ C∧D) ∨(¬ D∧C∧¬ B)

故分派的方法为：B∧D ，或 D∧A，或 C∧A。

(8) 解：设 P：A 是第一。Q：B 是第二。R：C 是第二。S：D 是第四。E：A 是第二。

由题意得 $(P\overline{\vee}Q)\wedge(R\overline{\vee}S)\wedge(E\overline{\vee}S)$

⇔ ((P∧¬ Q) ∨(¬ P∧Q)) ∧((R∧¬ S) ∨(¬ R∧S)) ∧((E∧¬ S) ∨(¬ E∧S))

⇔ ((P∧¬ Q∧R∧¬ S) ∨(P∧¬ Q∧¬ R∧S) ∨(¬ P∧Q∧R∧¬ S) ∨(¬ P∧Q∧¬ R∧S))∧((E∧¬ S)∨(¬ E∧S))

因为 (P∧¬ Q∧¬ R∧S)与(¬ P∧Q∧R∧¬ S)不合题意，所以原式可化为

((P∧¬ Q∧R∧¬ S) ∨(¬ P∧Q∧¬ R∧S))∧((E∧¬ S) ∨(¬ E∧S))

⇔ (P∧¬ Q∧R∧¬ S∧E∧¬ S) ∨(P∧¬ Q∧R∧¬ S∧¬ E∧S) ∨(¬ P∧Q∧¬ R∧S∧E∧¬ S)∨(¬ P∧Q∧¬ R∧S∧¬ E∧S)

⇔ (P∧¬ Q∧R∧¬ S∧E) ∨(¬ P∧Q∧¬ R∧S∧¬ E)

因 R 与 E 矛盾，故¬ P∧Q∧¬ R∧S∧¬ E 为真，

即 A 不是第一，B 是第二，C 不是第二，D 为第四，A 不是第二。

于是得： A 是第三 B 是第二 C 是第一 D 是第四。

习题 1-8

(1)证明：

a)¬ (P∧¬ Q)，¬ Q∨R，¬ R⇒¬ P

(1)	¬ R	P
(2)	¬ Q∨R	P
(3)	¬ Q	(1)(2)T,I
(4)	¬ (P∧¬ Q)	P
(5)	¬ P∨Q	(4)T,E
(6)	¬ P	(3)(5)T,I

b)J→(M∨N)，(H∨G)→J，H∨G⇒M∨N

(1)	(H∨G) →J	P
(2)	(H∨G)	P
(3)	J	(1)(2)T,I
(4)	J→(M∨N)	P
(5)	M∨N	(3)(4)T,I

c)B∧C，(B↔C)→(H∨G) ⇒G∨H

(1)	B∧C	P
(2)	B	(1)T,I
(3)	C	(1)T,I
(4)	B∨¬ C	(2)T,I
(5)	C∨¬ B	(3)T,I
(6)	C→B	(4)T,E
(7)	B→C	(5)T,E
(8)	B↔C	(6)(7)T,E
(9)	(B↔C) →(H∨G)	P
(10)	H∨G	(8)(9)T,I

d)P→Q，(¬ Q∨R)∧¬ R，¬ (¬ P∧S) ⇒¬ S

(1) (¬ Q∨R) ∧¬ R

(2) ┐Q∨R (1)T,I

(3) ┐R (1)T,I

(4) ┐Q (2)(3)T,I

(5) P→Q P

(6) ┐P (4)(5)T,I

(7) ┐(┐P∧┐S) P

(8) P∨┐S (7)T,E

(9) ┐S (6)(8)T,I

(2) 证明:

a)┐A∨B,C→┐B⇒A→┐C

(1) ┐(A→┐C) P

(2) A (1)T,I

(3) C (1)T,I

(4) ┐A∨B P

(5) B (2)(4)T,I

(6) C→┐B P

(7) ┐B (3)(6)T,I

(8) B∧┐B 矛盾。(5),(7)

b)A→(B→C),(C∧D)→E,┐F→(D∧┐E) ⇒A→(B→F)

(1) ┐(A→(B→F)) P

(2) A (1)T,I

(3) ┐(B→F) (1)T,I

(4) B (3)T,I

(5) ┐F (3)T,

(6) A→(B→C) P

(7) B→C (2)(6)T,I

(8) C (4)(7)T,I

(9) ┐F→(D∧┐E) P

(10) D∧┐E (5)(9)T,I

(11) D (10)T,I

(12) C∧D (8)(11)T,I

(13) (C∧D) →E P

(14) E (12)(13)T,I

(15) ┐E (10)T,I

(16) E∧┐E 矛盾。(14),(15)

c)A∨B→C∧D,D∨E→F⇒A→F

(1) ┐(A→F) P

(2) A (1)T,I

(3) ┐F (1)T,I

(4) A∨B (2)T,I

(5) (A∨B) →C∧D P

(6) C∧D (4)(5)T,I

(7) C (6)T,I

(8) D (6)T,I

(9) D∨E (8)T,I

(10) D∨E→F P

(11) F　　　　(9)(10)T,I

(12) F∧┐F　　　　矛盾。(3),(11)

d)A→(B∧C)，┐B∨D，(E→┐F)→┐D，B→(A∧┐E)　⇒B→E

(1) ┐(B→E)　　　　P

(2) B　　　　(1)T,I

(3) ┐E　　　　(1)T,I

(4) ┐B∨D　　　　P

(5) D　　　　(2)(4)T,I

(6) (E→┐F)→┐D　　　　P

(7) ┐(E→┐F)　　　　(5)(6)T,I

(8) E　　　　(7)T,I

(9) E∧┐E　　　　矛盾

e)(A→B)∧(C→D)，(B→E)∧(D→F)，┐(E∧F)，A→C⇒┐A

(1) (A→B)∧(C→D)　　　　P

(2) A→B　　　　(1)T,I

(3) (B→E)∧(D→F)　　　　P

(4) B→E　　　　(3)T,I

(5) A→E　　　　(2)(4)T,I

(6) ┐(E∧F)　　　　P

(7) ┐E∨┐F　　　　(6)T,E

(8) E→┐F　　　　(7)T,E

(9) A→┐F　　　　(5)(8)T,I

(10) C→D　　　　(1)T,I

(11) D→F　　　　(3)T,I

(12) C→F　　　　(10)(10)T,I

(13) A→C　　　　P

(14) A→F　　　　(13)(12)T,I

(15) ┐F→┐A　　　　(14)T,E

(16) A→┐A　　　　(9)(15)T,I

(17) ┐A∨┐A　　　　(16)T,E

(18) ┐A　　　　(17) T,E

(3)　证明：

a)┐A∨B，C→┐B⇒A→┐C

(1) A　　　　P

(2) ┐A∨B　　　　P

(3) B　　　　(1)(2)T,I

(4) C→┐B　　　　P

(5) ┐C　　　　(3)(4)T,I

(6) A→┐C　　　　CP

b)A→(B→C)，(C∧D)→E，┐F→(D∧┐E)　⇒A→(B→F)

(1) A　　　　P

(2) A→(B→C)　　　　P

(3) B→C　　　　(1)(2)T,I

(4) B　　　　P

(5) C　　　　(3)(4)T,I

(6) (C∧D)→E　　　　P

(7) C→(D→E) (6)T,E

(8) D→E (5)(7)T,I

(9) ┐D∨E (8)T,E

(10) ┐(D∧┐E) (9)T,E

(11) ┐F→(D∧┐E) P

(12) F (10)(11)T,I

(13) B→F CP

(14) A→(B→F) CP

c)A∨B→C∧D，D∨E→F⇒A→F

(1) A P

(2) A∨B (1)T,I

(3) A∨B→C∨D P

(4) C∧D (2)(3)T,I

(5) D (4)T,I

(6) D∨E (5)T,I

(7) D∨E→F P

(8) F (6)(7)T,I

(9) A→F CP

d)A→(B∧C)，┐B∨D，(E→┐F)→┐D，B→(A∧┐E) ⇒B→E

(1) B P(附加前提)

(2) ┐B∨D P

(3) D (1)(2)T,I

(4) (E→┐F)→┐D P

(5) ┐(E→┐F) (3)(4)T,I

(6) E (5)T,I

(7) B→E CP

(4)证明：

a) R→┐Q，R∨S，S→┐Q，P→Q⇒┐P

(1) R→┐Q P

(2) R∨S P

(3) S→┐Q P

(4) ┐Q (1)(2)(3)T,I

(5) P→Q P

(6) ┐P (4)(5)T,I

b) S→┐Q，S∨R，┐R，┐P↔Q⇒P

证法一：

(1) S∨R P

(2) ┐R P

(3) S (1)(2)T,I

(4) S→┐Q P

(5) ┐Q (3)(4)T,I

(6) ┐P↔Q P

(7)(┐P→Q)∧(Q→┐P) (6)T,E

(8) ┐P→Q (7)T,I

(9) P (5)(8)T,I

证法二：（反证法）

(1) $\neg P$　P（附加前提）

(2) $\neg P\leftrightarrow Q$　P

(3) $(\neg P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow\neg P)$　(2)T，E

(4) $\neg P\rightarrow Q$　(3)T,I

(5) Q　(1)(4)T,I

(6) $S\rightarrow\neg Q$　P

(7) $\neg S$　(5)(6)T,I

(8) $S\vee R$　P

(9) R　(7)(8)T,I

(10) $\neg R$　P

(11) $\neg R\wedge R$　矛盾（9）（10）T，I

c) $\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S)$，$((Q\rightarrow P)\vee\neg R)$，$R\Rightarrow P\leftrightarrow Q$

(1) R　P

(2) $(Q\rightarrow P)\vee\neg R$　P

(3) $Q\rightarrow P$　(1)(2)T,I

(4) $\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S)$　P

(5) $(R\vee S)\rightarrow(P\rightarrow Q)$　(4)T,E

(6) $R\vee S$　(1)T,I

(7) $P\rightarrow Q$　(5)(6)

(8) $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$　(3)(7)T,I

(9) $P\leftrightarrow Q$　(8)T,E

(5) 解：

a) 设P：我跑步。Q：我很疲劳。

前提为：$P\rightarrow Q$，$\neg Q$

(1) $P\rightarrow Q$　P

(2) $\neg Q$　P

(3) $\neg P$　(1)(2)T,I

结论为：$\neg P$，我没有跑步。

b) 设S：他犯了错误。 R：他神色慌张。

前提为：$S\rightarrow R$，R

因为 $(S\rightarrow R)\wedge R\Leftrightarrow(\neg S\vee R)\wedge R\Leftrightarrow R$。故本题没有确定的结论。

实际上，若 $S\rightarrow R$ 为真，R 为真,则 S 可为真，S 也可为假，故无有效结论。

c) 设P：我的程序通过。 Q：我很快乐。

R：阳光很好。　S：天很暖和。(把晚上十一点理解为阳光不好)

前提为：$P\rightarrow Q$，$Q\rightarrow R$，$\neg R\wedge S$

(1) $P\rightarrow Q$　P

(2) $Q\rightarrow R$　P

(3) $P\rightarrow R$　(1)(2)T,I

(4) $\neg R\vee S$　P

(5) $\neg R$　(4)T,I

(6) $\neg P$　(3)(5)T,I

结论为： $\neg P$，我的程序没有通过

习题 2-1,2-2

(1)　解：

a) 设W(x)：x 是工人。c：小张。

则有 $\neg W(c)$

b) 设 S（x）：x 是田径运动员。B（x）：x 是球类运动员。h：他

则有 $S(h) \vee B(h)$

c) 设 C（x）：x 是聪明的。B（x）：x 是美丽的。l：小莉。

则有 $C(l) \wedge B(l)$

d) 设 O（x）：x 是奇数。

则有 $O(m) \rightarrow \neg O(2m)$。

e)设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。

则有 $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$

f) 设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。

则有 $(\exists x)(R(x) \wedge Q(x))$

g) 设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。

则有 $\neg(\forall x)(R(x) \rightarrow Q(x))$

h)设 P（x，y）：直线 x 平行于直线 y

G（x，y）：直线 x 相交于直线 y。

则有 $P(A, B) \leftrightarrows \neg G(A, B)$

（2） 解：

a) 设 J(x)：x 是教练员。L(x)：x 是运动员。

则有 $(\forall x)(J(x) \rightarrow L(x))$

b) 设 S(x)：x 是大学生。L(x)：x 是运动员。

则有 $(\exists x)(L(x) \wedge S(x))$

c) 设 J(x)：x 是教练员。O(x)：x 是年老的。V（x）：x 是健壮的。

则有 $(\exists x)(J(x) \wedge O(x) \wedge V(x))$

d) 设 O(x)：x 是年老的。V（x）：x 是健壮的。j：金教练

则有 $\neg O(j) \wedge \neg V(j)$

e) 设 L(x)：x 是运动员。J(x)：x 是教练员。

则 $\neg(\forall x)(L(x) \rightarrow J(x))$

本题亦可理解为：某些运动员不是教练。

故 $(\exists x)(L(x) \wedge \neg J(x))$

f) 设 S（x）：x 是大学生。L（x）：x 是运动员。C（x）：x 是国家选手。

则有 $(\exists x)(S(x) \wedge L(x) \wedge C(x))$

g) 设 C（x）：x 是国家选手。V（x）：x 是健壮的。

则有 $(\forall x)(C(x) \rightarrow V(x))$ 或 $\neg(\exists x)(C(x) \wedge \neg V(x))$

h) 设 C（x）：x 是国家选手。O（x）：x 是老的。L（x）：x 是运动员。

则有 $(\forall x)(O(x) \wedge C(x) \rightarrow L(x))$

i) 设 W（x）：x 是女同志。H（x）：x 是家庭妇女。C（x）：x 是国家选手。

则有 $\neg(\exists x)(W(x) \wedge C(x) \wedge H(x))$

j) W（x）：x 是女同志。J（x）：x 是教练。C（x）：x 是国家选手。

则有 $(\exists x)(W(x) \wedge J(x) \wedge C(x))$

k) L（x）：x 是运动员。J（y）：y 是教练。A(x,y)：x 钦佩 y。

则有 $(\forall x)(L(x) \rightarrow (\exists y)(J(y) \wedge A(x, y)))$

l) 设 S（x）：x 是大学生。L（x）：x 是运动员。A(x,y)：x 钦佩 y。

则 $(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(L(y) \rightarrow \neg A(x,y)))$

习题 2-3

（1）解：

a）5 是质数。

b）2 是偶数且 2 是质数。

c）对所有的 x，若 x 能被 2 除尽，则 x 是偶数。

d）存在 x，x 是偶数，且 x 能除尽 6。（即某些偶数能除尽 6）

e）对所有的 x，若 x 不是偶数，则 x 不能被 2 除尽。

f）对所有的 x，若 x 是偶数，则对所有的 y，若 x 能除尽 y，则 y 也是偶数。

g）对所有的 x，若 x 是质数，则存在 y，y 是偶数且 x 能除尽 y（即所有质数能除尽某些偶数）。

h）对所有的 x，若 x 是奇数，则对所有 y，y 是质数，则 x 不能除尽 y（即任何奇数不能除尽任何质数）。

（2）解：$(\forall x)(\forall y)((P(x)\wedge P(y)\wedge\neg E(x,y)\rightarrow(\exists! z)(L(z)\wedge R(x,y,z)))$

或 $(\forall x)(\forall y)((P(x)\wedge P(y)\wedge\neg E(x,y)\rightarrow(\exists z)(L(z)\wedge R(x,y,z)\wedge\neg(\exists u)(\neg E(z,u)\wedge L(u)\wedge R(x,y,u))))$

（3）解：

a) 设 N(x):x 是有限个数的乘积。 z(y):y 为 0。

P(x):x 的乘积为零。 F(y):y 是乘积中的一个因子。

则有 $(\forall x)((N(x)\wedge P(x)\rightarrow(\exists y)(F(y)\wedge z(y)))$

b) 设 R(x):x 是实数。Q(x,y):y 大于 x。 故 $(\forall x)(R(x)\rightarrow(\exists y)(Q(x,y)\wedge R(y)))$

c) R(x):x 是实数。G(x,y):x 大于 y。 则

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(R(x)\wedge R(y)\wedge R(z)\wedge G(x+y,x\cdot z)$

（4）解：设 G(x,y):x 大于 y。则有 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(G(y,x)\wedge G(0,z)\rightarrow G(x\cdot z,y\cdot z))$

（5）解：设 N(x):x 是一个数。 S(x,y):y 是 x 的后继数。E(x,y)：x=y.则

a) $(\forall x)(N(x)\rightarrow(\exists! y)(N(y)\wedge S(x,y)))$

或$(\forall x)(N(x)\rightarrow(\exists y)(N(y)\wedge S(x,y)\wedge\neg(\exists z)(\neg E(y,z)\wedge N(z)\wedge S(x,z))))$

b) $\neg(\exists x)(N(x)\wedge S(x,1))$

c) $(\forall x)(N(x)\wedge\neg S(x,2)\rightarrow(\exists! y)(N(y)\wedge S(y,x)))$

或$(\forall x)(N(x)\wedge\neg S(x,2)\rightarrow(\exists y)(N(y)\wedge S(y,x)\wedge\neg(\exists z)(\neg E(y,z)\wedge N(z)\wedge S(z,x))))$

（6）解：设 S(x):x 是大学生。 E(x):x 是戴眼睛的。

F(x):x 是用功的。 R(x,y):x 在看 y。

G(y):y 是大的。 K(y):y 是厚的。 J(y):y 是巨著。 a:这本。 b:那位。

则有 $E(b)\wedge F(b)\wedge S(b)\wedge R(b,a)\wedge G(a)\wedge K(a)\wedge J(a)$

（7）解：设 P(x,y):x 在 y 连续。 Q(x,y):x>y。则

$P(f,a)\leftrightarrows((\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(Q(\varepsilon,0)\rightarrow(Q(\delta,0)\wedge Q(\delta,|x-a|)\rightarrow Q(\varepsilon,|f(x)-f(a)|))))$

习题 2-4

(1) 解：a) x 是约束变元，y 是自由变元。

b) x 是约束变元，$P(x)\wedge Q(x)$中的 x 受全称量词∀的约束，S(x)中的 x 受存在量词∃的约束。

c) x，y 都是约束变元,P(x)中的 x 受∃的约束，R(x)中的 x 受∀的约束。

d) x，y 是约束变元，z 是自由变元。

(2) 解：a) $P(a)\wedge P(b)\wedge P(c)$

b) $R(a)\wedge R(b)\wedge R(c)\wedge S(a)\wedge S(b)\wedge S(c)$

c) $(P(a)\rightarrow Q(a))\wedge(P(b)\rightarrow Q(b))\wedge(P(c)\rightarrow Q(c)$

d) $(\neg P(a)\wedge\neg P(b)\wedge\neg P(c))\vee(P(z)\wedge P(b)\wedge P(c))$

e) $(R(a)\wedge R(b)\wedge R(c))\wedge(S(a)\vee S(b)\vee S(c))$

(3) 解：

a) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(P(1)\vee Q(1))\wedge(P(2)\vee Q(2))$,

但 P(1)为 T，Q(1)为 F，P(2)为 F，Q(2)为 T,所以

$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(T\vee F)\wedge(F\vee T)\quad\Leftrightarrow T$。

b) $(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)\Leftrightarrow((P\rightarrow Q(-2))\wedge(P\rightarrow Q(3))\wedge(P\rightarrow Q(6)))\vee R(a)$

因为 P 为 T，Q(−2)为 T，Q(3)为 T，Q(6)为 F，R(5)为 F，所以

$(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)\Leftrightarrow ((T\rightarrow T)\wedge(T\rightarrow T)\wedge(T\rightarrow F))\vee F\Leftrightarrow F$

(4) 解：a) $(\forall u)(\exists v)(P(u，z)\rightarrow Q(v))\leftrightarrows S(x，y)$

b) $(\forall u)(P(u)\rightarrow (R(u)\vee Q(u))\wedge(\exists v)R(v))\rightarrow(\exists z)S(x,z)$

(5) 解：a) $((\exists y)A(u，y)\rightarrow(\forall x)B(x，v))\wedge(\exists x)(\forall z)C(x，t，z)$

b) $((\forall y)P(u，y)\wedge(\exists z)Q(u，z))\vee(\forall x)R(x，t)$

习题 2-5

（1）解： a) $P(a,f(a))\wedge P(b,f(b))\Leftrightarrow P(1,f(1))\wedge P(2,f(2))\Leftrightarrow P(1,2)\wedge P(2,1)\quad\Leftrightarrow T\wedge F\Leftrightarrow F$

b) $(\forall x)(\exists y)P(y,x)\Leftrightarrow (\forall x) (P(1,x)\vee P(2,x))\Leftrightarrow (P(1,1)\vee P(2,1))\wedge(P(1,2)\vee P(2,2))$

$\Leftrightarrow (T\vee F)\wedge(T\vee F)\quad\Leftrightarrow T$

c) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow P(f(x),f(y)))$

$\Leftrightarrow (\forall x) ((P(x,1)\rightarrow P(f(x),f(1)))\wedge(P(x,2) \rightarrow P(f(x)f(2))))$

$\Leftrightarrow (P(1,1)\rightarrow P(f(1),f(1)))\wedge(P(1,2)\rightarrow P(f(1),f(2)))$

$\wedge(P(2,1)\rightarrow P(f(2),f(1)))\wedge(P(2,2) \rightarrow P(f(2),f(2)))$

$\Leftrightarrow (P(1,1)\rightarrow P(2,2))\wedge(P(1,2)\rightarrow P(2,1))\wedge(P(2,1)\rightarrow P(1,2))\wedge(P(2,2)\rightarrow P(1,1))$

$\Leftrightarrow (T\rightarrow F\wedge(T\rightarrow F)\wedge(F\rightarrow T)\wedge(F\rightarrow T)\Leftrightarrow F\wedge F\wedge T\wedge T\Leftrightarrow F$

（2）解：a) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(f(x),a))$

$\Leftrightarrow(P(1)\rightarrow Q(f(1),1))\wedge(P(2)\rightarrow Q(f(2),1))$

$\Leftrightarrow (F\rightarrow Q(2,1))\wedge(T\rightarrow Q(1,1))$

$\Leftrightarrow (F\rightarrow F)\wedge(T\rightarrow T)\quad\Leftrightarrow T$

b) $(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x,f(a))$

$\Leftrightarrow (P(f(1))\wedge Q(1,f(1)))\vee(P(f(2))\wedge Q(2,f(1))\ \Leftrightarrow (T\wedge T)\vee(F\wedge F)\quad\Leftrightarrow T$

c) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x,a))$

$\Leftrightarrow (P(1)\wedge Q(1,a))\vee(P(2)\wedge Q(2,a))$

$\Leftrightarrow (P(1)\wedge Q(1,1))\vee(P(2)\wedge Q(2,1))$

$\Leftrightarrow (F\wedge T)\vee(T\wedge F)\quad\Leftrightarrow F$

d) $(\forall x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x) (P(x)\wedge(\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x) (P(x)\wedge(Q(x,1)\vee Q(x,2)))$

$\Leftrightarrow (P(1)\wedge(Q(1,1)\vee Q(1,2)))\wedge(P(2)\wedge(Q(2,1)\vee Q(2,2)))$

$\Leftrightarrow (F\wedge(T\vee T))\wedge(T\wedge(F\vee F))\quad\Leftrightarrow F$

(3) 举例说明下列各蕴含式。

a) $\neg((\exists x)(P(x)\wedge Q(a))\Rightarrow (\exists x)P(x)\rightarrow \neg Q(a)$

b) $(\forall x) (\neg P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x) \neg Q(x)\Rightarrow P(a)$

c) $(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x) (Q(x) \rightarrow R(x))\Rightarrow (\forall x) (P(x) \rightarrow R(x))$

d) $(\forall x) (P(x) \vee Q(x)), (\forall x) \neg P(x)\Rightarrow (\exists x)Q (x)$

e) $(\forall x) (P(x) \vee Q(x)), (\forall x) \neg P(x)\Rightarrow (\forall x)Q (x)$

解：a）因为$\neg((\exists x)(P(x)\wedge Q(a)) \Leftrightarrow\neg(\exists x)P(x)\vee \neg Q(a)$

故原式为$\neg(\exists x)P(x)\vee \neg Q(a) \Rightarrow (\exists x)P(x)\rightarrow \neg Q(a)$

设 P（x）：x 是大学生。Q（x）：x 是运动员

前提 或者不存在 x，x 是大学生，或者 a 是运动员

结论 如果存在 x 是大学生，则必有 a 是运动员。

b)设 P（x）：x 是研究生。Q（x）：x 是大学生。a：论域中的某人。

前提：对论域中所有 x，如果 x 不是研究生则 x 是大学生。

对论域中所有 x， x 不是大学生。

结论：对论域中所有 x 都是研究生。
故，对论域中某个 a，必有结论 a 是研究生，即 P（a）成立。
c）设 P（x）：x 是研究生。Q（x）：x 曾读过大学。R（x）：x 曾读过中学。
前提　对所有 x，如果 x 是研究生，则 x 曾读过大学。
　　　对所有 x，如果 x 曾读过大学，则 x 曾读过中学。
结论：对所有 x，如果 x 是研究生，则 x 曾读过中学。
d）设 P（x）：x 是研究生。Q（x）：x 是运动员。
前提　对所有 x，或者 x 是研究生，或者 x 是运动员。
　　　对所有 x，x 不是研究生
结论　必存在 x，x 是运动员。
e）设 P（x）：x 是研究生。Q（x）：x 是运动员。
前提　对所有 x，或者 x 是研究生，或者 x 是运动员。
　　　对所有 x，x 不是研究生
结论　对所有 x，x 是运动员。
（4）证明：$(\exists x)(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow(\exists x)(\neg A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow(\exists x)\neg A(x)\vee(\exists x)B(x)$
$\Leftrightarrow\neg(\forall x)A(x)\vee(\exists x)B(x)\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\rightarrow(\exists x)B(x)$
（5） 设论域 D={a，b，c}，求证$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$
证明：因为论域 D={a，b，c}，所以
$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Leftrightarrow(A(a)\wedge A(b)\wedge A(c))\vee(B(a)\wedge B(b)\wedge B(c))$
$\Leftrightarrow(A(a)\vee B(a))\wedge(A(a)\vee B(b))\wedge(A(a)\vee B(c))\wedge(A(b)\vee B(a))\wedge(A(b)\vee B(b))\wedge(A(b)\vee B(c))\wedge(A(c)\vee B(a))\wedge$
$(A(c)\vee B(b))\wedge(A(c)\vee B(c))$
$\Rightarrow(A(a)\vee B(a))\wedge(A(b)\vee B(b))\wedge(A(c)\vee B(c))$
$\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$
所以$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$
（6）解：推证不正确，因为
$\neg(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))\not\Leftrightarrow\neg((\exists x)A(x)\wedge(\exists x)\neg B(x))$
（7）求证$(\forall x)(\forall y)(P(x)\rightarrow Q(y))\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)Q(y)$
证明：$(\forall x)(\forall y)(P(x)\rightarrow Q(y))$
$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y))$
$\Leftrightarrow(\forall x)\neg P(x)\vee(\forall y)Q(y)$
$\Leftrightarrow\neg(\exists x)P(x)\vee(\forall y)Q(y)$
$\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)Q(y)$

习题 2-6

（1）解：a)　$(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)Q(x,y))$
$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg P(x)\vee(\exists y)Q(x,y))$
$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)(\neg P(x)\vee Q(x,y))$
b)　$(\exists x)(\neg((\exists y)P(x,y))\rightarrow((\exists z)Q(z)\rightarrow R(x)))$
$\Leftrightarrow(\exists x)((\exists y)P(x,y)\vee((\exists z)Q(z)\rightarrow R(x)))$
$\Leftrightarrow(\exists x)((\exists y)P(x,y)\vee(\neg(\exists z)Q(z)\vee R(x)))$
$\Leftrightarrow(\exists x)((\exists y)P(x,y)\vee((\forall z)\neg Q(z)\vee R(x)))$
$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y)\vee\neg Q(z)\vee R(x))$
c)$(\forall x)(\forall y)(((\exists z P(x,y,z)\wedge(\exists u)Q(x,u))\rightarrow(\exists v)Q(y,v))$
$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\neg((\exists z)P(x,y,z)\wedge(\exists u)Q(x,u))\vee(\exists v)Q(y,v))$
$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((\forall z)\neg P(x,y,z)\vee(\forall u)\neg Q(x,u)\vee(\exists v)Q(y,v))$
$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((\forall z)\neg P(x,y,z)\vee(\forall u)\neg Q(x,u)\vee(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x,y,z) \vee \neg Q(x,u) \vee Q(y,v))$

（2）解：a) $((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)) \rightarrow (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \neg((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)) \vee (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \vee (\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow T$

b) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)((\forall z)Q(x,y) \rightarrow \neg(\forall z)R(y,x)))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg P(x) \vee (\forall y)(Q(x,y) \rightarrow \neg R(y,x)))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\neg P(x) \vee \neg Q(x,y) \vee \neg R(y,x))$

前束合取范式

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee(P(x) \wedge Q(x,y) \wedge \neg R(y,x))$

$\vee(P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee(\neg P(x) \wedge Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee(\neg P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee((P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge \neg R(y,x))$

$\vee(\neg P(x) \wedge Q(x,y) \wedge \neg R(y,x)))$

前束析取范式

c) $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z))$

$\Leftrightarrow(\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall u)R(x,y,u))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\neg P(x) \vee (\forall z)Q(x,z) \vee (\forall u)R(x,y,u))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\forall z)(\forall u)(\neg P(x) \vee Q(x,z) \vee R(x,y,u))$

前束合取范式

$\Leftrightarrow(\exists x)(\forall z)(\forall u)((P(x) \wedge Q(x,z) \wedge R(x,y,u))$

$\vee(P(x) \wedge Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u))$

$\vee(P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge R(x,y,u))$

$\vee(P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u))$

$\vee(\neg P(x) \wedge Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u))$

$\vee(\neg P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge R(x,y,u))$

$\vee(\neg P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u)))$

前束析取范式

d) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x,y)) \rightarrow ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x,y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee ((\exists u)P(u) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee (P(u) \wedge Q(y,z)))$

前束析取范式

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \vee P(u)) \wedge (P(x) \vee Q(y,z)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee P(u)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee Q(y,z)))$

前束合取范式

习题 2-7

(1) 证明：

(2) a) ①$(\forall x)(\neg A(x) \rightarrow B(x))$ P

②$\neg A(u) \rightarrow B(u)$ US①

③$(\forall x)\neg B(x)$ P

④$\neg B(u)$ US③

⑤$A(u) \vee B(u)$ T②E

⑥$A(u)$ T④⑤I

⑦ $(\exists x)A(x)$ EG⑥

b) ①$\neg(\forall x)(A(x)\to B(x))$ P（附加前提）

②$(\exists x)\neg(A(x)\to B(x))$ T①E

③$\neg(A(c)\to B(c))$ ES②

④$A(c)$ T③I

⑤$\neg B(c)$ T③I

⑥$(\exists x)A(x)$ EG④

⑦ $(\exists x)A(x)\to(\forall x)B(x)$ P

⑧$(\forall x)B(x)$ T⑥⑦I

⑨$B(c)$ US⑧

⑩$B(c)\wedge\neg B(c)$ T⑤⑨矛盾

c）①$(\forall x)(A(x)\to B(x))$ P

②$A(u)\to B(u)$ US①

③$(\forall x)(C(x)\to\neg B(x))$ P

④$C(u)\to\neg B(u)$ US③

⑤$\neg B(u)\to\neg A(u)$ T②E

⑥$C(u)\to\neg A(u)$ T④⑤I

⑦$(\forall x)(C(x)\to\neg A(x))$ UG⑥

d) $(\forall x)(A(x)\vee B(x)),(\forall x)(B(x)\to\neg C(x)),(\forall x)C(x)\Rightarrow(\forall x)A(x)$

①$(\forall x)(B(x)\to\neg C(x))$ P

②$B(u)\to\neg C(u)$ US①

③$(\forall x)C(x)$ P

④$C(u)$ US③

⑤$\neg B(u)$ T②④I

⑥ $(\forall x)(A(x)\vee B(x))$ P

⑦$A(u)\vee B(u)$ US

⑧$A(u)$ T⑤⑦I

⑨$(\forall x)A(x)$ UG⑧

(2) 证明：

a)①$(\forall x)P(x)$ P（附加前提）

②$P(u)$ US①

③$(\forall x)(P(x)\to Q(x))$ P

④$P(u)\to Q(u)$ US③

⑤$Q(u)$ T②④I

⑥$(\forall x)Q(x)$ UG⑤

⑦$(\forall x)P(x)\to(\forall x)Q(x)$ CP

b)因为$(\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)\Leftrightarrow\neg(\forall x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$

故本题就是推证$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Rightarrow\neg(\forall x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$

①$\neg(\forall x)P(x)$ P（附加前提）

②$(\exists x)\neg P(x)$ T①E

③$\neg P(c)$ ES②

④$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$ P

⑤$P(c)\vee Q(c)$ ES④

⑥$Q(c)$ T③⑤I

⑦$(\exists x)Q(x)$ EG⑥

⑧$\neg(\forall x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$ CP

(3)

解：a)设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。I（x）：x 是整数。

本题符号化为：

$(\forall x)(Q(x) \to R(x)) \wedge (\exists x)(Q(x) \wedge I(x)) \Rightarrow (\exists x)(R(x) \wedge I(x))$

①$(\exists x)(Q(x) \wedge I(x))$　　P
②$Q(c) \wedge I(c)$　　ES①
③$(\forall x)(Q(x) \to R(x))$　　P
④$Q(c) \to R(c)$　　US③
⑤$Q(c)$　　T②I
⑥ $R(c)$　　T④⑤I
⑦$I(c)$　　T②I
⑧$R(c) \wedge I(c)$　　T⑥⑦I
⑨$(\exists x)(R(x) \wedge I(x))$　　EG⑧

b)设 P（x）：x 喜欢步行。Q（x）：x 喜欢乘汽车。R（x）：x 喜欢骑自行车

本题符号化为：

$(\forall x)(P(x) \to \neg Q(x)), (\forall x)(Q(x) \vee R(x)), (\exists x) \neg R(x) \Rightarrow (\exists x) \neg P(x)$

①$(\exists x) \neg R(x)$　　P
②$\neg R(c)$　　ES①
③$(\forall x)(Q(x) \vee R(x))$　　P
④$Q(c) \vee R(c)$　　US③
⑤$Q(c)$　　T②④I
⑥ $(\forall x)(P(x) \to \neg Q(x))$　　P
⑦$P(c) \to \neg Q(c)$　　US⑥
⑧$\neg P(c)$　　T⑤⑦I
⑨$(\exists x) \neg P(x)$　　EG⑧

c) 每个大学生不是文科学生就是理工科学生，有的大学生是优等生，小张不是理工科学生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科学生。

设 G（x）：x 是大学生。L（x）：x 是文科学生。P（x）：x 是理工科学生。

S（x）：x 是优秀生。c：小张。

本题符号化为：

$(\forall x)(G(x) \to L(x) \vee P(x)), (\exists x)(G(x) \wedge S(x)), \neg P(c), S(c) \Rightarrow G(c) \to L(c)$

①$G(c)$　　P（附加前提）
②$(\forall x)(G(x) \to L(x) \vee P(x))$　　P
③$G(c) \to L(c) \vee P(c)$　　US②
④$L(c) \vee P(c)$　　T①③I
⑤$\neg P(c)$　　P
⑥ $L(c)$　　T④⑤I
⑦$G(c) \to L(c)$　　CP

注意：本题推证过程中未用到前提$(\exists x)(G(x) \wedge S(x))$以及 $S(c)$。主要是 S（x）：x 是优秀生，这个条件与其他前提的联系对证明结论没有影响，因 S（x）与其他前提不矛盾，故本题的推证仍是有效的。

3-5.1 列出所有从 X={a,b,c} 到 Y={s} 的关系。

解：Z_1={<a,s>}
$|\wp(X \times X)| = 2^{n^2}$
Z_2={<b,s>}
Z_3={<c,s>}
Z_4={<a,s>,<b,s>}
Z_5={<a,s>,<c,s>}
Z_6={<b,s>,<c,s>}
Z_7={<a,s>,<b,s>,<c,s>}

3-5.2 在一个有 n 个元素的集合上，可以有多少种不同的关系。

解 因为在 X 中的任何二元关系都是 X × X 的子集，而 X× X=X^2 中共有 n^2 个元素，取 0 个到 n^2 个元素，共可组

成 个子集，即 。

3-5.3 设 A＝{6：00，6：30,7：30，…，9：30,10：30}表示在晚上每隔半小时的九个时刻的集合，设 B={3,12,15,17}表示本地四个电视频道的集合,设 R_1 和 R_2 是从 A 到 B 的两个二元关系，对于二无关系 R_1，R_2，$R_1 \cup R_2$，$R_1 \cap R_2$，R_1 R_2 和 R_1-R_2 可分别得出怎样的解释。

解：A×B 表示在晚上九个时刻和四个电视频道所组成的电视节目表。

R_1和 R_2分别是 A×B 的两个子集，例如 R_1 表示音乐节目播出的时间表，R_2 是戏曲节日的播出时间表，则 $R_1 \cup R_2$ 表示音乐或戏曲节目的播出时间表，$R_1 \cap R_2$ 表示音乐和戏曲一起播出的时间表，R_1 R_2 表示音乐节目表以及戏曲节目表，但不是音乐和戏曲一起的节日表，R_1-R_2 表示不是戏曲时间的音乐节目时间麦。

3-5.4 设 L 表示关系“小于或等于”，D 表示‘整除”关系,L 和 D 刀均定义于{1,2,3,6}，分别写出 L 和 D 的所有元素并求出 L∩D.

解：L={<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,3>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}
D={<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}
L∩D=
{<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}

3-5.5 对下列每一式，给出 A 上的二元关系，试给出关系图：

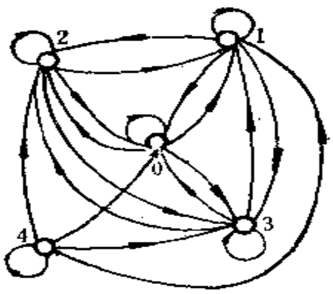
a){<x,y>|0≤ x∧ y≤3}，这里 A={1,2,3,4}；

b){<x,y>|2≤ x,y≤7 且 x 除尽 y,这里 A＝{n|n∈N∧n≤10}

c) {<x,y>|0≤ x-y<3}，这里 A={0,1,2,3,4}；

d){<x,y>|x,y 是互质的}，这里 A={2,3,4,5,6}

解：
a) R={<0,0>,<0,1>,<0,2>,<0,3>,
<1,0>,<1,1>,<1,2>,<1,3>,
<2,0>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,
<3,0>,<3,1>,<3,2>,<3,3>,}
其关系图



(a)

b) R={<2,0>,<2,2>,<2,4>,<2,6> ,
<3,0>,<3,3>,<3,6>,
<4,0>,<4,4>,
<5,0>,<5,5>,
<6,0>,<6,6>,
<7,0>,<7,7>}

3-6.1 分析集合 A={1，2，3}上的下述五个关系：

（1）R={＜1，1＞，＜1，2＞，＜1，3＞，＜3，3＞}；

（2）S={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞}；

（3）T={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，2＞，＜2，3＞}；

（4）Ø=空关系；

（5）A×A=全域关系。

判断 A 中的上述关系是否为 a)自反的，b）对称的，c）可传递的，d）反对称的。

解（1）R 是可传递和反对称的。

（2）S 是自反，对称和可传递的。

（3）T 是反对称的。

（4）空关系是对称，可传递和反对称的。

（5）全域关系是自反，对称和可传递的。

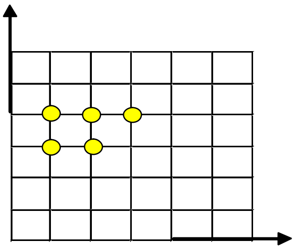
3-6.2 给定 A={1，2，3,4}，考虑 a 上的关系 R,若 R={＜1，3＞，＜1，4＞，＜2，3＞，＜2，4＞，＜3，4＞}

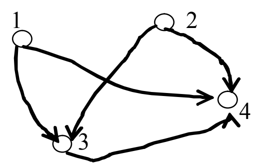
a) 在 A×A 的坐标图上标出 R，并绘出它的关系图；

b) R 是 i)自反的 ii）对称的iii)可传递的，iv) 反对称的吗？

解

a）





R 是可传递的的和反对称的；但不是自反的和对称的。

3-6.3 举出 A={1，2，3}上关系 R 的例子，使其具有下述性质：

a）既是对称的，又是反对称的；

b）R 既不是对称的，又不是反对称的；

c）R 是可传递的。

解

a）R={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞}

b）R={＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，3＞}

c）R={＜1，2＞，＜2，1＞，＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞}

3-6.4 如果关系 R 和 S 是自反的，对称的和可传递的，证明 R∩S 也是自反，对称和可传递的。

证明 设 R 和 S 是 X 上的自反的，对称的和可传递的关系。

1）对任意 x∈X，有＜x，x＞∈R 和＜x，x＞∈S，所以＜x，x＞∈R∩S，即 R∩S 在 X 上是自反的。

2）对任意的＜x，y＞∈R∩S，有＜x，y＞∈R∧＜x，y＞∈S，因为 R 和 S 是对称的，故必有＜y，x＞∈R∧＜y，x＞∈S。即＜y，x＞∈R∩S，所以 R∩S 在 X 上是对称的。

3）对任意的＜x，y＞∈R∩S∧＜y，z＞∈R∩S，则有

＜x，y＞∈R∧＜x，y＞∈S∧＜y，z＞∈R∧＜y，z＞∈S

因为 R 和 S 是传递的，故得＜x，z＞∈R∧＜x，z＞∈S，即＜x，z＞∈R∩S，所以 R∩S 在 X 上是传递的。

3-6.5 给定 S={1，2，3，4}和 S 上关系：R={＜1，2＞，＜4，3＞，＜2，2＞，＜2，1＞，＜3，1＞}

说明 R 是不可传递的，找出关系 $R_1 \supseteq R$，使得 R_1 是可传递的，还能找出另一个

3-7.1 设 R_1和 R_2是 A 上的任意关系，说明以下命题的真假并予以证明。

a）若 R_1和 R_2是自反的，则 $R_1\circ R_2$也是自反的；

b）若 R_1和 R_2是反自反的，则 $R_1\circ R_2$也是反自反的；

c）若 R_1和 R_2是对称的，则 $R_1\circ R_2$也是对称的；

d）若 R_1和 R_2是传递的，则 $R_1\circ R_2$也是传递的。

证明 a）对任意 $a\in A$，设 R_1和 R_2是自反的，则$\langle a, a\rangle\in R_1$，$\langle a, a\rangle\in R_2$ 所以，$\langle a, a\rangle\in R_1\circ R_2$，即 $R_1\circ R_2$也是自反的。

b）假。例如：设 $A=\{a, b\}$，有 $R_1=\{\langle a, b\rangle\}$与 $R_2=\{\langle b, a\rangle\}$
R_1和 R_2是反自反的。但 $R_1\circ R_2=\{\langle a, a\rangle\}$，所以 $R_1\circ R_2$在 A 上不是反自反的。

c)假。例如：设 $A=\{a, b, c\}$，有
$R_1=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$，
$R_2=\{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$
R_1和 R_2是对称的，但 $R_1\circ R_2=\{\langle a, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$
所以，$R_1\circ R_2$不是对称的。

d）假。例如：设 $A=\{a, b, c\}$，有
$R_1=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$，
$R_2=\{\langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$
则 R_1，R_2都是传递的。但 $R_1\circ R_2=\{\langle a, c\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$
所以，$R_1\circ R_2$不是传递的。

3-7.2 证明 若 S 为集合 X 上的二元关系：

a）S 是传递的，当且仅当（$S\circ S$）$\subseteq S$;

b）S 是自反的，当且仅当 $I_X\subseteq S$；

c）证明定理 3-7.3（b）(即 S 是反对称的，当且仅当 $S\cap S^c\subseteq I_X$)。

证明 a）设 S 为传递的，若$\langle x, z\rangle\in S\circ S$，则存在某个 $y\in X$，使得$\langle x, y\rangle\in S$，且$\langle y, z\rangle\in S$。
若 S 是传递的，$\langle x,z\rangle\in S$，所以（$S\circ S$）$\subseteq S$。

反之，设（$S\circ S$）$\subseteq S$ ，假定$\langle x, y\rangle\in S$ 且$\langle y, z\rangle\in S$，则$\langle x, z\rangle\in S\circ S$。因为（$S\circ S$）$\subseteq S$，故$\langle x, z\rangle\in S$，得到 S 是传递的。

b）设 S 是自反的，令$\langle x, y\rangle\in I_X$，则 $x=y$。但$\langle x, x\rangle\in S$，因此$\langle x, y\rangle=\langle x, x\rangle\in S$，得 $I_X\subseteq S$。

反之，令 $I_X\subseteq S$，设任意 $x\in X$，$\langle x, x\rangle\in I_X$，故$\langle x, x\rangle\in S$，因此 S 是自反的。

c）设 S 是反对称的。假定$\langle x, y\rangle\in S\cap S^c$，则
$\langle x, y\rangle\in S\wedge\langle x, y\rangle\in S^c\Rightarrow\langle x, y\rangle\in S\wedge\langle y, x\rangle\in S$
因为 S 是反对称的，故 $x=y$，
所以$\langle x, y\rangle=\langle x, x\rangle\in I_X$，即 $S\cap S^c\subseteq I_X$。

反之，若 $S\cap S^c\subseteq I_X$，设$\langle x, y\rangle\in S$ 且$\langle y, x\rangle\in S$，则
$\langle x, y\rangle\in S\wedge\langle x, y\rangle\in S^c$
$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in S\cap S^c$
$\Rightarrow\langle x, y\rangle\in I_X$
故 $x=y$，即 S 是反对称的。

3-7.3 设 S 为 X 上的关系，证明若 S 是自反和传递的，则 $S\circ S=S$，其逆为真吗 ?

证明 若 S 是 X 上传递关系，由习题 3-7.2a）可知（$S\circ S$）$\subseteq S$，
令$\langle x, y\rangle\in S$，根据自反性，必有$\langle x, x\rangle\in S$，因此有$\langle x, y\rangle\in S\circ S$，即 $S\subseteq S\circ S$。得到 $S=S\circ S$.

这个定理的逆不真。例如 $X=\{1, 2, 3\}$，$S=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$，

3-8.1 根据图 3-8.1 中的有向图，写出邻接矩阵和关系 R，并求出 R 的自反闭包和对称闭包。
解

$$M_R=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

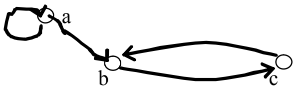


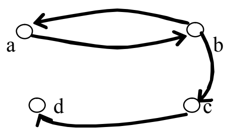
图 3-8.1

R={＜a，a＞，＜a，b＞，＜b，c＞，＜c，b＞＝
r（R）= R∪I_X ={＜a，a＞，＜b，b＞，＜c，c＞，＜a，b＞，＜b，c＞，＜c，b＞＝
s（R）= R∪R^C={＜a，a＞，＜a，b＞，＜b，a＞，＜b，c＞，＜c，b＞}

3-8.2 设集合 A={a，b，c，d}A 上的关系
R={＜a，b＞，＜b，a＞，＜b，c＞，＜c，d＞}
a）用矩阵运算和作图方法求出 R 的自反、对称、传递闭包；
b）用 Warshall 算法，求出 R 的传递闭包。
解 a）

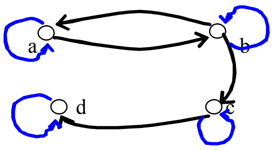
$$M_R=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

R 的关系图如图所示。



$$M_R+M_{I_A}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

r（R）= R∪I_A
={＜a，a＞，＜a，b＞，＜b，a＞，＜b，b＞，＜b，c＞，＜c，c＞，＜c，d＞，＜d，d＞}（图（a））



图（a）

$$M_R+M_{R^c}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

3-9.1　4 个元素的集合共有多少不同的划分。

解 整数 4 可划分为：4，1+3，1+1+2，2+2，1+1+1+1。

$$1+C_4^1+C_4^2+\frac{1}{2}C_4^2+1=15\text{（种）}$$

3-9.2 设 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 是集合 A 的一个划分，我们定义 A 上的一个二元关系 R，使 $\langle a,b\rangle \in R$ 当且仅当 a 和 b 在这个划分的同一块中。证明 R 是自反的，对称的，和传递的。

证明 设对任意 $a\in A$，则必存在 A_i，使 $a\in A_i$，因 a 与 a 必可看作在同一块中，故有 $\langle a,a\rangle \in R$。即 R 是自反的。

设 $a,b\in A$，若有 $\langle a,b\rangle\in R$，则 a 与 b 必在同一块，故 b 与 a 亦在同一块，$\langle b,a\rangle \in R$，即 R 是对称的。

对任意 $a,b,c\in A$，

$\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in R$

$\Rightarrow (\exists i)(a\in A_i\wedge b\in A_i)\wedge(\exists j)(b\in A_j\wedge c\in A_j)$

$\Rightarrow (\exists i)(\exists j)(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge b\in A_i\cap A_j)$

$\Rightarrow (\exists i)(\exists j)(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge A_i\cap A_j\neq\varnothing)$

$\Rightarrow (\exists i)(\exists j)(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge i=j)(\because i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing)$

$\Rightarrow$a, c 在同一块

$\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R$

$\therefore$R 传递

3-10.1 设 R 和 R′ 是集合 A 上的等价关系，用例子说明：R∪R′ 不一定是等价关系。
证明 设 A={1，2，3}，S=R∪R′

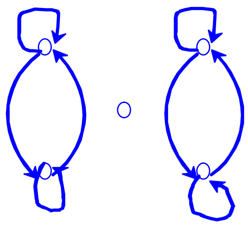
R={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，1＞，＜1，3＞}

R′={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，2＞，＜2，3＞}

则 R∪R′={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，1＞，＜1，3＞，＜3，2＞，＜2，3＞}
因为如＜2，3＞∈S∧＜3，1＞∈S，但＜2，1＞∉S，故 R∪R′ 不是传递的，即 R∪R′ 不是 A 上的等价关系。

3-10.2 试问由 4 个元素组成的有限集上所有等价关系的个数为多少？
解 因为集合 X 上的等价关系与 X 的划分是一一对应的，所以 4 个元素的有限集上等价关系的数目，与 4 个元素集合进行划分的数目是相同的，由习题 3-9.1 可知共有 15 个不同的等价关系。

3-10.3 给定集合 S={1，2，3，4，5}，找出 S 上的等价关系 R，此关系 R 能产生划分{{1，2}，{3}，{4，5}}，并画出关系图。
解 我们可用如下方法产生一个等价关系：
R_1={1，2}×{1，2}={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，2＞}
R_2={3}×{3}={＜3，3＞}
R_3={4，5}×{4，5}={＜4，4＞，＜4，5＞，＜5，4＞，＜5，5＞}
R= R_1∪R_2∪R_3={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜4，4＞，＜4，5＞，＜5，4＞，＜5，5＞}
关系图如图。



3-10.4 设 R 是一个二元关系，S={＜a，b＞|对于某一 c，有＜a，c＞∈R∧＜c，b＞∈R}，证明若 R 是一个等价关系，则 S 也是一个等价关系。
证明 设 R 是 A 上的等价关系：

（1） 对任一 x∈A，因为 R 在 A 上自反，所以＜x，x＞∈R。由 S 定义，＜x，x＞∈S，所以 S 是自反的。

（2） 对任意 x,y∈A，**若**＜x，y＞∈S，则存在某个 c，使得＜x，c＞∈R∧＜c，y＞∈R，因为 R 是对称，故有：＜y，c＞∈R∧＜c，x＞∈R，由 S 的定义，可知＜y，x＞∈S，所以 S 是对称的。

（3） 对任意 x,y,z∈A，若＜x，y＞∈S，及＜y，z＞∈S，则必存在某个 c_1，使＜x，c_1＞∈R，＜c_1，y＞∈R。由 R 的传递性，可知＜x，y＞∈R，同理存在 c_2，使＜y，c_2＞∈R∧＜c_2，z＞∈R，由 R 传递，可知＜y，z＞∈R。再由 S 定义，得＜x，z＞∈S。故 S 是传递的。

3-10.5 设正整数的序偶集合 A，在 A 上定义二元关系 R 如下：＜＜x,y＞，＜u,v＞＞∈R，当且仅当 xv=yu，证明 R 是一个等价关系。

证明 设 A 上定义的二元关系 R 为：

$$<<x,y>,\ <u,v>>\in R \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v}$$

① 对任意＜x,y＞∈A，因为$\frac{x}{y}=\frac{x}{y}$，所以

$$<<x,y>,\ <x,y>>\in R$$

即 R 是自反的。

② 设＜x,y＞∈A，＜u,v＞∈A，若

$$<<x,y>,\ <u,v>>\in R \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v} \Rightarrow \frac{u}{v}=\frac{x}{y} \Rightarrow <<u,v>,<x,y>>\in R$$

即 R 是对称的。

③ 设任意＜x,y＞∈A，＜u,v＞∈A，＜w,s＞∈A，对

$$<<x,y>,\ <u,v>>\in R \wedge <<u,v>,\ <w,s>>\in R$$

$\Rightarrow (\frac{x}{y}=\frac{u}{v}) \wedge (\frac{u}{v}=\frac{w}{s}) \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{w}{s}$

$\Rightarrow \langle\langle x,y\rangle, \langle w,s\rangle\rangle \in R$

故 R 是传递的，于是 R 是 A 上的等价关系。

3-10.6 设 R 是集合 A 上的对称和传递关系，证明如果对于 A 中的每一个元素 a,在 A 中同时也存在 b，使$\langle a,b\rangle$在 R 之中，则 R 是一个等价关系。

证明 对任意 $a\in A$，必存在一个 $b\in A$，使得$\langle a,b\rangle\in R$.

因为 R 是传递的和对称的，故有：

$\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in R\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R\Rightarrow\langle c,a\rangle\in R$

由$\langle a,c\rangle\in R\wedge\langle c,a\rangle\in R\Rightarrow\langle a,a\rangle\in R$

所以 R 在 A 上是自反的，即 R 是 A 上的等价关系。

3-10.7 设 R_1和 R_2是非空集合 A 上的等价关系，试确定下述各式，哪些是 A 上的等价关系，对不是的式子，提供反例证明。

a）$(A\times A)-R_1$；

b）R_1-R_2；

c）R_1^2；

d）$r(R_1-R_2)$（即 R_1-R_2的自反闭包）。

解 a）$(A\times A)-R_1$不是 A 上等价关系。例如：

$A=\{a,b\}$，$R_1=\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$

$A\times A=\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$

$(A\times A)-R_1=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\}$

所以$(A\times A)-R_1$不是 A 上等价关系。

b）设 $A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$

$R_2=\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\}$

$R_1-R_2=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\}$

所以 R_1和 R_2是 A 上等价关系，但 R_1-R_2不是 A 上等价关系。

c）若 R_1是 A 上等价关系，则

$\langle a,a\rangle\in R_1\Rightarrow\langle a,a\rangle\in R_1\circ R_1$

所以 R_1^2是 A 上自反的。

若$\langle a,b\rangle\in R_1^2$则存在 c，使得$\langle a,c\rangle\in R_1\wedge\langle c,b\rangle\in R_1$。因 R_1对称，故有

$\langle b,c\rangle\in R_1\wedge\langle c,a\rangle\in R_1\Rightarrow\langle b,a\rangle\in R_1^2$

即 R_1^2是对称的。

若$\langle a,b\rangle\in R_1^2\wedge\langle b,c\rangle\in R_1^2$,则有

$\langle a,b\rangle\in R_1\circ R_1\wedge\langle b,c\rangle\in R_1\circ R_1$

$\Rightarrow(\exists e_1)(\langle a,e_1\rangle\in R_1\wedge\langle e_1,b\rangle\in R_1)\wedge(\exists e_2)(\langle b,e_2\rangle\in R_1\wedge\langle e_2,c\rangle\in R_1)$

$\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R_1\wedge\langle b,c\rangle\in R_1$（$\because R_1$传递）

$\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R_1^2$

即 R_1^2是传递的。

故 R_1^2是 A 上的等价关系。

d）如 b）所设，R_1和 R_2是 A 上的等价关系，但

$r(R_1-R_2)=(R_1-R_2)\cup I_A$

$=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$

不是 A 上的等价关系。

3-10.8 设C^*是实数部分非零的全体复数组成的集合，C^*上的关系 R 定义为：(a+bi)R(c+di)$\Leftrightarrow$ac>0,证明 R 是等价关系，并给出关系 R 的等价类的几何说明。

证明：(1)对任意非零实数 a，有 $a^2>0\Leftrightarrow$(a+bi)R(a+bi)
故 R 在C^*上是自反的。
(2) 对任意(a+bi)R(c+di)$\Leftrightarrow$ac>0,
因 ca=ac>0$\Leftrightarrow$(c+di)R(a+bi),
所以 R 在C^*上是对称的。
(3)设(a+bi)R(c+di) ，(c+di)R(u+vi)，则有 $ac>0\wedge cu>0$
若 c>0，则 $a>0\wedge u>0\Rightarrow au>0$
若 c<0，则 $a<0\wedge u<0\Rightarrow au>0$
所以(a+bi)R(u+vi)，即 R 在C^*上是传递的。
关系 R 的等价类，就是复数平面上第一、四象限上的点，或第二、三象限上的点，因为在这两种情况下，任意两个点(a,b)，(c,d)，其横坐标乘积 ac>0。

3-10.9 设Π和Π′是非空集合 A 上的划分，并设 R 和 R′分别为由Π和Π′诱导的等价关系，那么Π′细分Π的充要条件是 $R'\subseteq R$。
证明：若Π′细分Π。由假设 aR′b，则在Π′中有某个块 S′，使得 a,b∈S′，因Π′细分Π，故在Π中，必有某个块 S，使 $S'\subseteq S$，即 a,b∈S，于是有 aRb,即 $R'\subseteq R$。
反之，若 $R'\subseteq R$，令 S′为 H′的一个分块，且 a∈S′，则 $S'=[a]_{R'}=\{x|xR'a\}$
但对每一个 x，若 xR′a，因 $R'\subseteq R$，故 xRa，因此$\{x|xR'a\}\subseteq\{x|xRa\}$即$[a]_{R'}\subseteq[a]_R$
设 $S=[a]_R$,则 $S'\subseteq S$
这**就**证**明了**Π′细分Π。

3-10.10 设R_j是表示 I 上的模 j 等价关系，R_k是表示 I 上的模 k 等价关系，证明 I/R_k细分 I/R_j当且仅当 k 是 j 的整数倍。
证明：由题设 $R_j=\{\langle x,y\rangle|x\equiv y(\mathrm{mod}\,j)\}$
$R_k=\{\langle x,y\rangle|x\equiv y(\mathrm{mod}\,k)\}$
故$\langle x,y\rangle\in R_j\Leftrightarrow x-y=c\cdot j$ (对某个 c∈I)
$\langle x,y\rangle\in R_k\Leftrightarrow x-y=d\cdot k$ (对某个 d∈I)
a)假设 I/R_k细分 I/R_j，则 $R_k\subseteq R_j$
因此$\langle k,0\rangle\in R_k\Rightarrow\langle k,0\rangle\in R_j$
故 $k-0=1\cdot k=c\cdot j$ (对某个 c∈I)
于是 k 是 j 的整数倍。
b)若对于某个 r∈I，有 k=rj 则：
$\langle x,y\rangle\in R_k\Leftrightarrow x-y=ck$ (对某个 c∈I)
$\Rightarrow x-y=crj$ (对某个 c,r∈I)
$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R_j$
因此，$R_k\subseteq R_j$，于是 I/R_k细分 I/R_j

5-1 代数系统的引入

5.1.1 设集合 A={1，2，3，…，10}，问下面定义的二元运算 *关于集合 A 是否封闭？

a） x*y=max(x,y)；

b） x*y=min(x,y)；

c） x*y=GCD(x,y)；（最大公约数）

d） x*y=LCM(x,y)；（最小公倍数）

e） x*y=质数 p 的个数，其中 x≤p≤y。

解：a）封闭。b）封闭。c）封闭。d）不封闭。e）不封闭。

5.1.2 在下表所列出的集合和运算中，请根据运算是否在相应集合上封闭，在相应位置上填写“是”或“否”，其中 I 表示整数集，N 表示自然数集合。

是否封闭 / 集合	运算					
	+	-	|x-y|	max	min	|x|
I						
N						
{x | 0≤x≤10}						
{x | -10≤x≤10}						
{2x | x∈I}						

解：

是否封闭 / 集合	运算					
	+	-	|x-y|	max	min	|x|
I	是	是	是	是	是	是
N	是	否	是	是	是	是
{x | 0≤x≤10}	否	否	是	是	是	是
{x | -10≤x≤10}	否	否	否	是	是	是
{2x | x∈I}	是	是	是	是	是	是

5-2 运算及其性质

5.2.1 对于实数集合 R，下表所列的二元运算是否具有左边一列中那些性质，请在相应位置上填写“是”或“否”。

	+	-	×	max	min	|x-y|
结合律						
交换律						
有单位元						
有零元						

解：

	+	-	×	max	min	|x-y|
结合律	是	否	是	是	是	否
交换律	是	否	是	是	是	是
有单位元	是	否	是	否	否	否
有零元	否	否	是	否	否	否