离散数学课后习题答案 (左孝凌版)

1-1，1-2 解：

a) 是命题，真值为 T。

b) 不是命题。

c) 是命题，真值要根据具体情况确定。

d) 不是命题。

e) 是命题，真值为 T。

f) 是命题，真值为 T。

g) 是命题，真值为 F。

h) 不是命题。

i) 不是命题。

（2）解：

原子命题：我爱北京天安门。

复合命题：如果不是练健美操，我就出外旅游拉。

（3）解：

a) $(\neg P \wedge R) \rightarrow Q$

b) $Q \rightarrow R$

c) $\neg P$

d) $P \rightarrow \neg Q$

（4）解：

a) 设 Q:我将去参加舞会。 R:我有时间。 P:天下雨。

$Q \leftrightarrow (R \wedge \neg P)$: 我将去参加舞会当且仅当我有时间和天不下雨。

b) 设 R:我在看电视。 Q:我在吃苹果。

R∧Q:我在看电视边吃苹果。

c) 设 Q:一个数是奇数。 R:一个数不能被 2 除。

（Q→R）∧(R→Q): 一个数是奇数，则它不能被 2 整除并且一个数不能被 2 整除，则它是奇数。

(5) 解：

a) 设 P：王强身体很好。 Q：王强成绩很好。 P∧Q

b) 设 P：小李看书。 Q：小李听音乐。 P∧Q

c) 设 P：气候很好。 Q：气候很热。 P∨Q

d) 设 P： a 和 b 是偶数。 Q：a+b 是偶数。 P→Q

e) 设 P：四边形 ABCD是平行四边形。 Q ：四边形 ABCD的对边平行。 P↔Q

f) 设 P：语法错误。 Q：程序错误。 R：停机。（P∨ Q）→ R

(6) 解：

a) P:天气炎热。 Q:正在下雨。 P ∧Q

b) P:天气炎热。 R:湿度较低。 P ∧R

c) R:天正在下雨。 S:湿度很高。 R∨S

d) A:刘英上山。 B:李进上山。 A ∧B

e) M:老王是革新者。 N:小李是革新者。 M ∨N

f) L: 你看电影。 M:我看电影。 ┐L→┐M

g) P:我不看电视。 Q:我不外出。 R: 我在睡觉。 P ∧Q∧R

h) P:控制台打字机作输入设备。 Q:控制台打字机作输出设备。 P∧Q

1-3

（1）解：

a) 不是合式公式，没有规定运算符次序（若规定运算符次序后亦可作为合式公式）

b) 是合式公式

c) 不是合式公式（括弧不配对）

d) 不是合式公式（ R和 S之间缺少联结词）

e) 是合式公式。

（2）解：

a) A是合式公式， (A∨B)是合式公式， (A→(A∨B)) 是合式公式。 这个过程可以简记为：

A；(A∨B)；(A→(A∨B))

同理可记

b）A；¬ A ；(¬ A∧B) ；((¬ A∧B)∧A)

c）A；¬ A ；B；(¬ A→B) ；(B→A) ；((¬ A→B)→(B→A))

d）A；B；(A→B) ；(B→A) ；((A →B)∨(B→A))

（3）解：

a）((((A →C)→((B ∧C)→A)) →((B ∧C)→A)) →(A→C))

b）((B →A)∨(A→B)) 。

（4）解：

a) 是由 c) 式进行代换得到，在 c) 中用 Q代换 P, (P →P)代换 Q.

d) 是由 a) 式进行代换得到，在 a) 中用 P→(Q→P)代换 Q.

e) 是由 b) 式进行代换得到，用 R代换 P, S 代换 Q, Q 代换 R, P 代换 S.

（5）解：

a) P: 你没有给我写信。 R: 信在途中丢失了。 P ∨ Q

b) P: 张三不去。 Q: 李四不去。 R: 他就去。 (P∧Q)→R

c) P: 我们能划船。 Q: 我们能跑步。 $\neg(P\wedge Q)$

d) P: 你来了。 Q: 他唱歌。 R: 你伴奏。 $P\rightarrow(Q\leftrightarrow R)$

（6）解：

P:它占据空间。 Q: 它有质量。 R: 它不断变化。 S: 它是物质。

这个人起初主张： $(P\wedge Q\wedge R)\leftrightarrow S$

后来主张： $(P\wedge Q\leftrightarrow S)\wedge(S\rightarrow R)$

这个人开头主张与后来主张的不同点在于： 后来认为有 $P\wedge Q$ 必同时有 R, 开头时没有这样的主张。

（7）解：

a) P: 上午下雨。 Q: 我去看电影。 R: 我在家里读书。 S: 我在家里看报。

$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow(R\vee S))$

b) P: 我今天进城。 Q:天下雨。$\neg Q\rightarrow P$

c) P: 你走了。 Q: 我留下。 $Q\rightarrow P$

1-4

（4）解：a)

P Q R	$Q\wedge R$	$P\wedge(Q\wedge R)$	$P\wedge Q$	$(P\wedge Q)\wedge R$
T T T	T	T	T	T
T T F	F	F	T	F
T F T	F	F	F	F
T F F	F	F	F	F
F T T	T	F	F	F
F T F	F	F	F	F

F F T	F	F	F	F
F F F	F	F	F	F

所以， P∧(Q∧R) ⇔ (P∧Q)∧R

b)

P Q R	Q∨R	P∨(Q∨R)	P∨Q	(P∨Q)∨R
T T T	T	T	T	T
T T F	T	T	T	T
T F T	T	T	T	T
T F F	F	T	T	T
F T T	T	T	T	T
F T F	T	T	T	T
F F T	T	T	F	T
F F F	F	F	F	F

所以， P∨(Q∨R) ⇔ (P∨Q)∨R

c）

P Q R	Q∨R	P∧（Q∨R）	P∧Q	P∧R	（P∧Q）∨（P∧R）

T T T	T	T	T	T	T
T T F	T	T	T	F	T
T F T	T	T	F	T	T
T F F	F	F	F	F	F
F T T	T	F	F	F	F
F T F	T	F	F	F	F
F F T	T	F	F	F	F
F F F	F	F	F	F	F

所以， P∧(Q∨R) ⇔ (P∧Q)∨(P∧R)

d）

P Q	┓P	┓Q	┓P∨┓Q	┓(P∧Q)	┓P∧┓Q	┓(P∨Q)
T T	F	F	F	F	F	F
T F	F	T	T	T	F	F
F T	T	F	T	T	F	F
F F	T	T	T	T	T	T

所以，$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$，$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$

（5）解：如表，对问好所填的地方，可得公式 $F_1\sim F_6$，可表达为

P	Q	R	F1	F2	F3	F4	F5	F6
T	T	T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	T	F	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	F	T	T	T

F1:$(Q\rightarrow P)\rightarrow R$

F2:$(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

F3:$(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\vee R)$

F4:$(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$

F5:$(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)$

F6:$\neg(P\vee Q\vee R)$

(6)

	Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T
	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T

	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T

解：由上表可得有关公式为

1.F 2. ¬(P∨Q) 3. ¬(Q→P) 4. ¬P

5.¬(P→Q) 6. ¬Q 7.¬(P↔Q) 8. ¬(P∧Q)

9.P∧Q 10.P↔Q 11.Q 12.P→Q

13.P 14.Q→P 15.P∨Q 16.T

(7) 证明：

a) A→(B→A)⇔ ¬A∨(¬B∨A)

⇔ A∨(¬A∨¬B)

⇔ A∨(A→¬B)

⇔ ¬A→(A→¬B)

b) ¬(A↔B) ⇔ ¬((A∧B)∨(¬A∧¬B))

⇔ ¬((A∧B)∨¬(A∨B))

⇔ (A∨B)∧¬(A∧B)

或 ¬(A↔B) ⇔ ¬((A→B)∧(B→A))

⇔ ¬((¬A∨B)∧(¬B∨A))

⇔ ¬((¬A∧¬B)∨(¬A∧A)∨(B∧¬B)∨(B∧A))

⇔ ¬((¬A∧¬B)∨(B∧A))

⇔ ¬(¬(A∨B))∨(A∧B)

⇔ (A∨B)∧¬(A∧B)

c) ¬(A→B) ⇔ ¬(¬A∨B) ⇔ A∧¬B

d) ¬(A↔B)⇔ ¬((A→B)∧(B→A))

⇔ ¬((¬A∨B)∧(¬B∨A))

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

e) $(((A \wedge B \wedge C) \rightarrow D) \wedge (C \rightarrow (A \vee B \vee D)))$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B \wedge C) \vee D) \wedge (\neg C \vee (A \vee B \vee D))$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B \wedge C) \vee D) \wedge (\neg (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee D)$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B \wedge C) \wedge \neg (\neg A \wedge \neg B \wedge C)) \vee D$

$\Leftrightarrow ((A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)) \rightarrow D$

$\Leftrightarrow (((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \wedge C) \rightarrow D$

$\Leftrightarrow ((C \wedge (A \leftrightarrow B)) \rightarrow D)$

f) $A \rightarrow (B \vee C) \Leftrightarrow \neg A \vee (B \vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \vee C$

$\Leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B) \vee C$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \rightarrow C$

g) $(A \rightarrow D) \wedge (B \rightarrow D) \Leftrightarrow (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee D$

$\Leftrightarrow \neg (A \vee B) \vee D$

$\Leftrightarrow (A \vee B) \rightarrow D$

h) $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow (D \vee C))$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B) \vee C) \wedge (\neg B \vee (D \vee C))$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B) \wedge (\neg B \vee D)) \vee C$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B) \wedge \neg (\neg D \wedge B)) \vee C$

$\Leftrightarrow \neg ((A \wedge B) \vee (\neg D \wedge B)) \vee C$

$\Leftrightarrow ((A \vee \neg D) \wedge B) \rightarrow C$

$\Leftrightarrow (B \wedge (D \rightarrow A)) \rightarrow C$

（8）解：

a) $((A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B\rightarrow\neg A))\wedge C$

$\Leftrightarrow ((\neg A\vee B)\leftrightarrow(B\vee\neg A))\wedge C$

$\Leftrightarrow ((\neg A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\vee B))\wedge C$

$\Leftrightarrow T\wedge C\Leftrightarrow C$

b) $A\vee(\neg A\vee(B\wedge\neg B))\Leftrightarrow(A\vee\neg A)\vee(B\wedge\neg B)\Leftrightarrow T\vee F\Leftrightarrow T$

c) $(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)$

$\Leftrightarrow (A\vee\neg A)\wedge(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow T\wedge(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow B\wedge C$

（9）解：1）设 C 为 T，A 为 T，B 为 F，则满足 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C$，但 $A\Leftrightarrow B$ 不成立。

2）设 C 为 F，A 为 T，B 为 F，则满足 $A\wedge C\Leftrightarrow B\wedge C$，但 $A\Leftrightarrow B$ 不成立。

3）由题意知 $\neg A$ 和 $\neg B$ 的真值相同，所以 A 和 B 的真值也相同。

习题 1-5

（1）证明：

a) $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow (P\wedge(\neg P\vee Q))\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow \neg(P\wedge Q)\vee Q$

$\Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q\vee Q$

$\Leftrightarrow \neg P\vee T$

$\Leftrightarrow T$

b) $\neg P\to(P\to Q)$

$\Leftrightarrow P\lor(\neg P\lor Q)$

$\Leftrightarrow (P\lor\neg P)\lor Q$

$\Leftrightarrow T\lor Q$

$\Leftrightarrow T$

c) $((P\to Q)\land(Q\to R))\to(P\to R)$

因为$(P\to Q)\land(Q\to R)\Rightarrow(P\to R)$

所以$(P\to Q)\land(Q\to R)$为重言式。

d) $((a\land b)\lor(b\land c)\lor(c\land a))\leftrightarrow(a\lor b)\land(b\lor c)\land(c\lor a)$

因为$((a\land b)\lor(b\land c)\lor(c\land a))$

$\Leftrightarrow ((a\lor c)\land b)\lor(c\land a)$

$\Leftrightarrow ((a\lor c)\lor(c\land a))\land(b\lor(c\land a))$

$\Leftrightarrow (a\lor c)\land(b\lor c)\land(b\lor a)$

所以$((a\land b)\lor(b\land c)\lor(c\land a))\leftrightarrow(a\lor b)\land(b\lor c)\land(c\lor a)$ 为重言式。

（2）证明：

a) $(P\to Q)\Rightarrow P\to(P\land Q)$

解法 1：

设 $P\to Q$为 T

（1）若 P为 T，则 Q为 T，所以 $P\land Q$为 T，故 $P\to(P\land Q)$为 T

（2）若 P为 F，则 Q为 F，所以 $P\land Q$为 F，$P\to(P\land Q)$为 T

命题得证

解法 2：

设 $P\to(P\wedge Q)$为 F，则 P 为 T，$(P\wedge Q)$为 F，故必有 P 为 T，Q为 F，所以 $P\to Q$为 F。

解法 3：

$(P\to Q)\to(P\to(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow T$

所以 $(P\to Q)\Rightarrow P\to(P\wedge Q)$

b) $(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\vee Q$

设 $P\vee Q$为 F，则 P为 F，且 Q为 F，

故 $P\to Q$为 T，$(P\to Q)\to Q$为 F，

所以 $(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\vee Q$。

c) $(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))\Rightarrow R\to Q$

设 $R\to Q$为 F，则 R为 T，且 Q为 F，又 $P\wedge\neg P$为 F

所以 $Q\to(P\wedge\neg P)$为 T，$R\to(P\wedge\neg P)$为 F

所以 $R\to(R\to(P\wedge\neg P))$ 为 F，所以 $(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))$ 为 F

即 $(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))\Rightarrow R\to Q$成立。

（3）解：

a) $P\to Q$表示命题“如果 8 是偶数，那么糖果是甜的”。

b) a) 的逆换式 $Q\to P$ 表示命题“如果糖果是甜的，那么 8 是偶数”。

c) a) 的反换式 $\neg P\to\neg Q$表示命题“如果 8 不是偶数，那么糖果不是甜的”。

d) a) 的逆反式 $\neg Q\to\neg P$表示命题“如果糖果不是甜的，那么 8 不是偶数”。

（4）解：

a) 如果天下雨，我不去。

设 P：天下雨。 Q：我不去。 $P\to Q$

逆换式 $Q\to P$ 表示命题：如果我不去，则天下雨。

逆反式 $\neg Q\to\neg P$ 表示命题：如果我去，则天不下雨

b) 仅当你走我将留下。

设 S：你走了。 R：我将留下。 $R\to S$

逆换式 $S\to R$ 表示命题：如果你走了则我将留下。

逆反式 $\neg S\to\neg R$ 表示命题：如果你不走，则我不留下。

c) 如果我不能获得更多帮助，我不能完成个任务。

设 E：我不能获得更多帮助。 H：我不能完成这个任务。 $E\to H$

逆换式 $H\to E$ 表示命题：我不能完成这个任务，则我不能获得更多帮助。

逆反式 $\neg H\to\neg E$ 表示命题：我完成这个任务，则我能获得更多帮助

（5）试证明 $P\leftrightarrow Q$，Q 逻辑蕴含 P。

证明：解法 1：

本题要求证明 $(P\leftrightarrow Q)\wedge Q\Rightarrow P$，

设 $(P\leftrightarrow Q)\wedge Q$ 为 T，则 $(P\leftrightarrow Q)$ 为 T，Q 为 T，故由 $\leftrightarrow$ 的定义，必有 P 为 T。

所以 $(P\leftrightarrow Q)\wedge Q\Rightarrow P$

解法 2：

由体题可知，即证 $((P\leftrightarrow Q)\wedge Q)\to P$ 是永真式。

$((P\leftrightarrow Q)\wedge Q)\to P$

$\Leftrightarrow (((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\wedge Q)\to P$

$\Leftrightarrow (\neg((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\vee\neg Q)\vee P$

$\Leftrightarrow (((\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q))\vee\neg Q)\vee P$

$\Leftrightarrow ((\neg Q\vee\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg Q\vee P\vee Q))\vee P$

$\Leftrightarrow ((\neg Q\vee\neg P)\wedge T)\vee P$

$\Leftrightarrow \neg Q\vee\neg P\vee P$

$\Leftrightarrow \neg Q\vee T$

$\Leftrightarrow T$

（6）解：

P：我学习　Q：我数学不及格　R：我热衷于玩扑克。

如果我学习，那么我数学不会不及格：　$P\rightarrow\neg Q$

如果我不热衷于玩扑克，那么我将学习　：$\neg R\rightarrow P$

但我数学不及格：Q

因此我热衷于玩扑克。　R

即本题符号化为：$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\rightarrow P)\wedge Q\Rightarrow R$

证：

证法 1：$((P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\rightarrow P)\wedge Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P\vee\neg Q)\wedge(R\vee P)\wedge Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg R\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R$

$\Leftrightarrow ((\neg Q\vee P)\wedge(\neg Q\vee Q))\vee((R\vee\neg R)\wedge(R\vee\neg P))$

$\Leftrightarrow \neg Q\vee P\vee R\vee\neg P$

$\Leftrightarrow T$

所以，论证有效。

证法 2：设$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\rightarrow P)\wedge Q$为 T,

则因 Q为 T，$(P\rightarrow\neg Q)$ 为 T，可得 P为 F,

由$(\neg R\rightarrow P)$为 T，得到 R为 T。

故本题论证有效。

（7）解：

P：6 是偶数 Q ：7 被 2 除尽 R ：5 是素数

如果 6 是偶数，则 7 被 2 除不尽 $P\rightarrow\neg Q$

或 5 不是素数，或 7 被 2 除尽 $\neg R\vee Q$

5 是素数 R

所以 6 是奇数 $\neg P$

即本题符号化为：$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R\Rightarrow\neg P$

证：

证法 1：$((P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R)\rightarrow\neg P$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R)\vee\neg P$

$\Leftrightarrow ((P\wedge Q)\vee(R\wedge\neg Q)\vee\neg R)\vee\neg P$

$\Leftrightarrow ((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q))\vee((\neg R\vee R)\wedge(\neg R\vee\neg Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\vee(\neg R\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow T$

所以，论证有效，但实际上他不符合实际意义。

证法 2：$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R$ 为 T，

则有 R 为 T，且 $\neg R\vee Q$ 为 T，故 Q 为 T，

再由 $P\rightarrow\neg Q$ 为 T，得到 $\neg P$ 为 T。

（8）证明：

a) $P\Rightarrow(\neg P\rightarrow Q)$

设 P 为 T，则 $\neg P$ 为 F，故 $\neg P\rightarrow Q$ 为 T

b) $\neg A\wedge B\wedge C\Rightarrow C$

假定 $\neg A\wedge B\wedge C$ 为 T，则 C 为 T。

c) $C \Rightarrow A\vee B\vee\neg B$

因为 $A\vee B\vee\neg B$ 为永真，所以 $C \Rightarrow A\vee B\vee\neg B$ 成立。

d) $\neg(A\wedge B) \Rightarrow \neg A\vee\neg B$

设 $\neg(A\wedge B)$ 为 T，则 $A\wedge B$ 为 F。

若 A 为 T，B 为 F，则 $\neg A$ 为 F，$\neg B$ 为 T，故 $\neg A\vee\neg B$ 为 T。

若 A 为 F，B 为 T，则 $\neg A$ 为 T，$\neg B$ 为 F，故 $\neg A\vee\neg B$ 为 T。

若 A 为 F，B 为 F，则 $\neg A$ 为 T，$\neg B$ 为 T，故 $\neg A\vee\neg B$ 为 T。

命题得证。

e) $\neg A\rightarrow(B\vee C)$，$D\vee E$，$(D\vee E)\rightarrow\neg A \Rightarrow B\vee C$

设 $\neg A\rightarrow(B\vee C)$，$D\vee E$，$(D\vee E)\rightarrow\neg A$ 为 T，

则 $D\vee E$ 为 T，$(D\vee E)\rightarrow\neg A$ 为 T，所以 $\neg A$ 为 T

又 $\neg A\rightarrow(B\vee C)$ 为 T，所以 $B\vee C$ 为 T。命题得证。

f) $(A\wedge B)\rightarrow C$，$\neg D$，$\neg C\vee D \Rightarrow \neg A\vee\neg B$

设 $(A\wedge B)\rightarrow C$，$\neg D$，$\neg C\vee D$ 为 T，则 $\neg D$ 为 T，$\neg C\vee D$ 为 T，所以 C 为 F

又 $(A\wedge B)\rightarrow C$ 为 T，所以 $A\wedge B$ 为 F，所以 $\neg A\vee\neg B$ 为 T。命题得证。

（9）解：

a) 如果他有勇气，他将得胜。

P：他有勇气 Q：他将得胜

原命题：$P\rightarrow Q$ 逆反式：$\neg Q\rightarrow\neg P$ 表示：如果他失败了，说明他没勇气。

b) 仅当他不累他将得胜。

P：他不累 Q：他得胜

原命题：$Q\rightarrow P$ 逆反式：$\neg P\rightarrow\neg Q$ 表示：如果他累，他将失败。

习题 1-6

(1) 解：

a) $(P\wedge Q)\wedge\neg P\Leftrightarrow(P\wedge\neg P)\wedge Q\Leftrightarrow\neg(T\vee Q)$

b) $(P\rightarrow(Q\vee\neg R))\wedge\neg P\wedge Q$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee(Q\vee\neg R))\wedge\neg P\wedge Q$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge\neg P\wedge Q)\vee(\neg R\wedge\neg P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg R\wedge Q)$

$\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$

$\Leftrightarrow\neg(P\vee\neg Q)$

c) $\neg P\wedge\neg Q\wedge(\neg R\rightarrow P)$

$\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q\wedge(R\vee P)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge P)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee F$

$\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q\wedge R$

$\Leftrightarrow\neg(P\vee Q\vee\neg R)$

(2) 解：

a) $\neg P\Leftrightarrow P\downarrow P$

b) $P\vee Q\Leftrightarrow\neg(P\downarrow Q)\Leftrightarrow(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)$

c) $P\wedge Q\Leftrightarrow\neg P\downarrow\neg Q\Leftrightarrow(P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q)$

(3) 解：

$P\rightarrow(\neg P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow \neg P \vee P$

$\Leftrightarrow (\neg P \uparrow \neg P) \uparrow (P \uparrow P)$

$\Leftrightarrow P \uparrow (P \uparrow P)$

$P \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow \neg P \vee P$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \downarrow P)$

$\Leftrightarrow \neg ((P \downarrow P) \downarrow P)$

$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow P) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow P)$

(4) 解：

$P \uparrow Q$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \downarrow \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q))$

$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q))$

(5) 证明：

$\neg (B \uparrow C)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg B \vee \neg C)$

$\Leftrightarrow \neg B \downarrow \neg C$

$\neg (B \downarrow C)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg B \wedge \neg C)$

$\Leftrightarrow \neg B \uparrow \neg C$

(6) 解：联结词“ ↑ ”和“ ↓ ”不满足结合律。举例如下：

a) 给出一组指派： P为 T，Q为 F，R为 F，则 $(P\uparrow Q)\uparrow R$ 为 T，$P\uparrow (Q\uparrow R)$ 为 F

故 $(P\uparrow Q)\uparrow R \quad P\uparrow (Q\uparrow R)$.

b) 给出一组指派： P为 T，Q为 F，R为 F，则 $(P\downarrow Q)\downarrow R$ 为 T，$P\downarrow (Q\downarrow R)$ 为 F

故 $(P\downarrow Q)\downarrow R \quad P\downarrow (Q\downarrow R)$.

(7) 证明：

设变元 P，Q 用连结词 ↔，¬ 作用于 P，Q得到：P，Q，$\neg P$，$\neg Q$，$P\leftrightarrow Q$，$P\leftrightarrow P$，$Q\leftrightarrow Q$，$Q\leftrightarrow P$。

但 $P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q\leftrightarrow P$，$P\leftrightarrow P \Leftrightarrow Q\leftrightarrow Q$ 故实际有：

P，Q，$\neg P$，$\neg Q$，$P\leftrightarrow Q$，$P\leftrightarrow P$（T） （A）

用¬ 作用于（A）类，得到扩大的公式类（包括原公式类）：

P，Q，$\neg P$，$\neg Q$，$\neg(P\leftrightarrow Q)$，T，F，$P\leftrightarrow Q$ （B）

用↔ 作用于（A）类，得到：

$P\leftrightarrow Q$，$P\leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow F$，$P\leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$，$P\leftrightarrow (P\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow Q$，$P\leftrightarrow (P\leftrightarrow P) \Leftrightarrow P$，

$Q\leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$，$Q\leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow F$，$Q\leftrightarrow (P\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P$，$Q\leftrightarrow T \Leftrightarrow Q$，

$\neg P\leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$，$\neg P\leftrightarrow (P\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg Q$，$\neg P\leftrightarrow T \Leftrightarrow \neg P$，

$\neg Q\leftrightarrow (P\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P$，$\neg Q\leftrightarrow T \Leftrightarrow \neg Q$，

$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow (P\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$.

因此，（A）类使用运算后，仍在（B）类中。

对（B）类使用¬ 运算得：

$\neg P$，$\neg Q$，P，Q，$P\leftrightarrow Q$，F，T，

$\neg(P\leftrightarrow Q)$，

仍在（B）类中。

对（B）类使用↔运算得：

$P\leftrightarrow Q$, $P\leftrightarrow\neg P\Leftrightarrow F$, $P\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$, $P\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg Q$, $P\leftrightarrow T\Leftrightarrow P$, $P\leftrightarrow F\Leftrightarrow\neg P$, $P\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow Q$

$Q\leftrightarrow\neg P\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$, $Q\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow F$, $Q\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg P$, $Q\leftrightarrow T\Leftrightarrow Q$, $Q\leftrightarrow F\Leftrightarrow\neg Q$, $Q\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P$,

$\neg P\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$, $\neg P\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow Q$, $\neg P\leftrightarrow T\Leftrightarrow\neg P$, $\neg P\leftrightarrow F\Leftrightarrow P$, $\neg P\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg Q$

$\neg Q\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P$, $\neg Q\leftrightarrow T\Leftrightarrow\neg Q$, $\neg Q\leftrightarrow T\Leftrightarrow\neg Q$, $\neg Q\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg P$,

$\neg(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow T\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$, $\neg(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow F\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$, $\neg(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow F$

$T\leftrightarrow F\Leftrightarrow F$, $T\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$

$F\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$

$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$.

故由（B）类使用↔运算后，结果仍在（B）中。

由上证明：用↔,¬两个连结词，反复作用在两个变元的公式中，结果只能产生（B）类中的公式，总共仅八个不同的公式，故{↔,¬}不是功能完备的，更不能是最小联结词组。

已证{↔,¬}不是最小联结词组，又因为 $P\bar{\vee}Q\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$，故任何命题公式中的联结词，如仅用{$\bar{\vee}$,¬}表达，则必可用{↔,¬}表达，其逆亦真。故{$\bar{\vee}$,¬}也必不是最小联结词组。

(8) 证明{∨}，{∧}和{→}不是最小联结词组。

证明：若{∨}，{∧}和{→}是最小联结词，则

$\neg P\Leftrightarrow(P\vee P\vee,,)$

$\neg P\Leftrightarrow(P\wedge P\wedge,,)$

$\neg P \Leftrightarrow P\rightarrow(P\rightarrow(P\rightarrow,, \quad)$

对所有命题变元指派 T，则等价式左边为 F，右边为 T，与等价表达式矛盾。

所以{ ∨ }，{ ∧ }和{→}不是最小联结词。

(9) 证明{¬ , →}和{¬ , $\stackrel{c}{\rightarrow}$ } 是最小联结词组。

证明：因为 {¬ , ∨ }为最小联结词组，且 $P\vee Q \Leftrightarrow \neg P\rightarrow Q$

所以{¬ , →}是功能完备的联结词组，又 {¬ },{ →}都不是功能完备的联结词组。

所以{¬ , →}是最小联结词组。

又因为 $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg (P \stackrel{c}{\rightarrow} Q)$ ，所以{¬ , $\stackrel{c}{\rightarrow}$ } 是功能完备的联结词组， 又{¬ },{ $\stackrel{c}{\rightarrow}$ } 不是功能完备的联结词组，

所以{¬ , $\stackrel{c}{\rightarrow}$ } 是最小联结词组。

习题 1-7

(1) 解：

$P\wedge(P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)$

$P\wedge(P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee(\neg Q\wedge Q))\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)$

(2)解：

a) $(\neg P\wedge Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\wedge Q)\vee R$

$\Leftrightarrow P\vee\neg Q\vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge P) \vee (R \wedge \neg P)$

b) $P \rightarrow ((Q \wedge R) \rightarrow S)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg (Q \wedge R) \vee S)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg R \wedge S) \vee (\neg R \wedge \neg S) \vee (S \wedge P) \vee (S \wedge \neg P)$

c) $\neg (P \vee \neg Q) \wedge (S \rightarrow T)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge (\neg S \vee T)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge T)$

d) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \vee Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

e) $\neg (P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$

(3) 解：

a) $P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

b) $\neg (P \rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P\vee Q)$

c) $\neg(P\to Q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg Q\vee\neg P)$

d) $(P\to Q)\to R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$

e) $(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\wedge(Q\vee P)\wedge(Q\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee\neg Q)\wedge(Q\vee P)$

(4) 解：

a) $(\neg P\vee\neg Q)\to(P\leftrightarrow\neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee\neg Q)\ \vee(P\leftrightarrow\neg Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\ \vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow \Sigma_{1,\ 2,\ 3}$

$\Leftrightarrow P\vee Q=\Pi_0$

b) $Q\wedge(P\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(Q\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge Q=\Sigma_3$

$\Leftrightarrow \Pi_{0,\ 1,\ 2}$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

c) $P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R))$

$\Leftrightarrow P \vee (P \vee (Q \vee (Q \vee R))$

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R = \Pi_{0}$

$\Leftrightarrow \Sigma_{1,\ 2,\ 3,4,5,6,7}$

$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

d) $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge (Q \wedge R)) \vee ((\neg Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee ((\neg Q \wedge \neg R) \wedge (Q \wedge R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) = \Sigma_{0,7}$

$\Leftrightarrow \Pi_{1,\ 2,\ 3,4,5,6}$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$\wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

e) $P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow P)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge (\neg Q \vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee P)$

$\Leftrightarrow T \vee (T \wedge \neg Q) \Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow \Sigma_{0,1,2,3} = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

f) $(Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \wedge \neg P \wedge Q$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \wedge \neg (P \vee \neg Q) \Leftrightarrow F$

$\Leftrightarrow \Pi_{0,1,\ 2,\ 3} = (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

(5) 证明：

a)

$(A\to B)\wedge(A\to C)$

$\Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)$

$A\to(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow \neg A\vee(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)$

b)

$(A\to B)\to(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg A\vee B)\vee(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow (A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow A\wedge(B\vee\neg B)$

$\Leftrightarrow A\wedge T$

$\Leftrightarrow A$

$(\neg A\to B)\wedge(B\to A)$

$\Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)$

$\Leftrightarrow A\vee(B\wedge\neg B)$

$\Leftrightarrow A\vee F$

$\Leftrightarrow A$

c)

$A\wedge B\wedge(\neg A\vee\neg B)$

$\Leftrightarrow ((A\wedge\neg A)\vee(A\wedge\neg B))\wedge B$

$\Leftrightarrow A\wedge B\wedge\neg B$

$\Leftrightarrow F$

$\neg A \wedge \neg B \wedge (A \vee B)$

$\Leftrightarrow ((\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge B)) \wedge \neg B$

$\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \wedge B$

$\Leftrightarrow F$

d)

$A \vee (A \rightarrow (A \wedge B))$

$\Leftrightarrow A \vee \neg A \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow T$

$\neg A \vee \neg B \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow \neg (A \wedge B) \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow T$

(6) 解：$A \Leftrightarrow R \uparrow (Q \wedge \neg (R \downarrow P))$，则 $A^* \Leftrightarrow R \downarrow (Q \vee \neg (R \uparrow P))$

$A \Leftrightarrow R \uparrow (Q \wedge \neg (R \downarrow P))$

$\Leftrightarrow \neg (R \wedge (Q \wedge (R \vee P)))$

$\Leftrightarrow \neg R \vee \neg Q \vee \neg (R \vee P)$

$\Leftrightarrow \neg (R \wedge Q) \vee \neg (R \vee P)$

$A^* \Leftrightarrow R \downarrow (Q \vee \neg (R \uparrow P))$

$\Leftrightarrow \neg (R \vee (Q \vee (R \wedge P))$

$\Leftrightarrow \neg R \wedge \neg Q \wedge \neg (R \wedge P)$

$\Leftrightarrow \neg (R \vee Q) \wedge \neg (R \wedge P)$

(7) 解：设 A：A 去出差。B：B 去出差。C：C 去出差。D：D 去出差。

若 A 去则 C 和 D 中要去一个。 $A \rightarrow (C \bar{\vee} D)$

B 和 C 不能都去。 $\neg(B \wedge C)$

C 去则 D 要留下。 $C \to \neg D$

按题意应有： $A \to (C \bar{\vee} D)$，$\neg(B \wedge C)$，$C \to \neg D$ 必须同时成立。

因为 $C \bar{\vee} D \Leftrightarrow (C \wedge \neg D) \vee (D \wedge \neg C)$

故 $(A \to (C \bar{\vee} D)) \wedge \neg(B \wedge C) \wedge (C \to \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (D \wedge \neg C)) \wedge \neg(B \wedge C) \wedge (\neg C \vee \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (D \wedge \neg C)) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (D \wedge \neg C)) \wedge ((\neg B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge \neg D) \vee \neg C)$

$\Leftrightarrow \underline{(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)} \vee \underline{(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg D)} \vee \underline{(\neg A \wedge \neg C \wedge \neg D)} \vee (\neg A \wedge \neg C)$

$\vee (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee \underline{(\neg C \wedge D \wedge \neg B \wedge \neg D)} \vee \underline{(\neg C \wedge D \wedge \neg C \wedge \neg D)}$

$\vee (\neg C \wedge D \wedge \neg C) \vee \underline{(\neg D \wedge C \wedge \neg B \wedge \neg C)} \vee (\neg D \wedge C \wedge \neg B \wedge \neg D)$

$\vee \underline{(\neg D \wedge C \wedge \neg C \wedge \neg D)} \vee \underline{(\neg D \wedge C \wedge \neg C)}$

在上述的析取范式中，有些（画线的）不符合题意，舍弃，得

$(\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg C \wedge D) \vee (\neg D \wedge C \wedge \neg B)$

故分派的方法为： $B \wedge D$，或 $D \wedge A$，或 $C \wedge A$。

(8)解：设 P：A 是第一。 Q：B 是第二。 R：C 是第二。 S：D 是第四。 E：A 是第二。

由题意得 $(P \bar{\vee} Q) \wedge (R \bar{\vee} S) \wedge (E \bar{\vee} S)$

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \wedge ((R \wedge \neg S) \vee (\neg R \wedge S)) \wedge ((E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S))$

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S)$

$\vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S)) \wedge ((E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S))$

因为 $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S)$ 与 $(\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S)$ 不合题意，所以原式可化为

$((P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S)) \wedge ((E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S))$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge E \wedge \neg S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge \neg E \wedge S)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge E\wedge\neg S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge\neg E\wedge S)$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S\wedge E)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge\neg E)$

因 R与 E矛盾，故$\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge\neg E$为真，

即 A不是第一， B是第二， C不是第二， D为第四， A不是第二。

于是得： A 是第三 B 是第二 C 是第一 D 是第四。

习题 1-8

(1) 证明：

a) $\neg(P\wedge\neg Q), \neg Q\vee R, \neg R \Rightarrow \neg P$

(1) $\neg R$ P

(2) $\neg Q\vee R$ P

(3) $\neg Q$ (1)(2)T,I

(4) $\neg(P\wedge\neg Q)$ P

(5) $\neg P\vee Q$ (4)T,E

(6) $\neg P$ (3)(5)T,I

b) $J\rightarrow(M\vee N), (H\vee G)\rightarrow J, H\vee G \Rightarrow M\vee N$

(1) $(H\vee G)\rightarrow J$ P

(2) $(H\vee G)$ P

(3) J (1)(2)T,I

(4) $J\rightarrow(M\vee N)$ P

(5) $M\vee N$ (3)(4)T,I

c) $B\wedge C, (B\leftrightarrow C)\rightarrow(H\vee G) \Rightarrow G\vee H$

(1) $B\wedge C$ P

(2) B(1)T,I

(3) C (1)T,I

(4) B $\vee \neg$ C(2)T,I

(5) C $\vee \neg$ B (3)T,I

(6) C $\rightarrow$B(4)T,E

(7) B $\rightarrow$C (5)T,E

(8) B $\leftrightarrow$ C (6)(7)T,E

(9) (B $\leftrightarrow$ C) $\rightarrow$(H$\vee$G) P

(10) H $\vee$G(8)(9)T,I

d)P$\rightarrow$Q, ($\neg$ Q$\vee$R)$\wedge\neg$ R, $\neg$ ($\neg$ P$\wedge$S) $\Rightarrow \neg$ S

(1) ($\neg$ Q$\vee$R) $\wedge\neg$ R

(2) $\neg$ Q$\vee$R (1)T,I

(3) $\neg$ R (1)T,I

(4) $\neg$ Q (2)(3)T,I

(5) P $\rightarrow$Q P

(6) $\neg$ P (4)(5)T,I

(7) $\neg$ ($\neg$ P$\wedge\neg$ S) P

(8) P $\vee\neg$ S (7)T,E

(9) $\neg$ S (6)(8)T,I

(2) 证明：

a)$\neg$ A$\vee$B, C$\rightarrow\neg$ B$\Rightarrow$ A$\rightarrow\neg$ C

(1) $\neg$ (A$\rightarrow\neg$ C) P

(2) A (1)T,I

(3) C (1)T,I

(4) $\neg A \vee B$ P

(5) B (2)(4)T,I

(6) $C \rightarrow \neg B$ P

(7) $\neg B$ (3)(6)T,I

(8) $B \wedge \neg B$ 矛盾。(5),(7)

b) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $(C \wedge D) \rightarrow E$, $\neg F \rightarrow (D \wedge \neg E) \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow F)$

(1) $\neg (A \rightarrow (B \rightarrow F))$ P

(2) A (1)T,I

(3) $\neg (B \rightarrow F)$ (1)T,I

(4) B (3)T,I

(5) $\neg F$ (3)T,

(6) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ P

(7) $B \rightarrow C$ (2)(6)T,I

(8) C (4)(7)T,I

(9) $\neg F \rightarrow (D \wedge \neg E)$ P

(10) $D \wedge \neg E$ (5)(9)T,I

(11) D (10)T,I

(12) $C \wedge D$ (8)(11)T,I

(13) $(C \wedge D) \rightarrow E$ P

(14) E (12)(13)T,I

(15) $\neg E$ (10)T,I

(16) $E \wedge \neg E$ 矛盾。(14),(15)

c)$A \vee B \rightarrow C \wedge D$, $D \vee E \rightarrow F \Rightarrow A \rightarrow F$

(1) $\neg (A \rightarrow F)$ P

(2) A (1)T,I

(3) $\neg$ F (1)T,I

(4) $A \vee B$ (2)T,I

(5) $(A \vee B) \rightarrow C \wedge D$ P

(6) $C \wedge D$ (4)(5)T,I

(7) C (6)T,I

(8) D (6)T,I

(9) $D \vee E$ (8)T,I

(10) $D \vee E \rightarrow F$ P

(11) F(9)(10)T,I

(12) $F \wedge \neg F$ 矛盾。 (3),(11)

d)$A \rightarrow (B \wedge C)$，$\neg B \vee D$, $(E \rightarrow \neg F) \rightarrow \neg D$, $B \rightarrow (A \wedge \neg E)$ $\Rightarrow B \rightarrow E$

(1) $\neg (B \rightarrow E)$ P

(2) B (1)T,I

(3) $\neg$ E (1)T,I

(4) $\neg B \vee D$ P

(5) D (2)(4)T,I

(6) $(E \rightarrow \neg F) \rightarrow \neg D$ P

(7) $\neg (E \rightarrow \neg F)$ (5)(6)T,I

(8) E (7)T,I

(9) $E \wedge \neg E$ 矛盾

e) $(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)$, $(B\rightarrow E)\wedge(D\rightarrow F)$, $\neg(E\wedge F)$, $A\rightarrow C\Rightarrow\neg A$

(1) $(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)$ P

(2) $A\rightarrow B$ (1)T,I

(3) $(B\rightarrow E)\wedge(D\rightarrow F)$ P

(4) $B\rightarrow E$ (3)T,I

(5) $A\rightarrow E$ (2)(4)T,I

(6) $\neg(E\wedge F)$ P

(7) $\neg E\vee\neg F$ (6)T,E

(8) $E\rightarrow\neg F$ (7)T,E

(9) $A\rightarrow\neg F$ (5)(8)T,I

(10) $C\rightarrow D$ (1)T,I

(11) $D\rightarrow F$ (3)T,I

(12) $C\rightarrow F$ (10)(10)T,I

(13) $A\rightarrow C$ P

(14) $A\rightarrow F$ (13)(12)T,I

(15) $\neg F\rightarrow\neg A$ (14)T,E

(16) $A\rightarrow\neg A$ (9)(15)T,I

(17) $\neg A\vee\neg A$ (16)T,E

(18) $\neg A$ (17) T,E

(3) 证明：

a) $\neg A\vee B$, $C\rightarrow\neg B\Rightarrow A\rightarrow\neg C$

(1) A P

(2) $\neg A\vee B$ P

(3) B (1)(2)T,I

(4) $C \rightarrow \neg B$ P

(5) $\neg C$ (3)(4)T,I

(6) $A \rightarrow \neg C$ CP

b) $A\rightarrow(B\rightarrow C)$, $(C\wedge D)\rightarrow E$, $\neg F\rightarrow(D\wedge\neg E) \Rightarrow A\rightarrow(B\rightarrow F)$

(1) A P

(2) $A \rightarrow(B\rightarrow C)$ P

(3) $B \rightarrow C$ (1)(2)T,I

(4) B P

(5) C (3)(4)T,I

(6) $(C \wedge D) \rightarrow E$ P

(7) $C \rightarrow(D\rightarrow E)$ (6)T,E

(8) $D \rightarrow E$ (5)(7)T,I

(9) $\neg D\vee E$ (8)T,E

(10) $\neg (D\wedge\neg E)$ (9)T,E

(11) $\neg F\rightarrow(D\wedge\neg E)$ P

(12) F (10)(11)T,I

(13) $B \rightarrow F$ CP

(14) $A \rightarrow(B\rightarrow F)$ CP

c) $A\vee B\rightarrow C\wedge D$, $D\vee E\rightarrow F \Rightarrow A\rightarrow F$

(1) A P

(2) $A \vee B$ (1)T,I

(3) $A \vee B\rightarrow C\vee D$ P

(4) $C \wedge D$ (2)(3)T,I

(5) D (4)T,I

(6) $D \vee E$ (5)T,I

(7) $D \vee E \to F$ P

(8) F (6)(7)T,I

(9) $A \to F$ CP

d) $A \to (B \wedge C)$, $\neg B \vee D$, $(E \to \neg F) \to \neg D$, $B \to (A \wedge \neg E) \Rightarrow B \to E$

(1) B P(附加前提)

(2) $\neg B \vee D$ P

(3) D (1)(2)T,I

(4) $(E \to \neg F) \to \neg D$ P

(5) $\neg (E \to \neg F)$ (3)(4)T,I

(6) E (5)T,I

(7) $B \to E$ CP

(4) 证明：

a) $R \to \neg Q$, $R \vee S$, $S \to \neg Q$, $P \to Q \Rightarrow \neg P$

(1) $R \to \neg Q$ P

(2) $R \vee S$ P

(3) $S \to \neg Q$ P

(4) $\neg Q$ (1)(2)(3)T,I

(5) $P \to Q$ P

(6) $\neg P$ (4)(5)T,I

b) $S \to \neg Q$, $S \vee R$, $\neg R$, $\neg P \leftrightarrow Q \Rightarrow P$

证法一：

(1) $S \vee R$ P

(2) $\neg R$ P

(3) S (1)(2)T,I

(4) $S \to \neg Q$ P

(5) $\neg Q$ (3)(4)T,I

(6) $\neg P \leftrightarrow Q$ P

(7) $(\neg P \to Q) \wedge (Q \to \neg P)$ (6)T,E

(8) $\neg P \to Q$ (7)T,I

(9) P (5)(8)T,I

证法二：（反证法）

(1) $\neg P$ P （附加前提）

(2) $\neg P \leftrightarrow Q$ P

(3) $(\neg P \to Q) \wedge (Q \to \neg P)$ (2)T，E

(4) $\neg P \to Q$ (3)T,I

(5) Q (1)(4)T,I

(6) $S \to \neg Q$ P

(7) $\neg S$ (5)(6)T,I

(8) $S \vee R$ P

(9) R (7)(8)T,I

(10) $\neg R$ P

(11) $\neg R \wedge R$ 矛盾（9）（10）T，I

c) $\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S)$，$((Q \to P) \vee \neg R)$，$R \Rightarrow P \leftrightarrow Q$

(1) R P

(2) (Q $\rightarrow$P) $\vee\neg$ R P

(3) Q $\rightarrow$P (1)(2)T,I

(4) $\neg$ (P$\rightarrow$Q) $\rightarrow\neg$ (R$\vee$S) P

(5) (R $\vee$S) $\rightarrow$(P$\rightarrow$Q)(4)T,E

(6) R $\vee$S (1)T,I

(7) P $\rightarrow$Q(5)(6)

(8) (P $\rightarrow$Q) $\wedge$(Q$\rightarrow$P)(3)(7)T,I

(9) P $\leftrightarrow$ Q (8)T,E

(5) 解：

a) 设 P：我跑步。 Q：我很疲劳。

前提为： P$\rightarrow$Q $\neg$ Q

(1) P $\rightarrow$Q P

(2) $\neg$ Q P

(3) $\neg$ P (1)(2)T,I

结论为：$\neg$ P, 我没有跑步。

b) 设 S：他犯了错误。 R：他神色慌张。

前提为： S$\rightarrow$R, R

因为（S$\rightarrow$R）$\wedge$R$\Leftrightarrow$ （$\neg$ S$\vee$R）$\wedge$R$\Leftrightarrow$ R。故本题没有确定的结论。

实际上，若 S $\rightarrow$R为真， R为真，则 S可为真， S也可为假，故无有效结论。

c) 设 P：我的程序通过。 Q：我很快乐。

R：阳光很好。 S：天很暖和。（把晚上十一点理解为阳光不好）

前提为： P$\rightarrow$Q, Q$\rightarrow$R, $\neg$ R$\wedge$S

(1) $P \rightarrow Q$ P

(2) $Q \rightarrow R$ P

(3) $P \rightarrow R$ (1)(2)T,I

(4) $\neg R \vee S$ P

(5) $\neg R$ (4)T,I

(6) $\neg P$ (3)(5)T,I

结论为：$\neg P$，我的程序没有通过

习题 2-1,2-2

（1）解：

a) 设 W（x）：x 是工人。c：小张。

则有 ?W（c）

b) 设 S（x）：x 是田径运动员。B（x）：x 是球类运动员。h：他

则有 S（h）∨B（h）

c) 设 C（x）：x 是聪明的。B（x）：x 是美丽的。l：小莉。

则有 C（l）∧B（l）

d）设 O（x）：x 是奇数。

则有 O（m）→ ? O（2m）。

e) 设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。

则有 （∀x）（Q（x）→ R（x））

f) 设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。

则有 （∃x）（R（x）∧Q（x））

g) 设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。

则有 ?（∀x）（R（x）→ Q（x））

h) 设 P（x，y）：直线 x 平行于直线 y

G（x，y）：直线 x 相交于直线 y。

则有 P（A，B） ? G（A，B）

（2）解：

a) 设 J(x) ：x 是教练员。 L(x) ：x 是运动员。

则有 （∀x）（J（x）→ L（x））

b) 设 S(x) ：x 是大学生。 L(x) ：x 是运动员。

则有 （∃x）（L（x）∧S（x））

c) 设 J(x) ：x 是教练员。 O(x) ：x 是年老的。 V（x）：x 是健壮的。

则有 （∃x）（J（x）∧O（x）∧V（x））

d) 设 O(x) ：x 是年老的。 V（x）：x 是健壮的。 j ：金教练

则有 ? O（j）∧? V（j）

e) 设 L(x) ：x 是运动员。 J(x) ：x 是教练员。

则 ?（∀x）（L（x）→ J（x））

本题亦可理解为：某些运动员不是教练。

故 （∃x）（L（x）∧? J（x））

f) 设 S（x）：x 是大学生。 L（x）：x 是运动员。 C（x）：x 是国家选手。

则有 （∃x）（S（x）∧L（x）∧C（x））

g) 设 C（x）：x 是国家选手。 V（x）：x 是健壮的。

则有 （∀x）（C（x）→ V（x））或? （∃x）（C（x）∧? V（x））

h) 设 C（x）：x 是国家选手。 O（x）：x 是老的。 L（x）：x 是运动员。

则有 （∀x）（O（x）∧C（x）→ L（x））

i) 设 W（x）：x 是女同志。 H（x）：x 是家庭妇女。 C（x）：x 是国家选手。

则有 ?（∃x）（W（x）∧C（x）∧H（x））

j） W（x）：x 是女同志。 J（x）：x 是教练。 C（x）：x 是国家选手。

则有（∃x）（W（x）∧J（x）∧C（x））

k） L（x）：x 是运动员。 J（y）：y 是教练。 A(x,y) ：x 钦佩 y。

则有 （∀x）（L（x）→ （∃y）（J（y）∧A（x，y）））

l） 设 S（x）：x 是大学生。 L（x）：x 是运动员。 A(x,y) ：x 钦佩 y。

则（∃x）（S（x）∧（∀y）（L（y）→ ? A(x,y) ））

习题 2-3

（1）解：

a）5 是质数。

b）2 是偶数且 2 是质数。

c）对所有的 x，若 x 能被 2 除尽，则 x 是偶数。

d）存在 x，x 是偶数，且 x 能除尽 6。（即某些偶数能除尽 6）

e）对所有的 x，若 x 不是偶数，则 x 不能被 2 除尽。

f）对所有的 x，若 x 是偶数，则对所有的 y，若 x 能除尽 y，则 y 也是偶数。

g）对所有的 x，若 x 是质数，则存在 y，y 是偶数且 x 能除尽 y（即所有质数能除尽某些偶数）。

h）对所有的 x，若 x 是奇数，则对所有 y，y 是质数，则 x 不能除尽 y（即任何奇数不能除尽任何质数）。

（2）解：（∀x）(∀y)((P(x)∧P(y)∧¬ E(x,y)→(∃!z)(L(z)∧R(x,y,z)))

或 （∀x）(∀y)((P(x)∧P(y)∧¬ E(x,y)→(∃z)(L(z)∧R(x,y,z) ∧¬ (∃u)(¬ E(z,u) ∧L(u)

∧R(x,y,u))))

（3）解：

a) 设 N(x):x 是有限个数的乘积。 z(y):y 为 0。

P(x):x 的乘积为零。 F(y):y 是乘积中的一个因子。

则有 (∀x)((N(x) ∧P(x)→(∃y)(F(y) ∧z(y)))

b) 设 R(x):x 是实数。 Q(x,y):y 大于 x。 故 (∀x)(R(x)→(∃y)(Q(x,y) ∧R(y)))

c) R(x):x 是实数。 G(x,y):x 大于 y。 则

(∃x)(∃y)(∃z)(R(x)∧R(y)∧R(z)∧G(x+y,x·z)

（4）解：设 G(x,y):x 大于 y。则有 (∀x)(∀y)(∀z)(G(y,x) ∧G(0,z)→G(x·z,y·z))

（5）解：设 N(x):x 是一个数。 S(x,y):y 是 x 的后继数。 E(x,y)：x=y.则

a) (∀x)(N(x)→(∃!y)(N(y)∧S(x,y)))

或(∀x)(N(x)→(∃y)(N(y)∧S(x,y) ∧┐(∃z)(┐E(y,z) ∧N(z)∧S(x,z))))

b)┐(∃x)(N(x)∧S(x,1))

c) (∀x)(N(x) ∧┐S(x,2)→(∃!y)(N(y) ∧S(y,x)))

或(∀x)(N(x) ∧┐S(x,2)→(∃y)(N(y) ∧S(y,x) ∧┐(∃z)(┐E(y,z) ∧N(z)∧S(z,x))))

（6）解：设 S(x):x 是大学生。 E(x):x 是戴眼睛的。

F(x):x 是用功的。 R(x,y):x 在看 y。

G(y):y 是大的。 K(y):y 是厚的。 J(y):y 是巨著。 a:这本。 b:那位。

则有 E(b)∧F(b)∧S(b)∧R(b,a)∧G(a)∧K(a)∧J(a)

（7）解：设 P(x,y):x 在 y 连续。 Q(x,y):x>y。则

P(f,a) ((∀ε)(∃δ)(∀x)(Q(ε,0)→(Q(δ,0)∧Q(δ,|x-a|)→Q(ε,|f(x)-f(a)|))))

习题 **2-4**

(1) 解：a) x 是约束变元， y 是自由变元。

b) x 是约束变元， $P(x)\wedge Q(x)$中的 x 受全称量词 $\forall$ 的约束，S(x)中的 x 受存在量词 $\exists$ 的约束。

c) x，y 都是约束变元，P(x)中的 x 受 $\exists$ 的约束， R(x)中的 x 受 $\forall$ 的约束。

d) x，y 是约束变元， z 是自由变元。

(2) 解：a) $P(a)\wedge P(b)\wedge P(c)$

b) $R(a)\wedge R(b)\wedge R(c)\wedge S(a)\wedge S(b)\wedge S(c)$

c) $(P(a)\rightarrow Q(a))\wedge(P(b)\rightarrow Q(b))\wedge(P(c)\rightarrow Q(c))$

d) $(\neg P(a)\wedge\neg P(b)\wedge\neg P(c))\vee(P(z)\wedge P(b)\wedge P(c))$

e) $(R(a)\wedge R(b)\wedge R(c))\wedge(S(a)\vee S(b)\vee S(c))$

(3) 解：

a) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(P(1)\vee Q(1))\wedge(P(2)\vee Q(2))$，

但 P(1)为 T，Q(1)为 F，P(2)为 F，Q(2)为 T,所以

$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(T\vee F)\wedge(F\vee T)\Leftrightarrow T$。

b) $(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)\Leftrightarrow((P\rightarrow Q(-2))\wedge(P\rightarrow Q(3))\wedge(P\rightarrow Q(6)))\vee R(a)$

因为 P 为 T，Q(−2)为 T，Q(3)为 T，Q(6)为 F，R(5)为 F，所以

$(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)\Leftrightarrow((T\rightarrow T)\wedge(T\rightarrow T)\wedge(T\rightarrow F))\vee F\Leftrightarrow F$

(4) 解：a) $(\forall u)(\exists v)(P(u,z)\rightarrow Q(v))\quad S(x,y)$

b) $(\forall u)(P(u)\rightarrow(R(u)\vee Q(u))\wedge(\exists v)R(v))\rightarrow(\exists z)S(x,z)$

(5) 解：a) $((\exists y)A(u,y)\rightarrow(\forall x)B(x,v))\wedge(\exists x)(\forall z)C(x,t,z)$

b) $((\forall y)P(u,y)\wedge(\exists z)Q(u,z))\vee(\forall x)R(x,t)$

习题 **2-5**

（1）解： a) $P(a,f(a))\wedge P(b,f(b)) \Leftrightarrow P(1,f(1))\wedge P(2,f(2)) \Leftrightarrow P(1,2)\wedge P(2,1) \Leftrightarrow T\wedge F \Leftrightarrow F$

b) $(\forall x)(\exists y)P(y,x) \Leftrightarrow (\forall x)(P(1,x)\vee P(2,x)) \Leftrightarrow (P(1,1)\vee P(2,1))\wedge(P(1,2)\vee P(2,2))$

$\Leftrightarrow (T\vee F)\wedge(T\vee F) \Leftrightarrow T$

c) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow P(f(x),f(y)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)((P(x,1)\rightarrow P(f(x),f(1)))\wedge(P(x,2)\rightarrow P(f(x)f(2))))$

$\Leftrightarrow (P(1,1)\rightarrow P(f(1),f(1)))\wedge(P(1,2)\rightarrow P(f(1),f(2)))$

$\wedge(P(2,1)\rightarrow P(f(2),f(1)))\wedge(P(2,2)\rightarrow P(f(2),f(2)))$

$\Leftrightarrow (P(1,1)\rightarrow P(2,2))\wedge(P(1,2)\rightarrow P(2,1))\wedge(P(2,1)\rightarrow P(1,2))\wedge(P(2,2)\rightarrow P(1,1))$

$\Leftrightarrow (T\rightarrow F)\wedge(T\rightarrow F)\wedge(F\rightarrow T)\wedge(F\rightarrow T) \Leftrightarrow F\wedge F\wedge T\wedge T \Leftrightarrow F$

（2）解： a) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(f(x),a))$

$\Leftrightarrow (P(1)\rightarrow Q(f(1),1))\wedge(P(2)\rightarrow Q(f(2),1))$

$\Leftrightarrow (F\rightarrow Q(2,1))\wedge(T\rightarrow Q(1,1))$

$\Leftrightarrow (F\rightarrow F)\wedge(T\rightarrow T) \Leftrightarrow T$

b) $(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x,f(a))$

$\Leftrightarrow (P(f(1))\wedge Q(1,f(1)))\vee(P(f(2))\wedge Q(2,f(1))) \Leftrightarrow (T\wedge T)\vee(F\wedge F) \Leftrightarrow T$

c) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x,a))$

$\Leftrightarrow (P(1)\wedge Q(1,a))\vee(P(2)\wedge Q(2,a))$

$\Leftrightarrow (P(1)\wedge Q(1,1))\vee(P(2)\wedge Q(2,1))$

$\Leftrightarrow (F\wedge T)\vee(T\wedge F) \Leftrightarrow F$

d) $(\forall x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(P(x)\wedge(\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(P(x)\wedge(Q(x,1)\vee Q(x,2)))$

$\Leftrightarrow (P(1)\wedge(Q(1,1)\vee Q(1,2)))\wedge(P(2)\wedge(Q(2,1)\vee Q(2,2)))$

$\Leftrightarrow$ (F∧(T∨T))∧(T∧(F∨F)) $\Leftrightarrow$ F

(3) 举例说明下列各蕴含式。

a) $\neg((\exists x)(P(x)\wedge Q(a)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow \neg Q(a)$

b) $(\forall x)(\neg P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)\neg Q(x) \Rightarrow P(a)$

c) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

d) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)), (\forall x)\neg P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$

e) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)), (\forall x)\neg P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)$

解：a）因为 $\neg((\exists x)(P(x)\wedge Q(a)) \Leftrightarrow \neg(\exists x)P(x) \vee \neg Q(a)$

故原式为 $\neg(\exists x)P(x) \vee \neg Q(a) \Rightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow \neg Q(a)$

设 P（x）：x 是大学生。 Q（x）：x 是运动员

前提 或者不存在 x，x 是大学生，或者 a 是运动员

结论 如果存在 x 是大学生，则必有 a 是运动员。

b)设 P（x）：x 是研究生。 Q（x）：x 是大学生。 a：论域中的某人。

前提：对论域中所有 x，如果 x 不是研究生则 x 是大学生。

对论域中所有 x， x 不是大学生。

结论：对论域中所有 x 都是研究生。

故，对论域中某个 a，必有结论 a 是研究生，即 P（a）成立。

c）设 P（x）：x 是研究生。 Q（x）：x 曾读过大学。 R（x）：x 曾读过中学。

前提 对所有 x，如果 x 是研究生，则 x 曾读过大学。

对所有 x，如果 x 曾读过大学，则 x 曾读过中学。

结论：对所有 x，如果 x 是研究生，则 x 曾读过中学。

d）设 P（x）：x 是研究生。 Q（x）：x 是运动员。

前提 对所有 x，或者 x 是研究生，或者 x 是运动员。

对所有 x，x 不是研究生

结论　必存在 x，x 是运动员。

e）设 P（x）：x 是研究生。 Q（x）：x 是运动员。

前提　对所有 x，或者 x 是研究生，或者 x 是运动员。

对所有 x，x 不是研究生

结论　对所有 x，x 是运动员。

（4）证明：$(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x) \vee (\exists x) B(x)$

$\Leftrightarrow \neg (\forall x)A(x) \vee (\exists x) B(x) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x) B(x)$

（5）设论域 D={a，b，c}，求证 $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

证明：因为论域 D={a，b，c}，所以

$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Leftrightarrow (A(a) \wedge A(b) \wedge A(c)) \vee (B(a) \wedge B(b) \wedge B(c))$

$\Leftrightarrow (A(a) \vee B(a)) \wedge (A(a) \vee B(b)) \wedge (A(a) \vee B(c)) \wedge (A(b) \vee B(a)) \wedge (A(b) \vee B(b))$

$\wedge (A(b) \vee B(c)) \wedge (A(c) \vee B(a)) \wedge (A(c) \vee B(b)) \wedge (A(c) \vee B(c))$

$\Rightarrow (A(a) \vee B(a)) \wedge (A(b) \vee B(b)) \wedge (A(c) \vee B(c))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

所以 $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

（6）解：推证不正确，因为

$\neg (\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x)) \Leftrightarrow \neg ((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)\neg B(x))$

（7）求证 $(\forall x)(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow (\forall y)Q(y)$

证明：$(\forall x)(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg P(x) \vee Q(y))$

$\Leftrightarrow (\forall x) \neg P(x) \vee (\forall y)Q(y)$

$\Leftrightarrow \neg (\exists x)P(x) \vee (\forall y)Q(y)$

$\Leftrightarrow (\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)Q(y)$

习题 **2-6**

（1）解：a)$(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(x,y))$

b) $(\exists x)(\neg((\exists y)P(x,y))\rightarrow((\exists z)Q(z)\rightarrow R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((\exists y)P(x,y)\vee((\exists z)Q(z)\rightarrow R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((\exists y)P(x,y) \vee(\neg(\exists z)Q(z) \vee R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((\exists y)P(x,y) \vee((\forall z)\neg Q(z) \vee R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \vee\neg Q(z) \vee R(x))$

c)$(\forall x)(\forall y)(((\exists zP(x,y,z)\wedge(\exists u)Q(x,u))\rightarrow(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg((\exists z)P(x,y,z)\wedge(\exists u)Q(x,u))\vee(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((\forall z)\neg P(x,y,z) \vee(\forall u)\neg Q(x,u)\vee(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((\forall z)\neg P(x,y,z) \vee(\forall u)\neg Q(x,u)\vee(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x,y,z) \vee\neg Q(x,u)\vee Q(y,v))$

（2）解：a)$((\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))\rightarrow(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \neg((\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)) \vee(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) \vee(\exists x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow T$

b) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\forall y)((\forall z)Q(x,y)\rightarrow\neg(\forall z)R(y,x)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee(\forall y)(Q(x,y)\rightarrow\neg R(y,x)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg P(x) \vee\neg Q(x,y) \vee\neg R(y,x))$

前束合取范式

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee (P(x) \wedge Q(x,y) \wedge \neg R(y,x))$

$\vee (P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee (\neg P(x) \wedge Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee ((P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge \neg R(y,x))$

$\vee (\neg P(x) \wedge Q(x,y) \wedge \neg R(y,x)))$

前束析取范式

c) $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \neg (\forall x)P(x) \vee (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z))$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall u)R(x,y,u))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x) \vee (\forall z)Q(x,z) \vee (\forall u)R(x,y,u))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall z)(\forall u)(\neg P(x) \vee Q(x,z) \vee R(x,y,u))$

前束合取范式

$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall z)(\forall u)((P(x) \wedge Q(x,z) \wedge R(x,y,u))$

$\vee (P(x) \wedge Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u))$

$\vee (P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge R(x,y,u))$

$\vee (P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u))$

$\vee (\neg P(x) \wedge Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u))$

$\vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge R(x,y,u))$

$\vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u)))$

前束析取范式

d) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x,y)) \rightarrow ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow \neg (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x,y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee ((\exists u)P(u) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee (P(u) \wedge Q(y,z)))$

前束析取范式

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \vee P(u)) \wedge (P(x) \vee Q(y,z)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee P(u)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee Q(y,z)))$

前束合取范式

习题 **2-7**

(1) 证明：

(2) a)① $(\forall x)(\neg A(x) \rightarrow B(x))$ P

② $\neg A(u) \rightarrow B(u)$ US①

③ $(\forall x)\neg B(x)$ P

④ $\neg B(u)$ US③

⑤ $A(u) \vee B(u)$ T②E

⑥ $A(u)$ T④⑤I

⑦ $(\exists x)A(x)$ EG⑥

b)① $\neg (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$ P（附加前提）

② $(\exists x)\neg (A(x) \rightarrow B(x))$ T①E

③ $\neg (A(c) \rightarrow B(c))$ ES②

④ $A(c)$ T③I

⑤ $\neg B(c)$ T③I

⑥ $(\exists x)A(x)$ EG④

⑦ $(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$ P

⑧$(\forall x)B(x)$ T⑥⑦I

⑨$B(c)$ US⑧

⑩$B(c) \wedge \neg B(c)$ T⑤⑨矛盾

c）①$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$ P

②$A(u) \rightarrow B(u)$ US①

③$(\forall x)(C(x) \rightarrow \neg B(x))$ P

④$C(u) \rightarrow \neg B(u)$ US③

⑤$\neg B(u) \rightarrow \neg A(u)$ T②E

⑥$C(u) \rightarrow \neg A(u)$ T④⑤I

⑦$(\forall x)(C(x) \rightarrow \neg A(x))$ UG⑥

d)$(\forall x)(A(x) \vee B(x)), (\forall x)(B(x) \rightarrow \neg C(x)), (\forall x)C(x) \Rightarrow (\forall x)A(x)$

①$(\forall x)(B(x) \rightarrow \neg C(x))$ P

②$B(u) \rightarrow \neg C(u)$ US①

③$(\forall x)C(x)$ P

④$C(u)$ US③

⑤$\neg B(u)$ T②④I

⑥$(\forall x)(A(x) \vee B(x))$ P

⑦$A(u) \vee B(u)$ US

⑧$A(u)$ T⑤⑦I

⑨$(\forall x)A(x)$ UG⑧

(2)证明：

a) ①$(\forall x)P(x)$ P（附加前提）

②$P(u)$ US①

③$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$ P

④$P(u)\rightarrow Q(u)$ US③

⑤$Q(u)$ T②④ I

⑥$(\forall x)Q(x)$ UG⑤

⑦$(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$ CP

b)因为 $(\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)\Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$

故本题就是推证 $(\forall x)(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow \neg(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$

①$\neg(\forall x)P(x)$ P（附加前提）

②$(\exists x)\neg P(x)$ T①E

③$\neg P(c)$ ES②

④$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$ P

⑤$P(c)\vee Q(c)$ ES④

⑥$Q(c)$ T③⑤ I

⑦$(\exists x) Q(x)$ EG⑥

⑧$\neg(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$ CP

(3)

解：a)设 R（x）：x 是实数。 Q（x）：x 是有理数。 I（x）：x 是整数。

本题符号化为：

$(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))\wedge(\exists x)(Q(x)\wedge I(x)) \Rightarrow (\exists x)(R(x)\wedge I(x))$

①$(\exists x)(Q(x)\wedge I(x))$ P

②$Q(c)\wedge I(c)$ ES①

③$(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$ P

④Q(c) →R(c)　　　　　　　　　　US③

⑤Q(c)　　　　　　　　　　T②I

⑥R(c)　　　　　　　　　　T④⑤I

⑦I(c)　　　　　　　　　　T②I

⑧R(c)∧I(c)　　　　　　　　　　T⑥⑦I

⑨(∃x)(R(x) ∧I(x))　　　　　　　　　　EG⑧

b)设 P（x）：x 喜欢步行。 Q（x）：x 喜欢乘汽车。 R（x）：x 喜欢骑自行车

本题符号化为：

(∀x)(P(x) →¬ Q(x)), (∀x)(Q(x) ∨R(x)) , (∃x) ¬ R(x) ⇒ (∃x) ¬ P(x)

①(∃x) ¬ R(x)　　　　　　　　　　P

②¬ R (c)　　　　　　　　　　ES①

③(∀x)(Q(x) ∨R(x))　　　　　　　　　　P

④Q(c) ∨R(c)　　　　　　　　　　US③

⑤Q(c)　　　　　　　　　　T②④I

⑥(∀x)(P(x) →¬ Q(x))　　　　　　　　　　P

⑦P(c) →¬ Q(c)　　　　　　　　　　US⑥

⑧¬ P (c)　　　　　　　　　　T⑤⑦I

⑨(∃x) ¬ P(x)　　　　　　　　　　EG⑧

c)每个大学生不是文科学生就是理工科学生， 有的大学生是优等生， 小张不是理工科学生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科学生。

设 G（x）：x 是大学生。 L（x）：x 是文科学生。 P（x）：x 是理工科学生。

S（x）：x 是优秀生。 c：小张。

本题符号化为：

$(\forall x)(G(x) \rightarrow L(x) \vee P(x)), (\exists x)(G(x) \wedge S(x)), \neg P(c), S(c) \Rightarrow G(c) \rightarrow L(c)$

① $G(c)$	P（附加前提）
② $(\forall x)(G(x) \rightarrow L(x) \vee P(x))$	P
③ $G(c) \rightarrow L(c) \vee P(c)$	US②
④ $L(c) \vee P(c)$	T①③ I
⑤ $\neg P(c)$	P
⑥ $L(c)$	T④⑤ I
⑦ $G(c) \rightarrow L(c)$	CP

注意：本题推证过程中未用到前提 $(\exists x)(G(x) \wedge S(x))$ 以及 $S(c)$。主要是 S（x）：x 是优秀生，这个条件与其他前提的联系对证明结论没有影响，因 S（x）与其他前提不矛盾，故本题的推证仍是有效的。

3-5.1 列出所有从 X={a,b,c} 到 Y={s} 的关系。

解： $Z_1=\{<a,s>\}$
$Z_2=\{<b,s>\}$
$Z_3=\{<c,s>\}$
$Z_4=\{<a,s>,<b,s>\}$
$Z_5=\{<a,s>,<c,s>\}$
$Z_6=\{<b,s>,<c,s>\}$
$Z_7=\{<a,s>,<b,s>,<c,s>\}$

3-5.2 在一个有 n 个元素的集合上，可以有多少种不同的关系。

解 因为在 X 中的任何二元关系都是 X × X 的子集，而 $X\times X=X^2$ 中共有 n^2 个元素，取 0 个到 n^2 个元素，共可组成 2^{n^2} 个子集，即 $|\wp(X\times X)|=2^{n^2}$。

3-5.3 设 A ＝ {6 ：00，6 ：30,7 ：30，，，9 ：30,10 ：30} 表示在晚上每隔半小时的九个时刻的集合，设 B={3,12,15,17} 表示本地四个电视频道的集合，设 R_1 和 R_2 是从 A 到 B 的两个二元关系，对于二无关系 R_1，R_2，$R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，$R_1\oplus R_2$ 和 R_1-R_2 可分别得出怎样的解释。

解： A × B 表示在晚上九个时刻和四个电视频道所组成的电视节目表。

R_1 和 R_2 分别是 A × B 的两个子集，例如 R_1 表示音乐节目播出的时间表，R_2 是戏曲节日的播出时间表，则 $R_1\cup R_2$ 表示音乐或戏曲节目的播出时间表，$R_1\cap R_2$ 表示音乐和戏曲一起播出的时间表，$R_1\oplus R_2$ 表示音乐节目表以及戏曲节目表，但不是音乐和戏曲一起的节目表，R_1-R_2 表示不是戏曲时间的音乐节目时间麦。

3-5.4 设 L 表示关系 “小于或等于”，D 表示‘整除”关系，L 和 D 刀均定义于 {1,2,3,6}，分别写出 L 和 D 的所有元素并求出 L ∩ D.

解： L={<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,3>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}
D={<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}
L ∩ D=
{<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}

3-5.5 对下列每一式，给出 A 上的二元关系，试给出关系图：

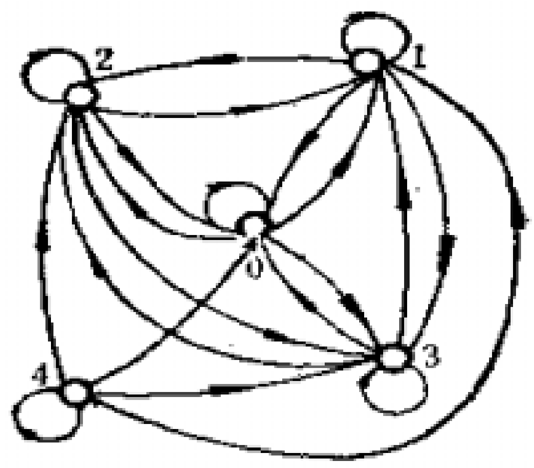
a){<x,y>|0 ? x∧ y? 3}，这里 A={1,2,3,4}；

b){<x,y>|2 ? x,y ? 7 且 x 除尽 y,这里 A ＝ {n|n ? N ∧ n? 10}

c) {<x,y>|0 ? x- y<3}，这里 A={0,1,2,3,4}；

d){<x,y>|x,y 是互质的 }，这里 A={2,3,4,5,6}

解：
a) R={<0,0>,<0,1>,<0,2>,<0,3>,
<1,0>,<1,1>,<1,2>,<1,3>,
<2,0>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,
<3,0>,<3,1>,<3,2>,<3,3>,}
其关系图



(a)

b) R={<2,0>,<2,2>,<2,4>,<2,6>,
<3,0>,<3,3>,<3,6>,
<4,0>,<4,4>,
<5,0>,<5,5>,
<6,0>,<6,6>,
<7,0>,<7,7>}

3-6.1 分析集合 A={1，2，3} 上的下述五个关系：

（1） R={＜1，1＞，＜ 1，2＞，＜ 1，3＞，＜ 3，3＞}；

（2） S={＜1，1＞，＜ 1，2＞，＜ 2，1＞，＜ 2，2＞，＜ 3，3＞}；

（3） T={＜1，1＞，＜ 1，2＞，＜ 2，2＞，＜ 2，3＞}；

（4） ? =空关系；

（5） A× A=全域关系。

判断 A中的上述关系是否为 a）自反的，b）对称的，c）可传递的，d）反对称的。

解（ 1） R是可传递和反对称的。

（2） S是自反，对称和可传递的。

（3） T是反对称的。

（4）空关系是对称，可传递和反对称的。

（5）全域关系是自反，对称和可传递的。

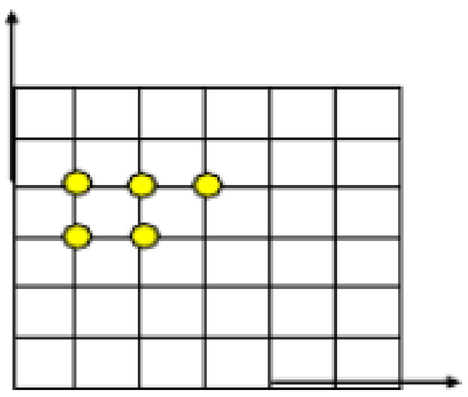
3-6.2 给定 A={1，2，3,4}，考虑 a上的关系 R，若 R={＜1，3＞，＜ 1，4＞，＜2，3＞，＜ 2，4＞，＜ 3，4＞}

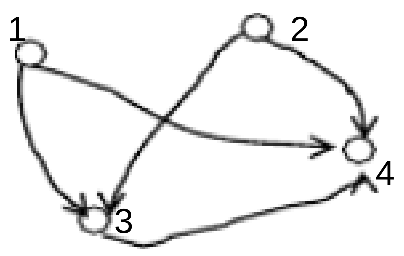
a) 在 A×A的坐标图上标出 R，并绘出它的关系图；

b) R是 i ）自反的 ii）对称的 iii ）可传递的，iv）反对称的吗？

解

a）





R是可传递的的和反对称的； 但不是自反的和对称的。

3-6.3 举出 A={1，2，3} 上关系 R的例子，使其具有下述性质：

a）既是对称的，又是反对称的；

b） R既不是对称的， 又不是反对称的；

c） R是可传递的。

解

a） R={＜1，1＞，＜ 2，2＞，＜ 3，3＞}

b） R={＜1，2＞，＜ 2，1＞，＜ 2，3＞}

c) R={ ＜1，2＞，＜ 2，1＞，＜ 1，1＞，＜ 2，2＞，＜ 3，3＞}

3-6.4 如果关系 R 和 S 是自反的，对称的和可传递的， 证明 R∩S也是自反，对称和可传递的。

证明 设 R和 S是 X上的自反的，对称的和可传递的关系。

1）对任意 x? X，有＜ x，x＞? R和＜x，x＞? S，所以＜ x，x＞? R∩S，即 R∩S在 X上是自反的。

2）对任意的＜ x，y＞? R∩S，有＜ x，y＞? R∧＜ x，y＞? S，因为 R和 S是对称的，故必有＜ y，x＞? R∧＜y，x＞? S。即＜ y，x＞? R∩S，所以 R∩S在 X上是对称的。

3）对任意的＜ x，y＞? R∩S∧＜ y，z＞? R∩S，则有＜x，y＞? R∧＜ x，y＞? S∧＜ y，z＞? R∧＜ y，z＞? S

因为 R 和 S 是传递的，故得＜ x，z＞? R∧＜ x，z＞? S，即＜ x，z＞? R∩S，所以 R∩S在 X上是传递的。

3-6.5 给定 S={1，2，3，4} 和 S 上关系：R={＜ 1，2＞，＜ 4，3＞，＜ 2，2＞，＜ 2，1＞，＜ 3，1＞}

说明 R是不可传递的， 找出关系 $R_1 \supseteq R$，使得 R_1 是可传递的，还能找出另一个

3-7.1 设 R_1 和 R_2 是 A 上的任意关系，说明以下命题的真假并予以证明。

a）若 R_1 和 R_2 是自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的；

b）若 R_1 和 R_2 是反自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是反自反的；

c）若 R_1 和 R_2 是对称的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是对称的；

d）若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是传递的。

证明 a）对任意 $a \in A$，设 R_1 和 R_2 是自反的，则 $\langle a, a\rangle \in R_1$，$\langle a, a\rangle \in R_2$ 所以，$\langle a, a\rangle \in R_1 \circ R_2$，即 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的。

b）假。例如：设 $A=\{a, b\}$，有 $R_1=\{\langle a, b\rangle\}$ 与 $R_2=\{\langle b, a\rangle\}$

R_1 和 R_2 是反自反的。但 $R_1 \circ R_2=\{\langle a, a\rangle\}$，所以 $R_1 \circ R_2$ 在 A 上不是反自反的。

c) 假。例如：设 $A=\{a, b, c\}$，有

$R_1=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$，

$R_2=\{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

R_1 和 R_2 是对称的，但 $R_1 \circ R_2=\{\langle a, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

所以，$R_1 \circ R_2$ 不是对称的。

d）假。例如：设 $A=\{a, b, c\}$，有

$R_1=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$，

$R_2=\{\langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$

则 R_1，R_2 都是传递的。但 $R_1 \circ R_2=\{\langle a, c\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$

所以，$R_1 \circ R_2$ 不是传递的。

3-7.2 证明 若 S 为集合 X 上的二元关系：

a） S 是传递的，当且仅当（$S \circ S$）$\subseteq S$；

b） S 是自反的，当且仅当 $I_x \subseteq S$；

c）证明定理 3-7.3 （b）(即 S 是反对称的，当且仅当 $S \cap S^c \subseteq I_x$)。

证明 a）设 S 为传递的，若 $\langle x, z\rangle \in S \circ S$，则存在某个 $y \in X$，使得 $\langle x, y\rangle \in S$，且 $\langle y, z\rangle \in S$。

若 S 是传递的，$\langle x, z\rangle \in S$，所以（$S \circ S$）$\subseteq S$。

反之，设（$S \circ S$）$\subseteq S$，假定 $\langle x, y\rangle \in S$ 且 $\langle y, z\rangle \in S$，则 $\langle x, z\rangle \in S \circ S$。因为（$S \circ S$）$\subseteq S$，故 $\langle x, z\rangle \in S$，得到 S 是传递的。

b）设 S 是自反的，令 $\langle x, y\rangle \in I_x$，则 $x=y$。但 $\langle x, x\rangle \in S$，因此 $\langle x, y\rangle = \langle x, x\rangle \in S$，得 $I_x \subseteq S$。

反之，令 $I_x \subseteq S$，设任意 $x \in X$，$\langle x, x\rangle \in I_x$，故 $\langle x, x\rangle \in S$，因此 S 是自反的。

c）设 S 是反对称的。假定 $\langle x, y\rangle \in S \cap S^c$，则

$\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle x, y\rangle \in S^c \Rightarrow \langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, x\rangle \in S$

因为 S 是反对称的，故 $x = y$，

所以 $\langle x, y\rangle = \langle x, x\rangle \in I_x$，即 $S \cap S^c \subseteq I_x$。

反之，若 $S \cap S^c \subseteq I_x$，设 $\langle x, y\rangle \in S$ 且 $\langle y, x\rangle \in S$，则

$\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle x, y\rangle \in S^c$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in S \cap S^c$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in I_x$

故 $x = y$，即 S 是反对称的。

3-7.3 设 S 为 X 上的关系，证明若 S 是自反和传递的，则 $S \circ S=S$，其逆为真吗 ？

证明 若 S 是 X 上传递关系，由习题 3-7.2a ）可知（$S \circ S$）$\subseteq S$，

令 $\langle x, y\rangle \in S$，根据自反性，必有 $\langle x, x\rangle \in S$，因此有 $\langle x, y\rangle \in S \circ S$，即 $S \subseteq S \circ S$。得到 $S=S \circ S$.

这个定理的逆不真。 例如 $X=\{1, 2, 3\}$，$S=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$，

3-8.1 根据图 3-8.1 中的有向图，写出邻接矩阵和关系 R，并求出 R 的自反闭包和对称闭包。

解

$$M_R=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}$$

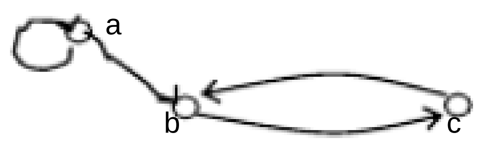


图 3-8.1

R={ ＜a，a＞，＜ a，b＞，＜ b，c＞，＜ c，b＞=

r（R） =R ∪ I_X ={ ＜a，a＞，＜ b，b＞，＜ c，c＞，＜ a，b＞，＜ b，c＞，＜ c，b＞=

s（R） =R ∪ R^C={ ＜a，a＞，＜ a，b＞，＜ b，a＞，＜ b，c＞，＜ c，b＞}

3-8.2 设集合 A={a，b，c，d}A 上的关系

R={＜a，b＞，＜ b，a＞，＜ b，c＞，＜ c，d＞}

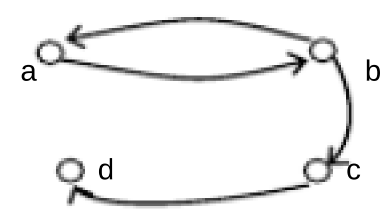
a） 用矩阵运算和作图方法求出 R 的自反、对称、传递闭包；

b） 用 Warshall 算法，求出 R 的传递闭包。

解 a）

$$M_R=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}$$

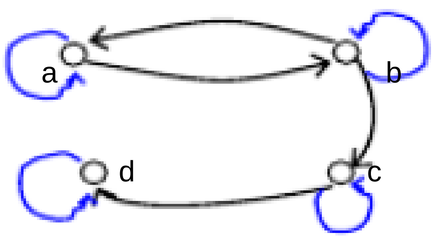
R 的关系图如图所示。



$$M_R+M_A=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

r（R） =R ∪ I_A

={＜a，a＞，＜ a，b＞，＜ b，a＞，＜ b，b＞，＜ b，c＞，＜ c，c＞，＜ c，d＞，＜ d，d＞}（图（ a））



图（ a）

$$M_R+M_{R^c}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}$$

3-9.1 4 个元素的集合共有多少不同的划分。

解 整数 4 可划分为：4，1+3，1+1+2，2+2，1+1+1+1。

$$1+C_4^1+C_4^2+\frac{1}{2}C_4^2+1=15$$（种）

3-9.2 设$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$是集合 A 的一个划分，我们定义 A 上的一个二元关系 R，使＜a,b＞∈R 当且仅当 a 和 b 在这个划分的同一块中。证明 R 是自反的，对称的，和传递的。

证明 设对任意 $a\in A$，则必存在 A_i，使 $a\in A_i$，因 a 与 a 必可看作在同一块中，故有＜a,a＞∈R。即 R 是自反的。

设 $a,b\in A$，若有＜a,b＞∈R，则 a 与 b 必在同一块，故 b 与 a 亦在同一块，＜b，a＞∈R，即 R 是对称的。

对任意 $a,b,c\in A$，

＜a,b＞∈R∧＜b,c＞∈R

$\Rightarrow(\exists i)(a\in A_i\wedge b\in A_i)\wedge(\exists j)(b\in A_j\wedge c\in A_j)$

$\Rightarrow(\exists i)(\exists j)(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge b\in A_i\cap A_j)$

$\Rightarrow(\exists i)(\exists j)(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge A_i\cap A_j\neq ?)$

$\Rightarrow(\exists i)(\exists j)(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge i=j)\ (\because i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=?)$

$\Rightarrow$a,c 在同一块

$\Rightarrow$＜a,c＞∈R

∴R 传递

3-10.1 设 R 和 R′是集合 A 上的等价关系，用例子说明：R∪R′不一定是等价关系。

证明 设 A={1，2，3}，S=R∪R′

R={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，1＞，＜1，3＞}

R′={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，2＞，＜2，3＞}

则 R∪R′={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，1＞，＜1，3＞，＜3，2＞，＜2，3＞}

因为如＜2，3＞∈S∧＜3，1＞∈S，但＜2，1＞∉S，故 R∪R′不是传递的，即 R∪R′不是 A 上的等价关系。

3-10.2 试问由 4 个元素组成的有限集上所有等价关系的个数为多少？

解 因为集合 X 上的等价关系与 X 的划分是一一对应的，所以 4 个元素的有限集上等价关系的数目，与 4 个元素集合进行划分的数目是相同的，由习题 3-9.1 可知共有 15 个不同的等价关系。

3-10.3 给定集合 S={1，2，3，4，5}，找出 S 上的等价关系 R，此关系 R 能产生划分 {{1，2}，{3}，{4，5}}，并画出关系图。

解 我们可用如下方法产生一个等价关系：

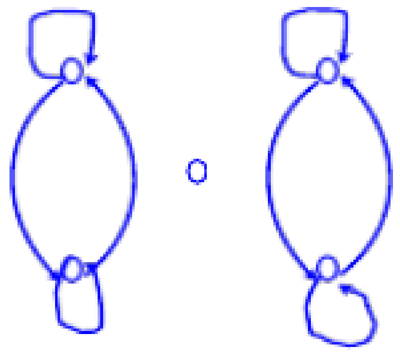
R_1={1，2}×{1，2}={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，2＞}

R_2={3}×{3}={＜3，3＞}

R_3={4，5}×{4，5}={＜4，4＞，＜4，5＞，＜5，4＞，＜5，5＞}

R= R_1∪R_2∪R_3={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜4，4＞，＜4，5＞，＜5，4＞，＜5，5＞}

关系图如图。



3-10.4 设 R 是一个二元关系，S={＜a，b＞| 对于某一 c，有＜a，c＞∈R∧＜c，b＞∈R}，证明若 R 是一个等价关系，则 S 也是一个等价关系。

证明 设 R 是 A 上的等价关系：

（1） 对任一 x∈A，因为 R 在 A 上自反，所以＜x，x＞∈R。由 S 定义，＜x，x＞∈S，所以 S 是自反的。

（2） 对任意 x,y ∈A，若＜x，y＞∈S，则存在某个 c，使得＜x，c＞∈R∧＜c，y＞∈R，因为 R 是对称，故有：＜y，c＞∈R∧＜c，x＞∈R，由 S 的定义，可知＜y，x＞∈S，所以 S 是对称的。

（3） 对任意 x,y,z ∈A，若＜x，y＞∈S，及＜y，z＞∈S，则必存在某个 c_1，使＜x，c_1＞∈R，＜c_1，y＞∈R。由 R 的传递性，可知＜x，y＞∈R，同理存在 c_2，使＜y，c_2＞∈R∧＜c_2，z＞∈R，由 R 传递，可知＜y，z＞∈R。再由 S 定义，得＜x，z＞∈S。故 S 是传递的。

3-10.5 设正整数的序偶集合 A，在 A 上定义二元关系 R 如下：＜＜x,y＞，＜u,v＞＞∈R，当且仅当 xv=yu，证明 R 是一个等价关系。

证明 设 A 上定义的二元关系 R 为：

$$<<x,y>, <u,v>> \in R \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{u}{v}$$

① 对任意＜x,y＞∈A，因为 $\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$，所以

$$<<x,y>, <x,y>> \in R$$

即 R 是自反的。

② 设＜x,y＞∈A，＜u,v＞∈A，若

$<<x,y>,<u,v>>\in R \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v} \Rightarrow \frac{u}{v}=\frac{x}{y} \Rightarrow <<u,v>,<x,y>>\in R$

即 R是对称的。

③ 设任意$<x,y>\in A$，$<u,v>\in A$，$<w,s>\in A$，对

$<<x,y>,<u,v>>\in R \wedge <<u,v>,<w,s>>\in R$

$\Rightarrow (\frac{x}{y}=\frac{u}{v}) \wedge (\frac{u}{v}=\frac{w}{s}) \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{w}{s}$

$\Rightarrow <<x,y>,<w,s>>\in R$

故 R是传递的，于是 R是 A上的等价关系。

3-10.6　设 R是集合 A 上的对称和传递关系，证明如果对于 A中的每一个元素 a, 在 A 中同时也存在 b，使<a,b>在 R之中，则 R是一个等价关系。

证明　对任意 $a\in A$，必存在一个 $b\in A$，使得$<a,b>\in R$.

因为 R是传递的和对称的，故有：

$<a,b>\in R \wedge <b,c>\in R \Rightarrow <a,c>\in R \Rightarrow <c,a>\in R$

由$<a,c>\in R \wedge <c,a>\in R \Rightarrow <a,a>\in R$

所以 R在 A上是自反的，即 R是 A上的等价关系。

3-10.7　设 R_1和 R_2是非空集合 A上的等价关系，试确定下述各式，哪些是 A上的等价关系，对不是的式子，提供反例证明。

a)（A×A）$-R_1$；

b）R_1-R_2；

c）R_1^2；

d) r（R_1-R_2）（即 R_1-R_2的自反闭包）。

解 a）$(A\times A)-R_1$ 不是 A 上等价关系。例如：

$A=\{a,b\}$，$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$

$A\times A=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$

$(A\times A)-R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$

所以 $(A\times A)-R_1$ 不是 A 上等价关系。

b）设 $A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$

$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$

$R_1-R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$

所以 R_1 和 R_2 是 A 上等价关系，但 R_1-R_2 不是 A 上等价关系。

c）若 R_1 是 A 上等价关系，则

$\langle a,a\rangle\in R_1 \Rightarrow \langle a,a\rangle\in R_1\circ R_1$

所以 R_1^2 是 A 上自反的。

若 $\langle a,b\rangle\in R_1^2$ 则存在 c，使得 $\langle a,c\rangle\in R_1\wedge\langle c,b\rangle\in R_1$。因 R_1 对称，故有

$\langle b,c\rangle\in R_1\wedge\langle c,a\rangle\in R_1\Rightarrow\langle b,a\rangle\in R_1^2$

即 R_1^2 是对称的。

若 $\langle a,b\rangle\in R_1^2\wedge\langle b,c\rangle\in R_1^2$，则有

$\langle a,b\rangle\in R_1\circ R_1\wedge\langle b,c\rangle\in R_1\circ R_1$

$\Rightarrow(\exists e_1)(\langle a,e_1\rangle\in R_1\wedge\langle e_1,b\rangle\in R_1)\wedge(\exists e_2)(\langle b,e_2\rangle\in R_1\wedge\langle e_2,c\rangle\in R_1)$

$\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R_1\wedge\langle b,c\rangle\in R_1$（$\because R_1$ 传递）

$\Rightarrow \langle a,c\rangle \in R_1^2$

即 R_1^2 是传递的。

故 R_1^2 是 A 上的等价关系。

d ）如 b）所设， R_1 和 R_2 是 A 上的等价关系，但

r （R_1-R_2） =（R_1-R_2）$\cup I_A$

={ $\langle a,b\rangle$，$\langle b,a\rangle$，$\langle a,c\rangle$，$\langle c,a\rangle$，$\langle a,a\rangle$，$\langle b,b\rangle$，$\langle c,c\rangle$}

不是 A 上的等价关系。

3-10.8 设 C^* 是实数部分非零的全体复数组成的集合， C^* 上的关系 R 定义为：(a+bi)R(c+di) $\Leftrightarrow$ ac>0, 证明 R 是等价关系，并给出关系 R 的等价类的几何说明。

证明：(1) 对任意非零实数 a，有 $a^2>0\Leftrightarrow$ (a+bi)R(a+bi)

故 R 在 C^* 上是自反的。

(2) 对任意 (a+bi)R(c+di) $\Leftrightarrow$ ac>0,

因 ca=ac>0$\Leftrightarrow$ (c+di)R(a+bi),

所以 R 在 C^* 上是对称的。

(3) 设(a+bi)R(c+di) ，(c+di)R(u+vi) ，则有 $ac>0\wedge cu>0$

若 c>0，则 $a>0\wedge u>0\Rightarrow$ au>0

若 c<0，则 $a<0\wedge u<0\Rightarrow$ au>0

所以(a+bi)R(u+vi) ，即 R 在 C^* 上是传递的。

关系 R 的等价类，就是复数平面上第一、四象限上的点，或第二、三象限上的点，因为在这两种情况下，任意两个点 (a,b) ，(c,d) ，其横坐标乘积 ac>0。

3-10.9 设 Π 和 Π' 是非空集合 A 上的划分，并设 R 和 R' 分别为由 Π 和 Π' 诱导的等价关系，那么 Π' 细分 Π 的充要条件是 $R' \subseteq R$。

证明：若 Π' 细分 Π。由假设 $aR'b$，则在 Π' 中有某个块 S'，使得 $a,b \in S'$，因 Π' 细分 Π，故在 Π 中，必有某个块 S，使 $S' \subseteq S$，即 $a,b \in S$，于是有 aRb,即 $R' \subseteq R$。

反之，若 $R' \subseteq R$，令 S' 为 H' 的一个分块，且 $a \in S'$，则 $S'=[a]_{R'}=\{x|xR'a\}$

但对每一个 x，若 $xR'a$，因 $R' \subseteq R$，故 xRa，因此 $\{x|xR'a\} \subseteq \{x|xRa\}$ 即 $[a]_{R'} \subseteq [a]_R$

设 $S=[a]_R$，则 $S' \subseteq S$

这就证明了 Π' 细分 Π。

3-10.10 设 R_j 是表示 I 上的模 j 等价关系，R_k 是表示 I 上的模 k 等价关系，证明 I/R_k 细分 I/R_j 当且仅当 k 是 j 的整数倍。

证明：由题设 $R_j=\{<x,y>|x \equiv y(\mathrm{mod}\, j)\}$

$R_k=\{<x,y>|x \equiv y(\mathrm{mod}\, k)\}$

故 $<x,y> \in R_j \Leftrightarrow x-y=c\cdot j$ (对某个 $c \in I$)

$<x,y> \in R_k \Leftrightarrow x-y=d\cdot k$ (对某个 $d \in I$)

a) 假设 I/R_k 细分 I/R_j，则 $R_k \subseteq R_j$

因此 $<k,0> \in R_k \Rightarrow <k,0> \in R_j$

故 $k-0=1\cdot k=c\,j$ (对某个 $c \in I$)

于是 k 是 j 的整数倍。

b) 若对于某个 $r \in I$，有 $k=rj$ 则：

$<x,y> \in R_k \Leftrightarrow x-y=ck$ (对某个 $c \in I$)

$\Rightarrow x-y=crj$ (对某个 $c,r \in I$)

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R_j$

因此，$R_k \subseteq R_j$，于是 I/R_k 细分 I/R_j