第一章. 极限与连续

第一节. 函 数

一　预备知识

二　映射

三　函数

四　初等函数

一、预备知识

1. 集合 具有某种特定性质的事物的<u>总体</u>.

组成这个集合的事物称为该集合的<u>元素</u>.

$$M=\{x \mid x\text{所具有的特征}\}$$

$$a \in M, \qquad a \notin M,$$

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

数集

$$\mathbb{N}=\{\text{全体自然数}\}=\{0,1,2,3,\ldots,\ n,\ldots\}$$

$$\mathbb{N}^{+}=\{\text{全体正整数}\}=\{1,2,3,\ldots,\ n,\ldots\}$$

$$\mathbb{Z}=\{\text{全体整数}\} \qquad \mathbb{Q}=\{\text{全体有理数}\}$$

$$\mathbb{R}=\{\text{全体实数}\} \qquad \mathbb{C}=\{\text{全体复数}\}$$

其它集合

$$M=\{(x,y)\,|\,x.y\in R, x^2+y^2=1\}$$

$$A\times B=\{(x,y):x\in A,\ y\in B\}$$

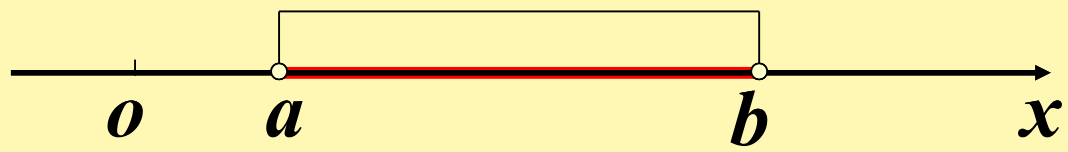
$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$：$xoy$平面上全体点的集合.

2. 区间:

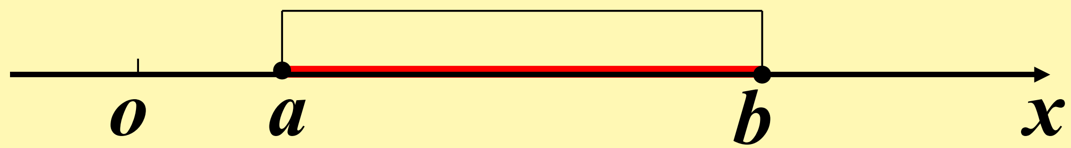
有限区间

$\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, 且 $a < b$.

$\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a,b)



$\{x \mid a \le x \le b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a,b]$

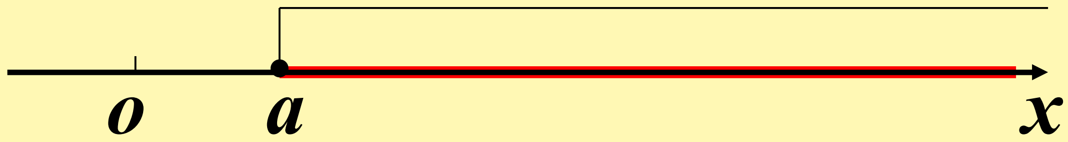


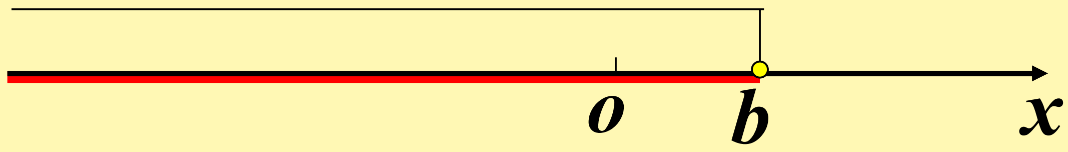
$\{x|a \le x < b\}$ 称为半开区间，记作 $[a,b)$

$\{x|a < x \le b\}$ 称为半开区间， 记作 $(a,b]$

无限区间

$\{x|a \le x\} = [a,+\infty)$ $\{x|x < b\} = (-\infty,b)$





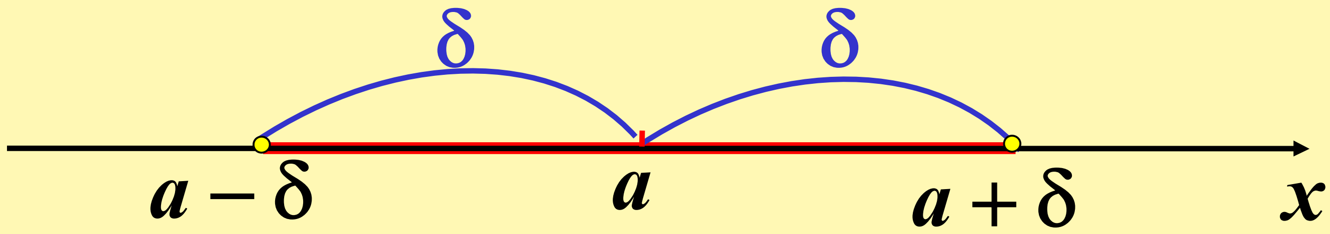
$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

3. 邻域： 设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$.

数集$\{x \mid |x-a| < \delta\}$称为点$a$的$\delta$邻域，

点a叫做这邻域的中心，δ叫做这邻域的半径 .

$$U_\delta(a) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

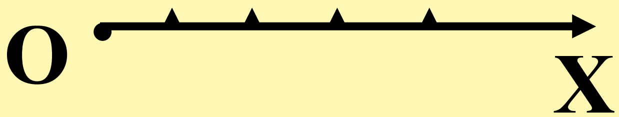


点 a的去心 δ邻域, 记作$U_\delta^0(a)$.

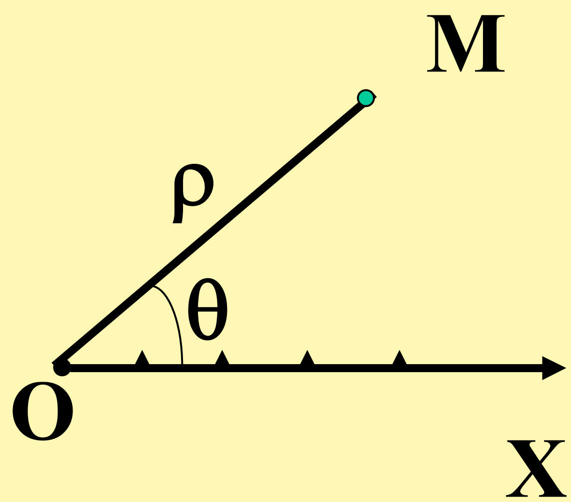
即 $U_\delta^0(a) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$.

4. 极坐标

极坐标系：在平面内取一个定点O，叫做**极点**，引一条射线OX，叫做**极轴**。再选定一个长度单位和**计算角度的正方向**（通常取逆时针方向）



对于平面上任意一点M，用ρ表示线段OM的长度，用θ表示从OX到OM的角度，ρ叫做点M的**极径**，θ叫做点M的**极角**，有序数对（ρ，θ）就叫做M的极坐标。



极坐标系下点与它的极坐标的对应情况

[1]给定（ρ, θ），就可以在极坐标平面内确定唯一的一点M。

[2]给定平面上一点M，却有无数个极坐标与之对应。原因在于：极角有无数个

一般地，若（ρ，θ）是一点的极坐标，则（ρ，θ+2kπ）都可以作为它的极坐标.

限定 0≤θ<2π，那么除极点外，平面内的点与其极坐标就可以一一对应了.

极坐标与直角坐标的互化:

设点M的直角坐标是（x, y）极坐标是（ρ, θ）

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}(x \neq 0) \end{cases}$$

互化公式的三个前提条件:

1. 极点与直角坐标系的原点重合;
2. 极轴与直角坐标系的x轴的正半轴重合;
3. 两种坐标系的单位长度相同.

常见曲线的极坐标方程

例 （1）过点A(a, 0)，且垂直于极轴的直线L的极坐标方程：

$$\rho\cos\theta = a$$

（2）中心在极点，半径为 a 的圆：$\rho = a$

（3）中心在A(a, 0) (a>0)半径为 a 的圆：

$$\rho = 2a\cos\theta$$

二、映射

1. 定义: 设 X、Y是两非空集合，如果依某种法则 f，对集合 X 中的任意元素 x，在 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，则称法则 f 是从 X 到 Y 的 映射，记作 f ：X→Y， 集合 X 称为映射 f 的 定义域，集合 $f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}$ 称为映射 f 的 值域。

2. 满射、单射及双射

如果 f(X) =Y，则称 f 为满射;

若对X中的 $x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为单射;

如果映射 f 既是满射, 又是单射, 则称 f 为 一一映射

或 双射.

三、函　数

(一) 函数概念

1. 函数的定义

若数集 $D \subset R$，则称映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的函数。

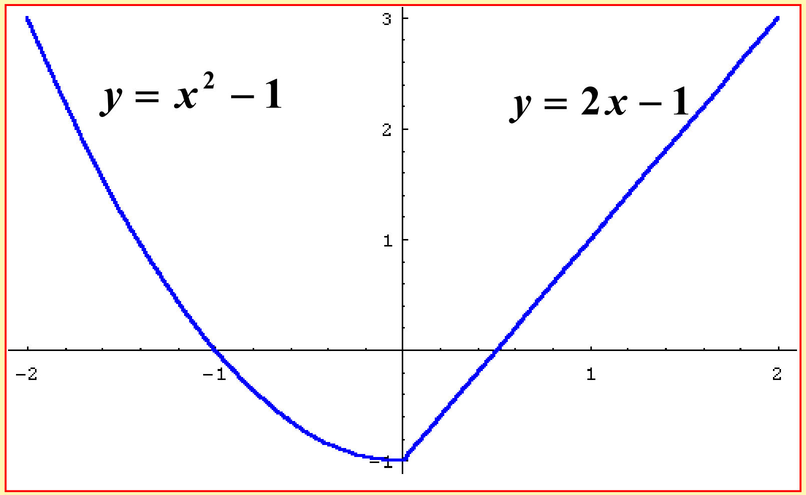
其值域 $W = f(D) = \{ y \mid y = f(x), x \in D \} \subseteq R$

函数的两要素：(1)定义域　(2)对应法则

2. 分段函数

在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同的式子来表示的函数,称为 分段函数.

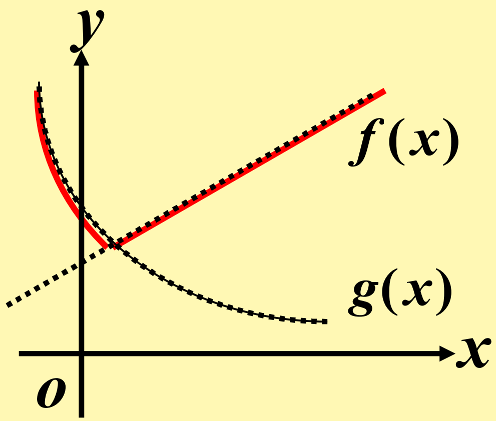
例如 $$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>0 \\ x^2-1, & x\le 0 \end{cases}$$

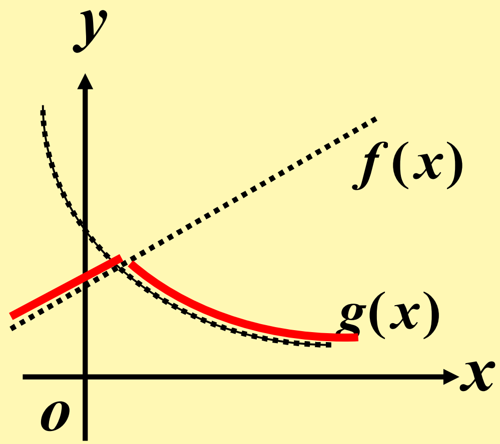


分段函数的例子

(1) 取最值函数

$$y = \max\{f(x), g(x)\} \qquad y = \min\{f(x), g(x)\}$$



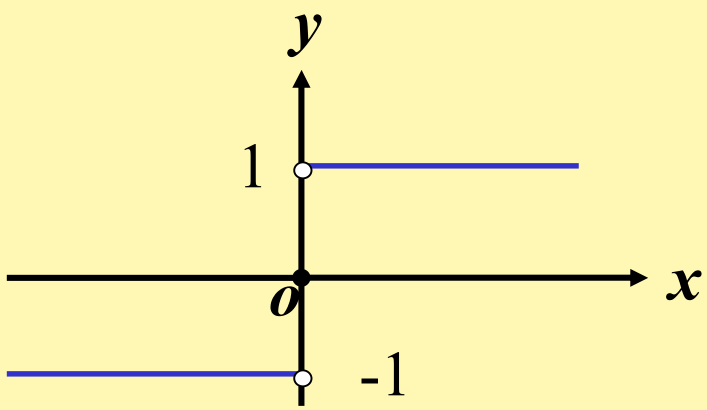


例如

$$\max\{x^2, x\} = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

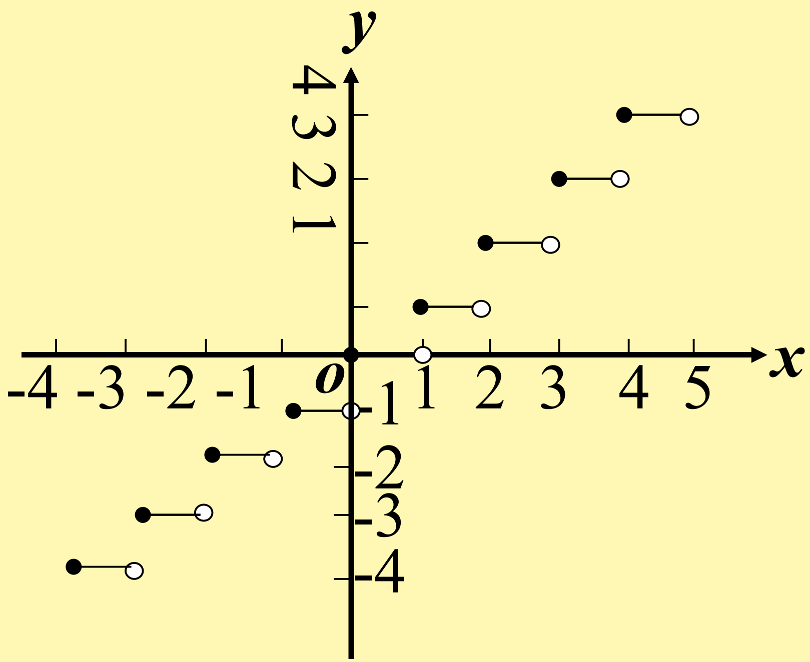
(2) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当} x > 0 \\ 0 & \text{当} x = 0 \\ -1 & \text{当} x < 0 \end{cases}$$



(3) 取整函数　$y = [x]$

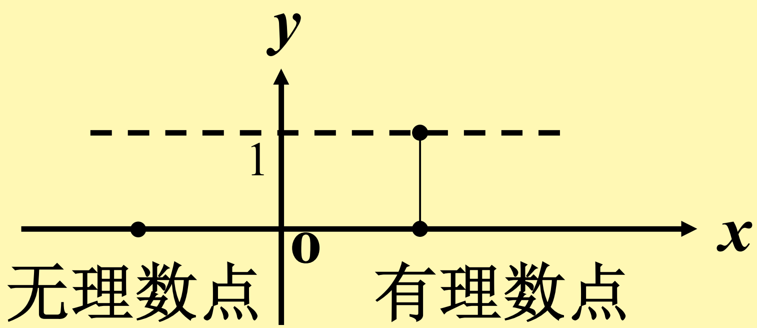
$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数



阶梯曲线

(4) 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当}x\text{是有理数时} \\ 0 & \text{当}x\text{是无理数时} \end{cases}$$

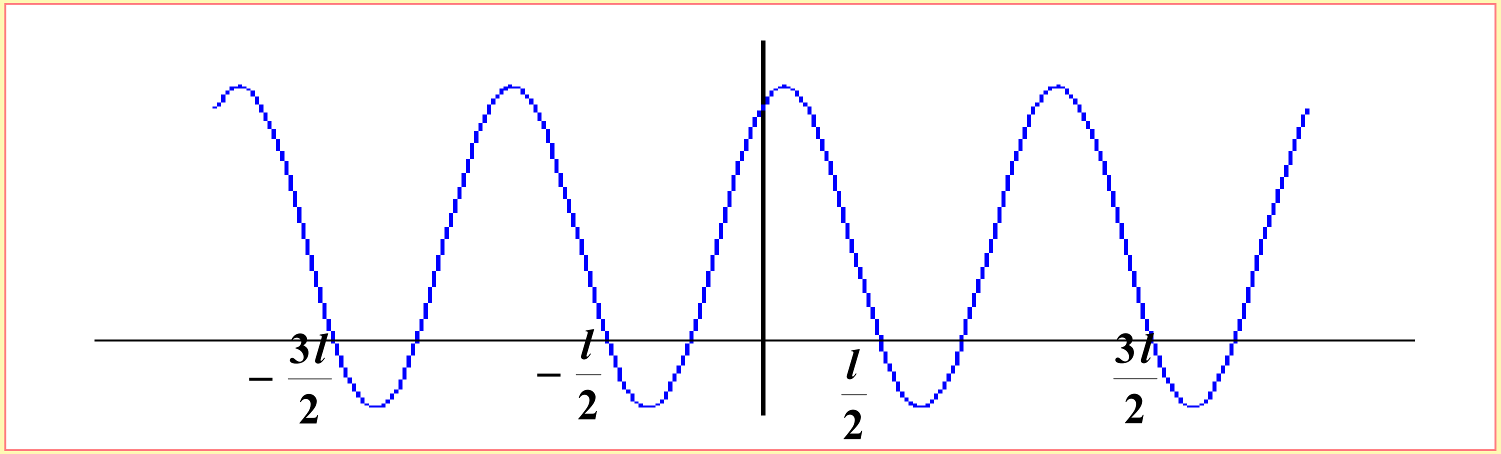


(二) 几类特殊的函数

1. 周期函数

通常说周期函数的周期是指其最小 正周期,

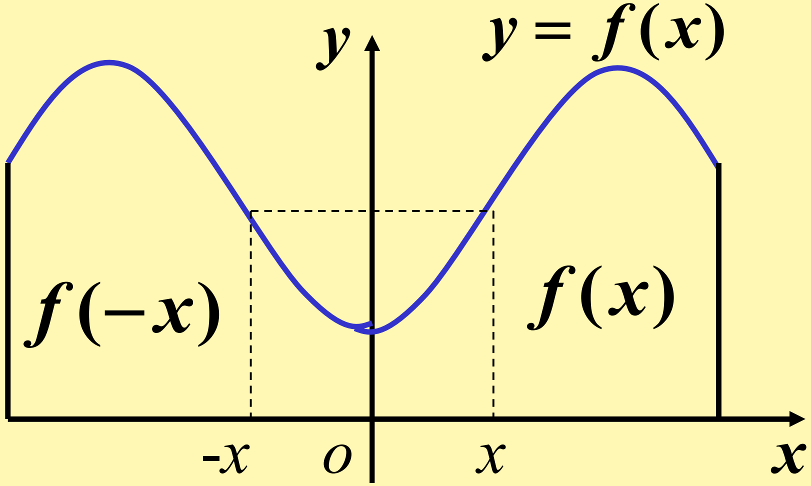
但是，并非所有的周期函数都存在最小正周期.



2．奇（偶）函数

设D关于原点对称，对于$\forall x \in D$，有

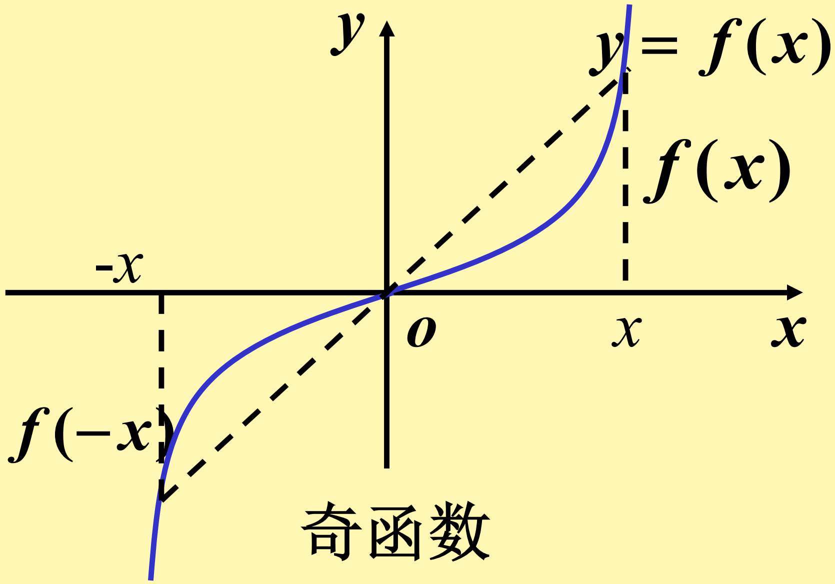
$f(-x) = f(x)$　　称 $f(x)$为偶函数；



偶函数

设D关于原点对称，对于$\forall x \in D$，有

$f(-x) = -f(x)$　称$f(x)$为奇函数；



奇函数

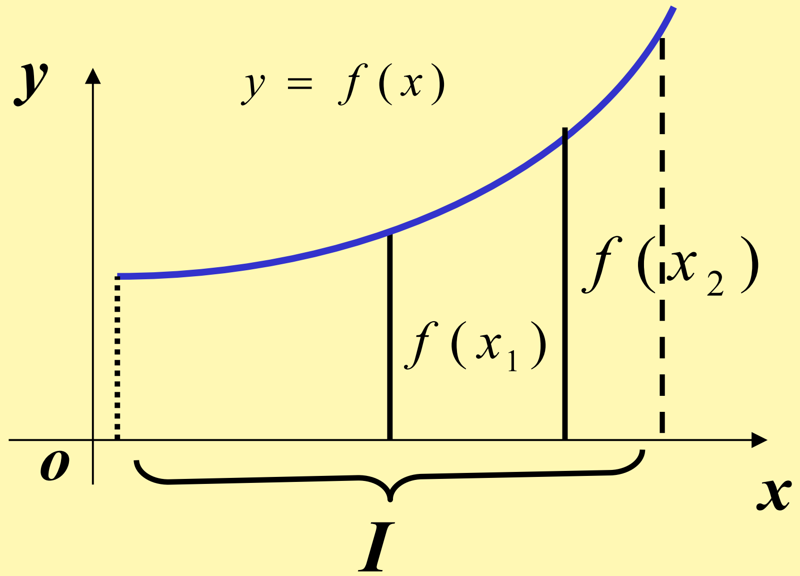
3．单调函数

设函数 $f(x)$的定义域为 D, 区间$I \in D$,

如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2，当 $x_1 < x_2$时,

恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,

则称函数 $f(x)$在区间I上是单调增加的；

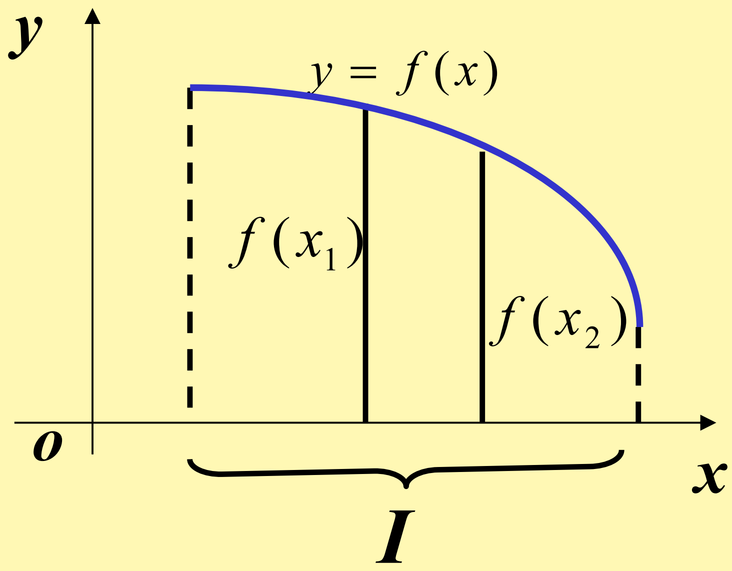


设函数 $f(x)$的定义域为 D, 区间$I \in D$,

如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2, 当$x_1 < x_2$时,

恒有 $f(x_1) > f(x_2)$,

则称函数 $f(x)$在区间I上是单调减少的;



4. 有界函数

定义　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间$I\subset D$。

(1) 如果存在数K_1，使得对任意 $x\in I$，$f(x)\le K_1$ 都成立，则称函数$y=f(x)$ 在 I上有上界，而K_1 称为函数 $y=f(x)$ 的一个上界。

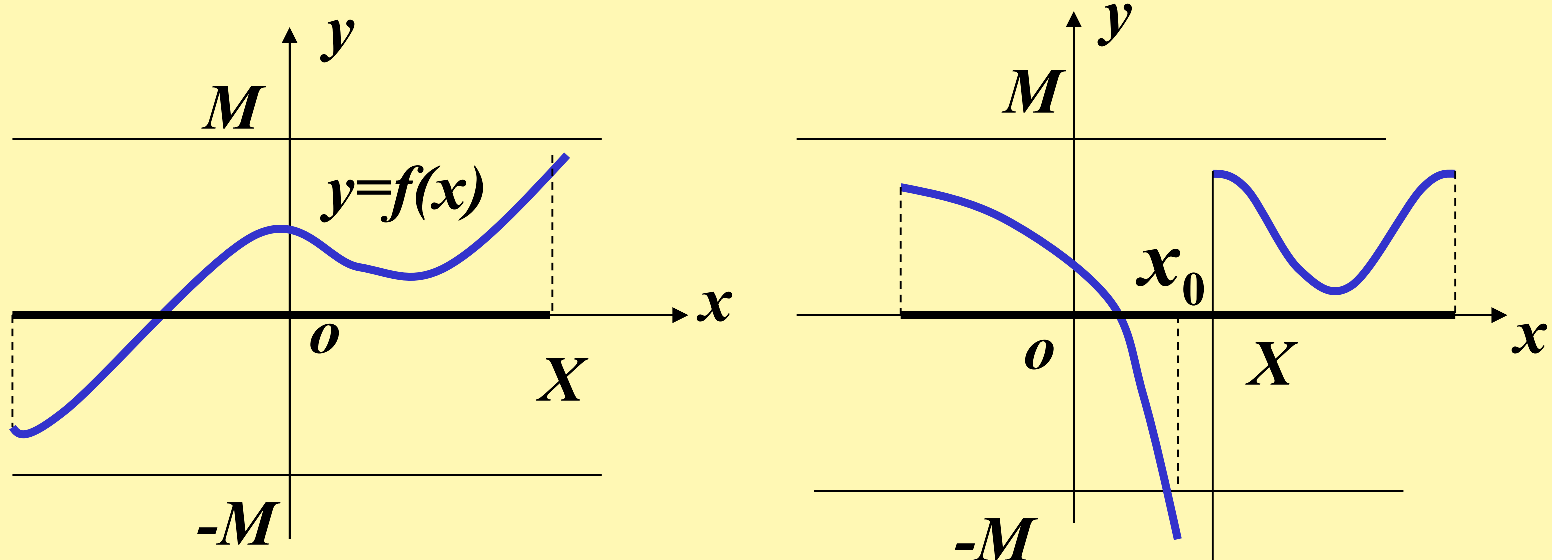
(2) 如果存在数K_2，使得对任意$x\in I$，$f(x)\ge K_2$ 都成立，则称函数 $y=f(x)$在 I上有下界，而K_2 称为函数 $y=f(x)$的一个下界。

(3) 如果存在数 M，使得对任意$x \in I$，$|f(x)| \le M$ 都成立，则称函数 $y = f(x)$ 在 I 上有界。

否则，就称函数 $y = f(x)$ 在 I 上无界。

（4）一个函数有界等价于它既有上界又有下界.

（5）有界函数的上下界都不是唯一的。



有界　　　　无界

函数$f(x)$有界 $\Leftrightarrow \exists M>0\ \forall x\in I$,有$|f(x)|\le M$

函数$f(x)$无界$\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists x_0\in I$,有$|f(x_0)|>M$

例　试证 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(1,2)$内有界，在$(0,1)$内无界。

证明 (1) 当 $x\in(1,2)$时，显然有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\le 1$

所以，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(1,2)$内有界。

(2) 对于任意正数 M，取 $x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$

则 $\left|\dfrac{1}{x_0}\right|=M+1>M$，故原函数在$(0,1)$内无界.

(三) 函数的运算

1. 复合函数

定义 设有两函数 $y=f(u)$与 $u=g(x)$（定义域为D），且 g 的值域包含在 f 的定义域中，那么对于 D 中任意的元素 x, 通过中间变量 u, 有唯一的 y 值与之对应，

从而得到一个以x为自变量，y为因变量的新函数，称为由函数 f 和 g 构成的复合函数。记为 $y=f[g(x)]$。

例如 $y=\tan(\ln x)$

由 $y=\tan u, u=\ln x$ 复合而成。

注 (1) 复合函数可以由二个以上的函数复合而成。

(2) 会把复合函数分解成几个简单的函数的复合。

例 把下列函数分解成几个简单的函数的复合。

(1) $y = e^{\sin\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$

(2) $y = (\tan\sqrt{\sin^3 x})^3$

解 (1) 由 $y = e^u, u = \sin v, v = \sqrt{w}, w = \dfrac{1+x}{1-x}$ 复合而成。

(2)由 $y = u^3, u = \tan v, v = \sqrt{w}, w = t^3, t = \sin x$

复合而成。

2. 反函数

定义 设函数 f: $D\to W$ 是双射，则对 W 中每一个元素 y，都有 D 中唯一的元素 x，满足 $f(x)=y$。那么按照函数的定义，我们得到一个从 W 到 D 的新函数，称为 f 的反函数，记为

$$f^{-1}: W\to D,\qquad y\mapsto x=f^{-1}(y)$$

注 (1) 反函数 f^{-1} 的对应法则完全由原函数 f 的对应法则所确定。

(2) 习惯上，自变量用 x，因变量用 y 表示，因此，反函数常记成 $y=f^{-1}(x)$.

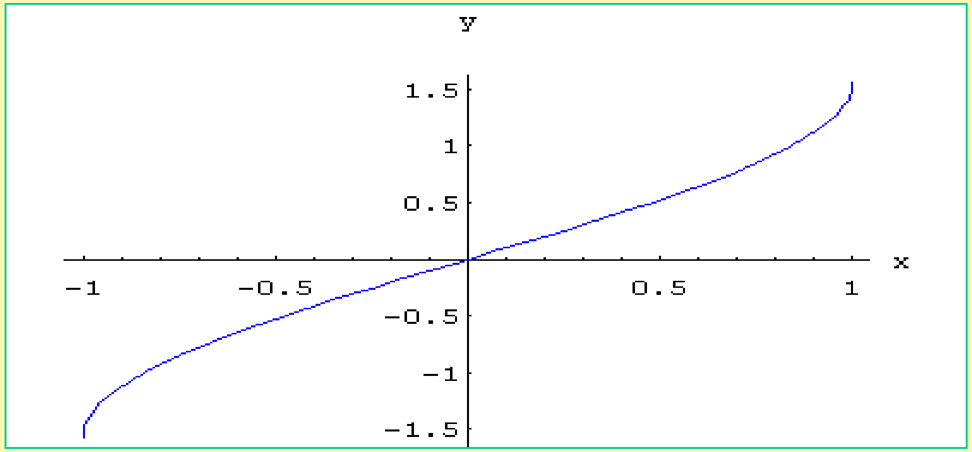
反函数的例子

反三角函数

正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加，具有反函数，记为 $y = \arcsin x$.

定义域 $[-1,1]$，值域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，单调增加.

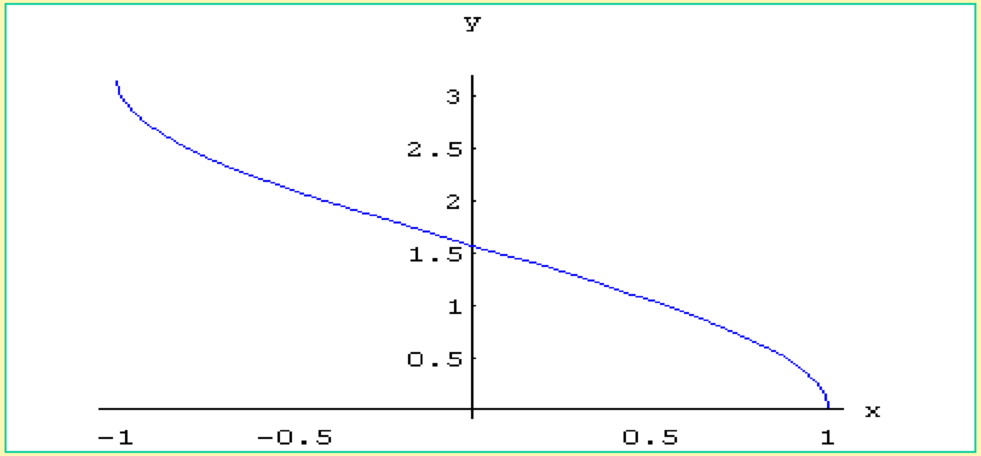
反正弦函数的图像



余弦函数$y=\cos x$在区间$[0,\pi]$上单调减少，具有反函数，记为$y=\arccos x$.

定义域$[-1,1]$，值域$[0,\pi]$，单调减少.

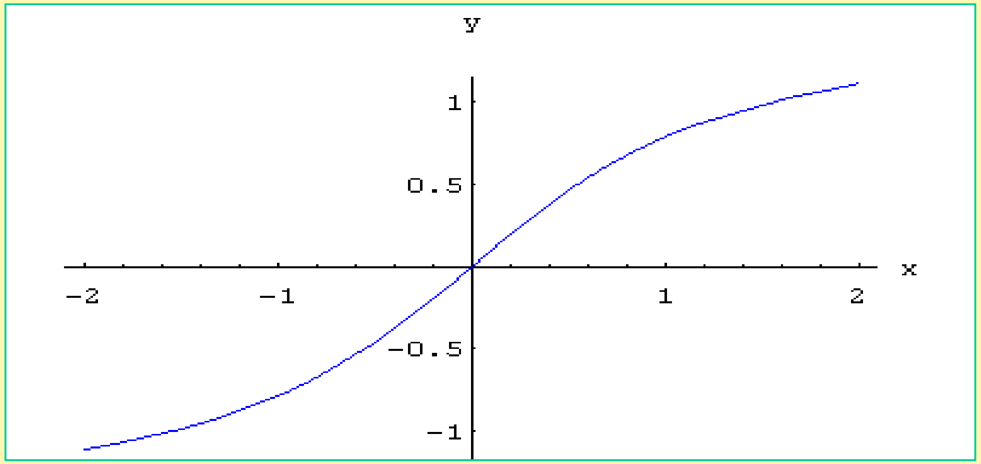
反余弦函数的图像



反正切函数

$$y = \arctan x$$

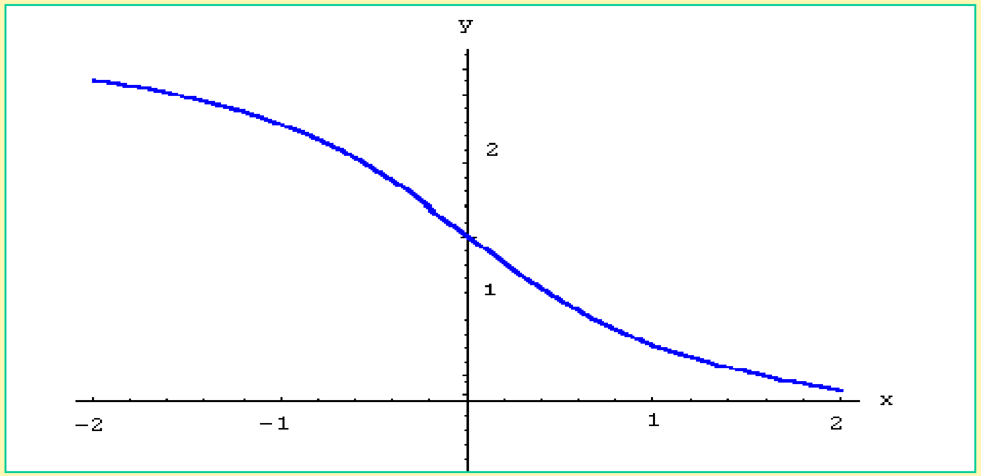
$$(-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$



反余切函数

$$y = arc\cot x$$

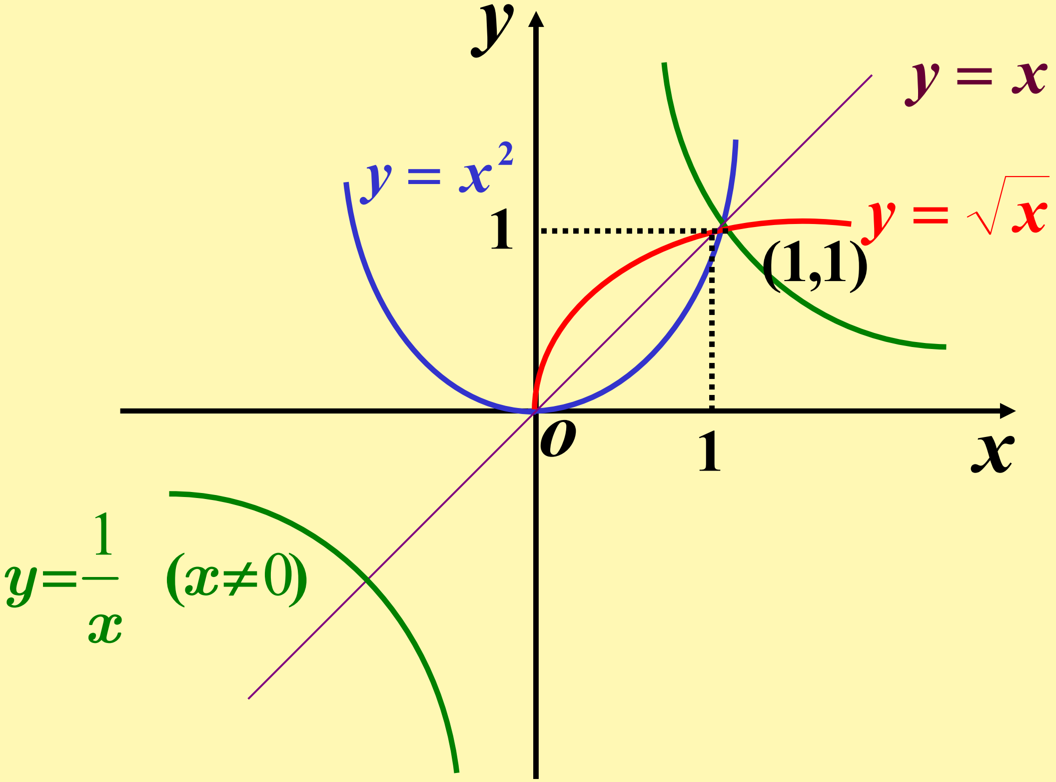
$$(-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$$



四、初等函数

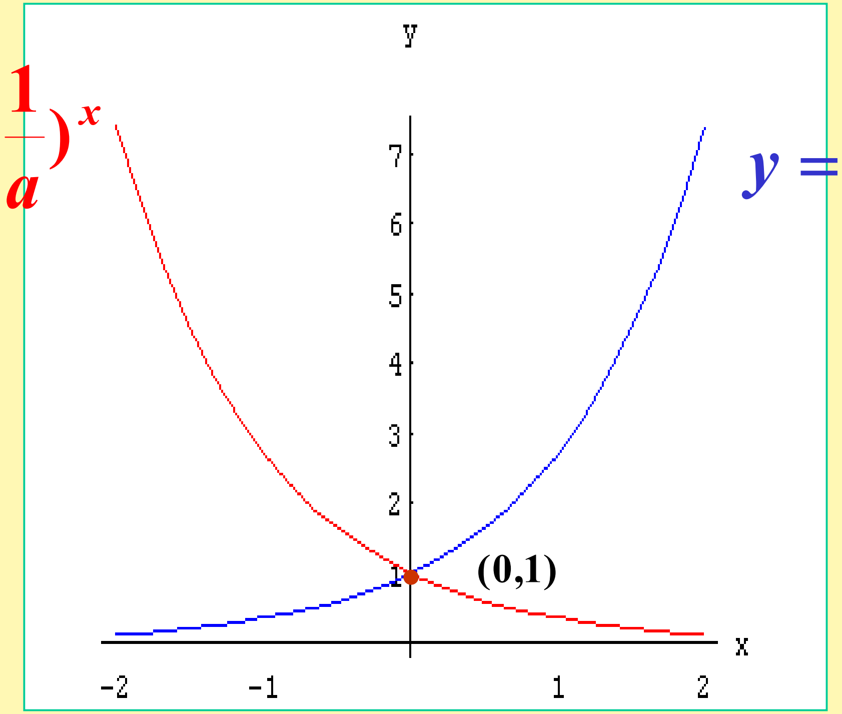
1. 基本初等函数

(1)幂函数 $y = x^{\mu}$ **(μ是常数)**



(2)指数函数 $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$ $\quad y = e^x$

$y = (\frac{1}{a})^x$

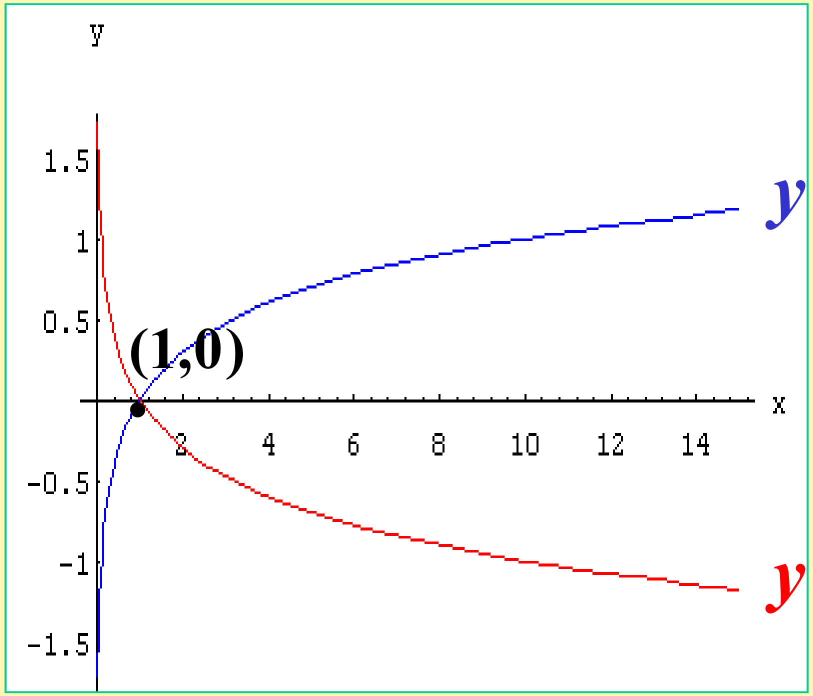


$y = a^x$

$(a > 1)$

(3)对数函数 $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$ $y=\ln x$

$(x>0)$



$y=\log_a x$

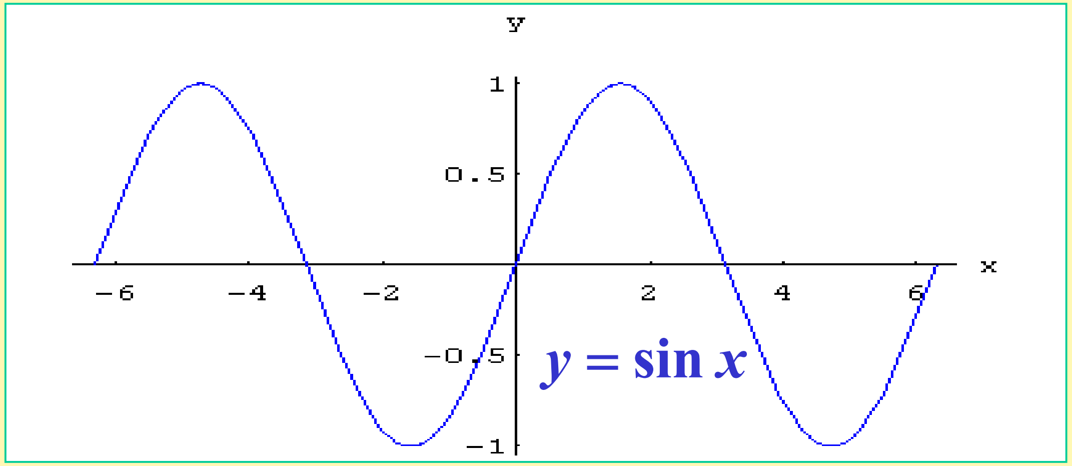
$(a>1)$

$y=\log_{\frac{1}{a}} x$

(4)三角函数

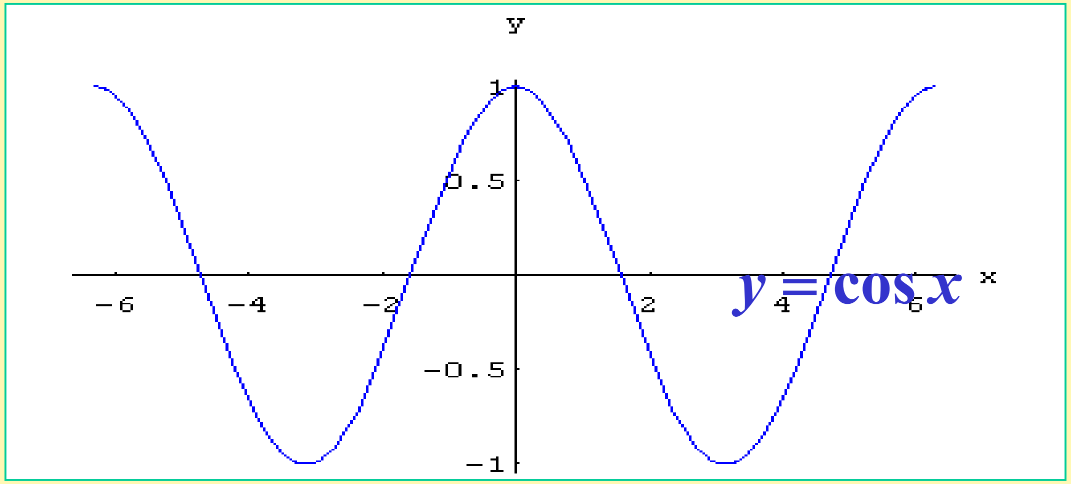
正弦函数

$$y = \sin x$$



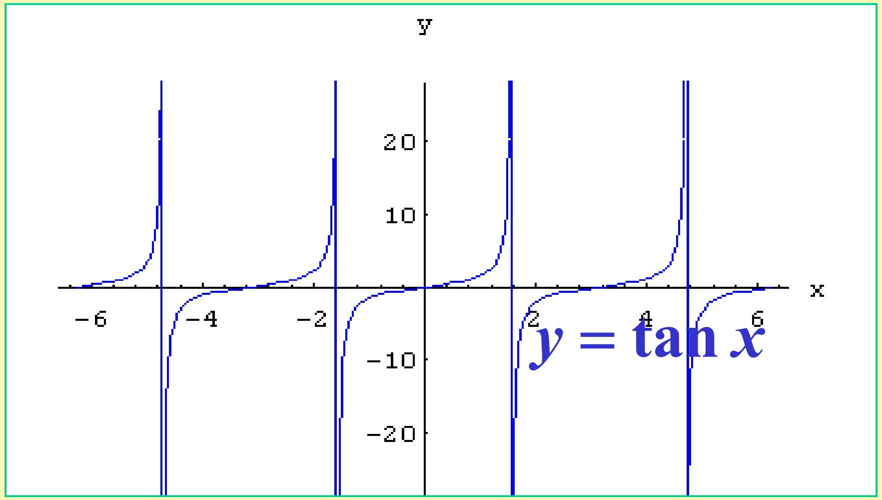
余弦函数

$$y = \cos x$$



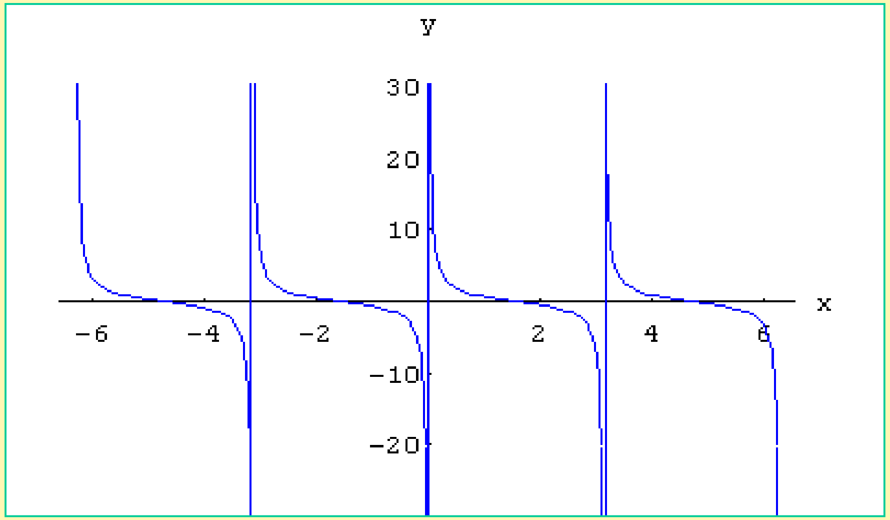
正切函数

$$y = \tan x$$



余切函数

$$y = \cot x$$



$y = \cot x$

三角公式：

和差角公式

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

积化和差公式

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

和差化积公式

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

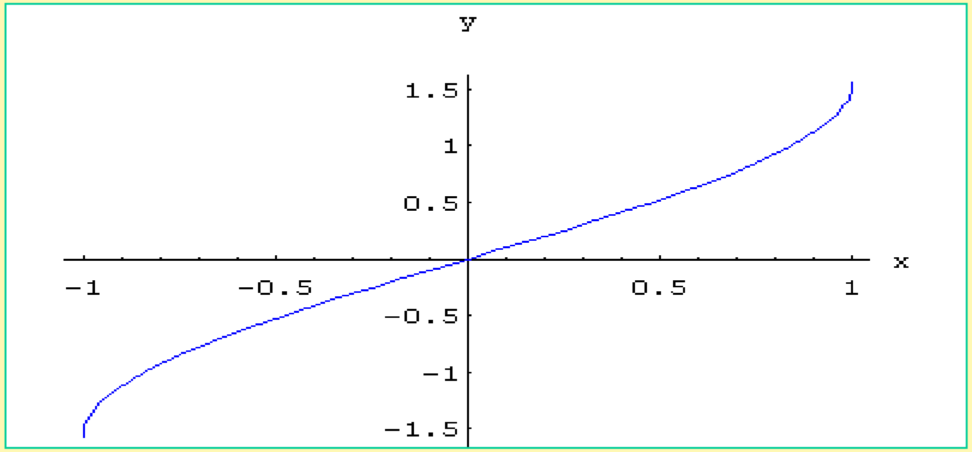
(5) 反三角函数

正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加，具有反函数，记为 $y = \arcsin x$.

定义域 $[-1,1]$，值域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，单调增加.

反正弦函数

$y = \arcsin x$

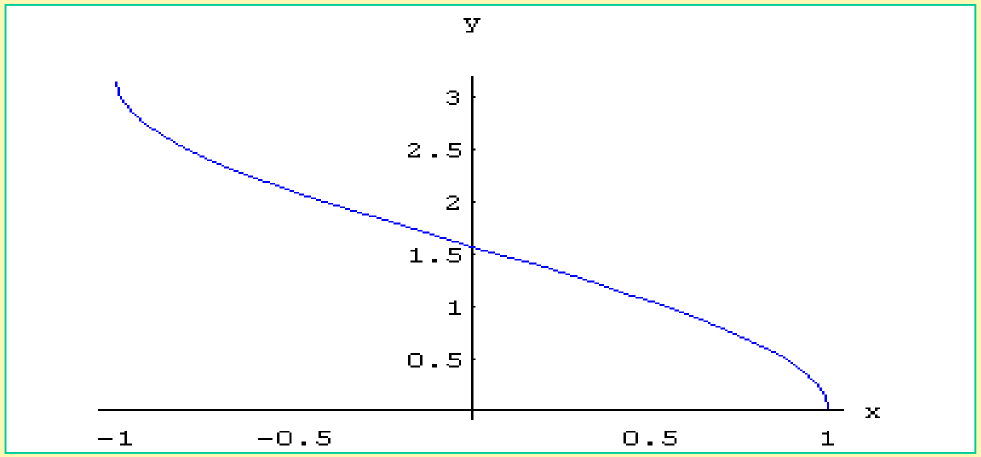


余弦函数$y=\cos x$在区间$[0,\pi]$上单调减少，具有反函数，记为$y=\arccos x$.

定义域$[-1,1]$，值域$[0,\pi]$，单调减少.

反余弦函数

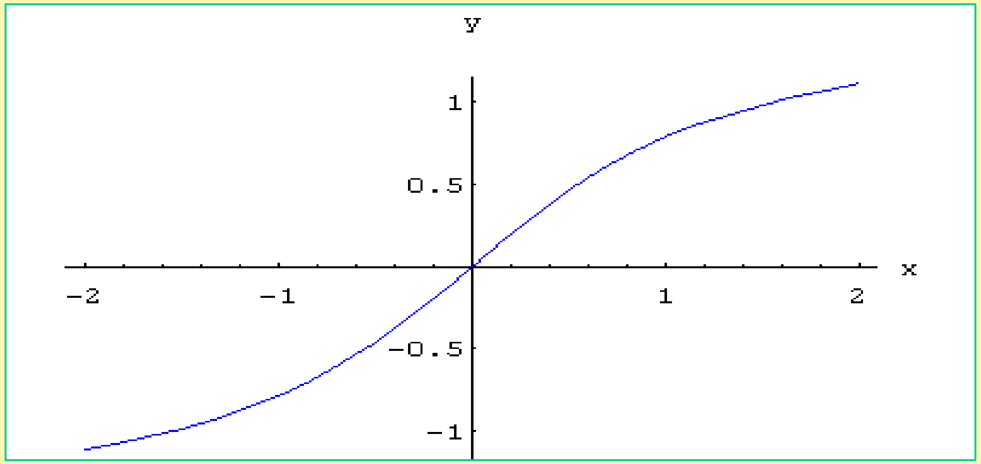
$y=\arccos x$



反正切函数

$$y = \arctan x$$

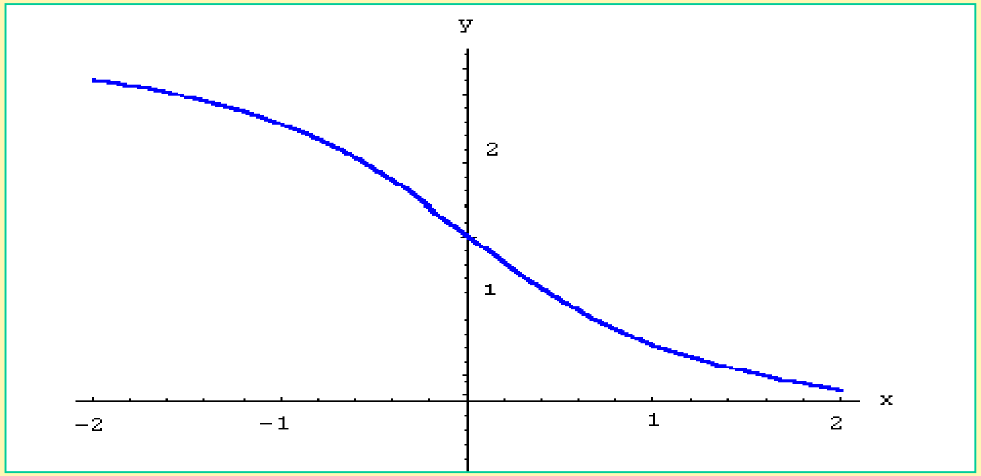
$$(-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$



反余切函数

$$y = arc\cot x$$

$$(-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$$



2. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的可用一个式子表示的函数，称为 初等函数。

3. 双曲函数与反双曲函数

双曲正弦: $$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{(奇)}$$

双曲余弦: $$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{(偶)}$$

双曲正切: $thx = \dfrac{shx}{chx}$ (奇)

反双曲函数

反双曲正弦: $y = arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

反双曲余弦: $y = archx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

反双曲正切: $y = arthx = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

有关公式

$$ch(x \pm y) = chx \cdot chy \pm shx \cdot shy$$

$$sh(x \pm y) = shx \cdot chy \pm chx \cdot shy$$

$$\xrightarrow{y=x} \begin{cases} ch2x = ch^2 x + sh^2 x \\ sh2x = 2shx \cdot chx \\ ch^2 x - sh^2 x = 1 \end{cases}$$

第二节. 数列的极限

一　极限的思想

二　数列

三　数列极限的定义

四　收敛数列的性质

一. 极限的思想

1. 庄子 的 “一尺之锤，日取其半，万世不竭”

2. 魏晋时期 刘徽的 “割圆术”

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

二. 数列

定义: 形如 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n \ldots\ldots$ 的一列依次(序)排列的数称为 数列, 记为: $\{x_n\}$.

注: $\{x_n\}$ 是正整数 n 的函数，称为整标函数.

例: (1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

(2) $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$

(3) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$

数列极限要研究的问题:

(1) n 无限增大时, x_n 是否与某一常数无限接近?

(2) 如果无限接近，怎样用严格的数学语言来描述?

三. 数列极限的定义

以 $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ 为例。

定义 $(\varepsilon - N)$:

若对$\forall \varepsilon > 0$, 总 $\exists$正整数N, 当 $n > N$时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$,

则称a为数列$\{x_n\}$的极限, 亦称$\{x_n\}$收敛于a, 记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

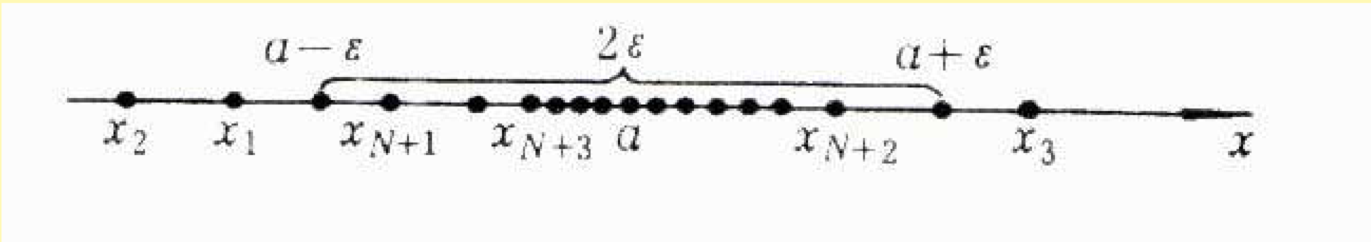
或 $x_n \to a \ (n \to \infty)$.

若$\{x_n\}$无极限, 则称此数列 发散.

注：(1) ε的任意性。只有任意才能反映无限接近。

(2) N与ε有关,但不是函数关系 $(\varepsilon \to N$不唯一$)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的几何意义：



例1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1.$

证. 记 $x_n=\dfrac{n}{n+1}$,

$\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|x_n-1\right|=\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$, 只须 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$,

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+2$, 则 N是正整数,

且当 $n>N$时, 有$\left|x_n-1\right|=\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1.$

例2. 证明 $\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0 \ (0 < |q| < 1)$.

证: $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 0| = |q|^{n-1} < \varepsilon$,

只要$(n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon$, 即 $n > 1 + \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$

取 $N = \left[\left|1 + \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right|\right] + 1$, 则 N是正整数,

且当 $n > N$时, 恒有 $|q^{n-1} - 0| < \varepsilon$

$\therefore \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0.$

例3. 试证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}.$

证：$\forall\varepsilon>0$ $\left(\text{取}N=?,\text{使当 } n>N\text{时 } \left|x_n-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon\right)$

先考察 $\left|\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}\right|$

$$\overset{n\geq 2}{=}\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}<\frac{5n}{9n^2}<\frac{1}{n}$$

$\left(\text{要使}|x_n-a|<\varepsilon,\text{只要}\dfrac{1}{n}<\varepsilon,\text{即 } n>\dfrac{1}{\varepsilon}\text{即可}\right)$

$\therefore$ 对$\forall\varepsilon>0$，取$N=\max\left\{2,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，当 $n>N$时，恒有

$\left|\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}.$

注:在用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的过程中,可采用在某种可行的假定下,将$|x_n - a|$适当放大的技巧,求出所需的$N = ?$.

四. 收敛数列的性质

定理1(唯一性) 收敛数列的极限必唯一.

即若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 则$a = b$.

证: 反设 $a \neq b$, 则对 $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2} > 0$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\therefore \exists N_1$, 当 $n > N_1$时, $|x_n - a| < \varepsilon$

又$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\therefore \exists N_2$, 当 $n > N_2$时, $|x_n - b| < \varepsilon$

$\therefore n > \max\{N_1, N_2\}$时

$|a-b| \le |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon = |a-b|$,矛盾!

定理2 (有界性) 收敛数列 $\{x_n\}$ 必有界.

证：对 $\varepsilon = 1, \exists N,$ 当 $n > N$ 时 $\left|x_n - a\right| < 1$

$\therefore n > N$ 时 $\left|x_n\right| \le \left|x_n - a\right| + \left|a\right| < 1 + \left|a\right|$

$\therefore \forall n,$ 有 $\left|x_n\right| \le M = \max\{\left|x_1\right|, \left|x_2\right|, \cdots \left|x_N\right|, 1 + \left|a\right|\}.$

注:(1) 收敛数列必有界,但有界不一定收敛.

例如 $\{(-1)^n\}$

(2) 无界数列一定发散.

定理3 (收敛数列与其子数列间的关系) P22

数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 当且仅当它的任一子数列也收敛于 a。

即 $x_n \to a \Leftrightarrow \forall\, x_{n_k} \to a$

例1 证明 $\{(-1)^n\}$ 是发散的。

定理4 (保号性)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 且 $A>0$, 则 $\exists N$, 当 $n>N$ 时 $x_n>0$;

(或 $A<0$), $\qquad$ ($x_n<0$).

证: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A>0$, 则对 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时

$$|x_n - A| < \frac{A}{2} \text{ 即 } -\frac{A}{2} < x_n - A < \frac{A}{2}$$

$$\therefore \exists N, \text{当 } n>N \text{ 时 } x_n > \frac{A}{2} > 0.$$

注: 定理 4 表明若数列极限为正(A>0), 则从某项开始以后各项皆正, 且总大于某一正数(A/2);

若数列极限为负(A<0), 则从某项开始以后各项皆负, 且总小于某一负数(A/2).

推论：若$x_n \geq 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则$A \geq 0$；

若$x_n \leq 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则$A \leq 0$.

证：用反证法.

注.以下命题成立否：

(1)若$a_n > 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$A > 0$？ × 反例 $a_n = \dfrac{1}{n}$

(2)若$a_n < 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$A < 0$？ × 反例 $a_n = -\dfrac{1}{n}$

推论 (不等式性质) 设 $x_n \leq y_n \ (n > N_0)$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$， 则 $A \leq B$.

证 令 $z_n = x_n - y_n \leq 0 \quad (n > N_0)$， 则

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = A - B.$$

例3. 设 $x_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$， 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证：由定理4的推论知 $a \ge 0$

1)若 $a = 0$.则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = 0$

$\therefore$ 对 $\varepsilon^2 > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时有 $x_n < \varepsilon^2$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时有 $\sqrt{x_n} < \varepsilon$， 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = 0$

2)若 $a > 0$， 则 $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \le \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{a}}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\therefore$ 对 $\varepsilon' = \sqrt{a}\varepsilon$,

$\exists N, n > N$ 时 $|x_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$

$\therefore$ 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时 $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| < \dfrac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

思考题:

1.设$\{x_n\}$满足$|x_{n+1}| \le q|x_n|\ (n=1,2,\cdots), 0<q<1$,

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \ne 0$,用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

第三节. 函数的极限

一　自变量趋向无穷大时函数的极限

二　自变量趋向有限值时函数的极限

三　函数极限的性质

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \text{记} \ x_n = f(n), n \in N^+ \quad \lim_{n\to+\infty} f(n) = a$$

$$f(x),\ x \in (0,+\infty) \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

一. 自变量趋向无穷大时函数的极限

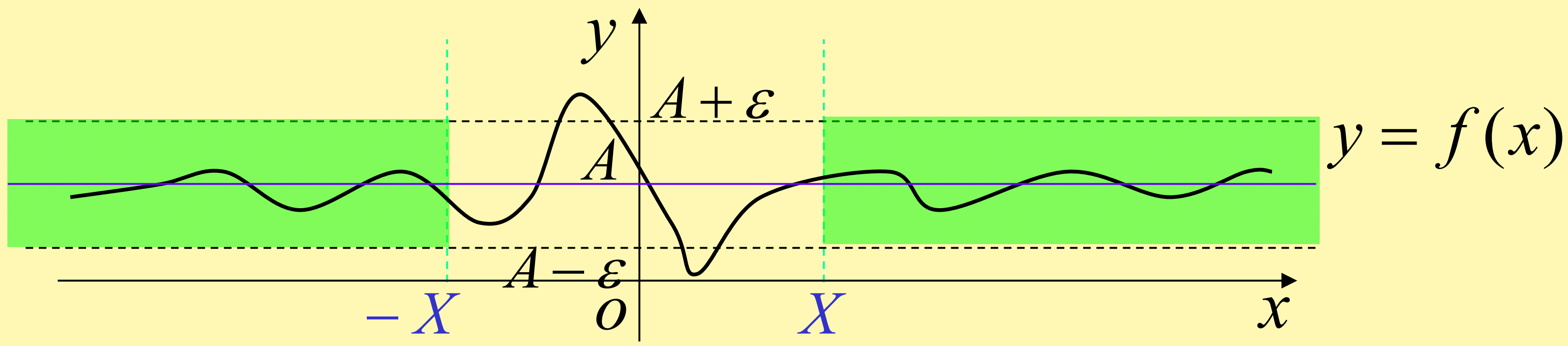
定义1: $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 当 $x > X$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则 A 称为 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

定义2: $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 当 $x < -X$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则 A 称为 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

定义3：$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当$|x| > X$时，$|f(x) - A| < \varepsilon$，则$A$称为$f(x)$当$x \to \infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

几何意义：

(定义3) 当$x > X$ 或 $x < -X$时，$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$



例1.证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}.$

证 $\because\left|\dfrac{x+1}{2x+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{1}{2(2x+1)}\right|\le\dfrac{1}{|2x+1|}\le\dfrac{1}{2|x|-1}(|x|>\dfrac{1}{2})$

$\therefore\forall\varepsilon>0,$要使$\left|\dfrac{x+1}{2x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon,$ 只要$\dfrac{1}{2|x|-1}<\varepsilon,$

即 $2|x|-1>\dfrac{1}{\varepsilon},\ |x|>2^{-1}(1+\varepsilon^{-1})$

$\therefore\forall\varepsilon>0,$取$X=\max\left\{\dfrac{1}{2},2^{-1}(1+\varepsilon^{-1})\right\}=2^{-1}(1+\varepsilon^{-1}),$

当$|x|>X$时,恒有 $\left|\dfrac{x+1}{2x+1}-\dfrac{1}{2}\right|\le\dfrac{1}{2|x|-1}<\varepsilon$ $\therefore\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$

注：由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$ 发现

直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 是曲线 $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$ 的一条水平渐近线.

一般地，若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x)=A$,

则 $y=A$ 为 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

例如：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $y=0$ 是 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一条水平渐近线.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, $y=0$ 是 $y=e^x$ 的一条水平渐近线.

二. 自变量趋向有限值时函数的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

1^0.定义（“$\varepsilon - \delta$” 定义）：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时,恒有}$$

$|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A为$f(x)$当$x \to x_0$时的极限.

记为： $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A \ (x \to x_0)$

注： 定义中$0 < |x - x_0| < \delta$,表示$x \neq x_0$ (不能写$|x - x_0| < \delta$)

因此$f(x)$在 $x \to x_0$ 时有没有极限与 $f(x_0)$无关,甚至 $f(x)$可以在x_0处无定义.

几何意义：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,对$x : 0 < |x - x_0| < \delta$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

例2. 证明 $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$

证 $\quad |f(x)-5|=|3x-6|=3|x-2|$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, 当 $0<|x-2|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ 时, 恒有

$$|f(x)-5|=3|x-2|<\varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5.$

例3. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}=4.$

证：设 $x\neq 1$，记 $f(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$

$$\left|f(x)-4\right|=\left|\frac{2(x^2-1)}{x-1}-4\right|=\left|2(x+1)-4\right|=2\left|x-1\right|$$

$$\forall\varepsilon>0,\text{取 }\delta=\frac{\varepsilon}{2},\text{当 }0<\left|x-1\right|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}\text{时, 恒有}$$

$$\left|f(x)-4\right|=2\left|x-1\right|<\varepsilon$$

$$\therefore\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=4.$$

注:尽管 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义,但并不妨碍讨论其极限.

2^0.单侧极限

左极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

命题: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$

命题: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

例4. $y=f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

例5 (1) $\because \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

(2) $\because \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x+5e^{-x}}{3e^x+4e^{-x}}=\dfrac{2}{3}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x+5e^{-x}}{3e^x+4e^{-x}}=\dfrac{5}{4}$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^x+5e^{-x}}{3e^x+4e^{-x}}$不存在.

三. 函数极限的性质

定理1 (唯一性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 那么这极限唯一.

定理2(局部保号性)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且 $A>0$ (或$A<0$),

则 $\exists U^0(x_0,\delta)$,当 $x\in U^0(x_0,\delta)$时, $f(x)>0$ (或$f(x)<0$).

证:不妨设 $A>0$, $\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

$\therefore$ 对$\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$, $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$, 即 $x\in U^0(x_0,\delta)$时

$$|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{A}{2},\quad f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0$$

$\therefore \exists U^0(x_0,\delta)$,当 $\mathrm{x}\in U^0(x_0,\delta)$时, $f(x)>0$.

推论：若当$x \in U^0(x_0,\delta)$时，$f(x) \ge 0(\le 0)$，且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，

则 $A \ge 0(\le 0)$.

注意：$f(x) > 0, \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow A > 0$ ？

例：$f(x) = \dfrac{x^3}{x} > 0$，但$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

定理3 (局部有界性)　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则存在常数 $M > 0$

和 $\delta > 0$, 使得当 $x \in U^0(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \le M$.

定理4 (函数极限与数列极限的关系)　**海涅(Heine) 定理**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \to x_0 (x_n \neq x_0),$$

$$\text{有} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

例6 证明　$\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$ 不存在

第四节. 无穷小与无穷大

一 无穷小

二 无穷大

一. 无穷小

1.定义(直接):

$$\text{若}\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0,\text{则称}f(x)\text{在}\begin{matrix}x\to x_0\\(x\to\infty)\end{matrix}\text{时为无穷小.}$$

定义($\varepsilon-\delta$):

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时, $|f(x)|=|f(x)-0|<\varepsilon,$

则称$f(x)$在$x\to x_0$时为无穷小.

注:(1)无穷小与"当 $x\to x_0$时"密切有关.

如: $f(x)=x-1$ $x\to 1$时 $f(x)$是无穷小

$x\to 0$时 $f(x)$不是无穷小

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当$x\to\infty$时为无穷小，当$x\to 0$时不是无穷小

(2)不能把无穷小与绝对值很小的数混为一谈.

如 10^{-8}(很小的数)不是无穷小，但"0"是无穷小.

2. 无穷小与函数极限的关系

定理1. $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\alpha(x)=0$.

3. 无穷小的运算性质

性质1. 有限个无穷小的和也是无穷小.

证. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

$\forall \varepsilon>0, \quad \exists \delta_1>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta_1$时 $|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

$\exists \delta_2>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta_2$时 $|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$\therefore \forall \varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|<\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=0.$$

性质2. 无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小.

证：设$|f(x)| \le M (M > 0)$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时 $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$

$\therefore$ 当$0 < |x - x_0| < \delta$时

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

推论1. 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2. 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

二. 无穷大

1.定义(直接):

当 $\begin{matrix} x \to x_0 \\ (x \to \infty) \end{matrix}$ 时,$|f(x)|$无限增大,称$f(x)$当 $\begin{matrix} x \to x_0 \\ (x \to \infty) \end{matrix}$ 时为无穷大.

定义$(M-\delta)$: $\forall M>0, \exists \delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时$|f(x)|>M$,

则称$f(x)$当$x \to x_0$时为无穷大,记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$.

例.证明 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}=\infty$.

证. $\forall M>0$,要使$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$,只要$|x-1|<\dfrac{1}{M}$

$\therefore \forall M>0$,取 $\delta=\dfrac{1}{M}>0$,当$0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$时$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$,

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}=\infty$.

注:(1) 准确地, $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty \quad \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$

(2) $x=1$是$y=\dfrac{1}{x-1}$图形的一条铅直渐近线.

一般地,若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\(x\to x_0^-)}} f(x)=\infty$,则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$图形的一条铅直渐近线.

2.无穷大与无穷小的关系:

定理2. $\lim f(x)=\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\dfrac{1}{f(x)}=0;$

$$\lim f(x)=0 \text{ 且} f(x)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\frac{1}{f(x)}=\infty$$

3.无穷大与无界:

无穷大$\Rightarrow$ 无界 (反之,不一定)

例.试证:

$y = x \cdot \cos x$在$(-\infty, +\infty)$内无界,但当$x \to +\infty$时不是无穷大.

分析: 当 $x = 2k\pi (k \in N)$时 $y = x \cdot \cos x = 2k\pi$

当 $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} (k \in N)$时 $y = x \cdot \cos x = 0$

证 (1)$\forall M > 0$, 取$x_0 = 2k\pi$, 其中 $k > \dfrac{M}{2\pi}$

则$\left| x_0 \cdot \cos x_0 \right| = 2k\pi > M$

$\therefore y = x \cdot \cos x$在$(-\infty, +\infty)$内无界.

$$(2)\ (\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X>0, \text{当} x>X \text{时} |f(x)|>M)$$

$$(\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{不是} \infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall X>0, \exists x_0>X \text{使得} |f(x_0)|\le M)$$

取 $M=1>0, \forall X>0,$ 取 $x_0=2[X]\pi+\dfrac{\pi}{2}>X$

但 $|f(x_0)|=|x_0\cdot\cos x_0|=0<M$

$\therefore$ 当 $x\to+\infty$ 时 $y=x\cdot\cos x$ 不是无穷大.

注: 由本题可见:“无穷大乘以有界量,不一定是无穷大.”

第五节. 极限的运算法则

一　四则运算法则

二　复合函数的极限运算法则

一. 四则运算法则

定理1.

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$

则：(1) $\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B$

(2) $\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$

注. 1)证明(略)

2)结论(1).(2)可推广到有限个.

如：若 $\lim f_1(x)=A_1\quad \lim f_2(x)=A_2\quad \lim f_3(x)=A_3$

则 $\lim\left[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right]=A_1+A_2-A_3$

$\lim\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\right]=A_1A_2A_3$

3)应用定理时,条件不能忽视,要 两个极限都存在时才能应用.

推论1. $\lim\left[C\cdot f(x)\right]=C\cdot\lim f(x)$

推论2. $\lim\left[f(x)\right]^n=\left[\lim f(x)\right]^n \quad (n\in N)$

例1. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n= f(x_0)$$

例2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$

例3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ 注 : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=?$

例4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$

解 $\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=0$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$

例5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+4\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^3}}{7+5\frac{1}{x^2}-3\frac{1}{x^3}}=\dfrac{3}{7}$

注：一般地，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\infty, & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\end{cases}\quad\begin{pmatrix}a_0\neq 0\\ b_0\neq 0\end{pmatrix}$$

例6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3(\sqrt{1+x}+1)}=\dfrac{1}{6}$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}\ (n\in N)$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n}{x}=\ C_n^1=n$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right]$

解.　原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x-2}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{1+x}=-\dfrac{1}{2}$

二. 复合函数的极限运算法则

定理2. 设 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$, $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$

且$x \in U^0(x_0, \delta)$时$\varphi(x) \neq u_0$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} f\left[\varphi(x)\right] = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$

注: (1)最后一个条件不满足, 结论不一定成立, 例如:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} \quad f(u) = \begin{cases} 2, & u \neq 1, \\ 3, & u = 1, \end{cases} \quad f[\varphi(x)] = \begin{cases} 3, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 1 \qquad \lim_{u \to 1} f(u) = 2 \neq \lim_{x \to 0} f\left[\varphi(x)\right] = 3$$

(2) 定理2是求极限时 换元 的理论依据,

$$\text{如}:\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

计算 $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt[6]{1+2x}-1}$

$$=9$$

第六节. 极限存在准则 两个重要极限

一　两边夹准则　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

二　单调有界准则　　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n}=e$

一. 两边夹准则

定理1：数列$x_n.y_n.z_n$满足 (1) $y_n \le x_n \le z_n, (n=1.2.\cdots)$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} y_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} z_n = a \quad 则\ \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

证. $\forall \varepsilon > 0,\quad \because \lim_{n\to\infty} y_n = a,\ \lim_{n\to\infty} z_n = a$

$$\therefore \exists N_1 \quad 当 n > N_1 时 \quad |y_n - a| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 \quad 当 n > N_2 时 \quad |z_n - a| < \varepsilon$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N = \max\{N_1, N_2\}$, 当$n > N$时

$$a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$$

即$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} x_n = a.$

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

定理2

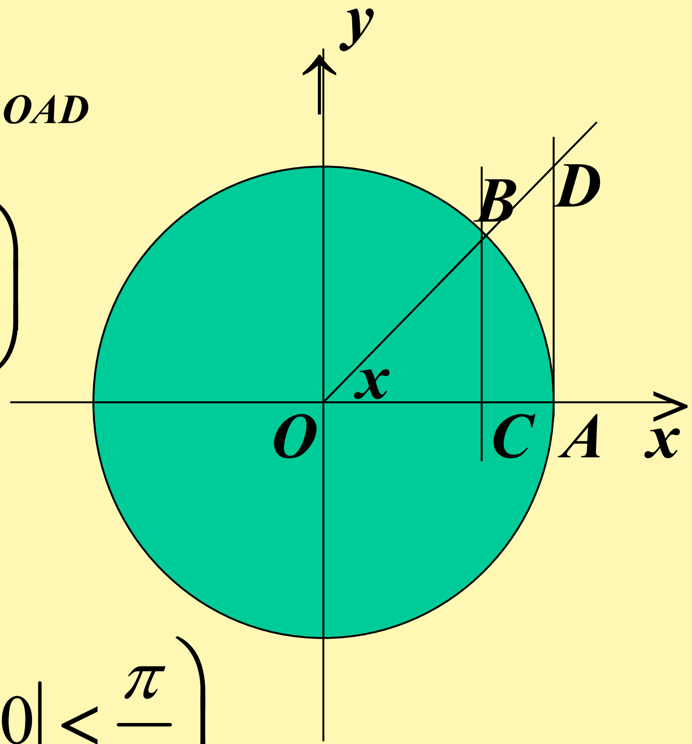
若 (1) $g(x)\le f(x)\le h(x) \quad x\in U^0(x_0)\,(or:|x|>X)$

(2) $\lim g(x)=A \quad \lim h(x)=A$

则 $\lim f(x)=A$

例2 证明 : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

证 (1) 由 $S_{三角形OAB}<S_{扇形OAB}<S_{三角形OAD}$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad \left(0<|x|=|x-0|<\frac{\pi}{2}\right)$$

(2)证 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

事实上 $\sin x < x\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$且 $x < \sin x\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < 0\right)$.

所以 $|\sin x| < |x|\left(0 < |x| = |x-0| < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

由此可得 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

由 $0 \le 1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} \le 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{2}$ 可得 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

所以由两边夹准则知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

注： 一般地，有以下结论：

若 $\lim f(x) = 0$且 $f(x) \neq 0$，则 $\lim \dfrac{\sin[f(x)]}{f(x)} = 1$.

例3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\dfrac{5x}{\sin x}=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=5$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

NJUPT

二. 单调有界准则: 单调有界数列必有极限.

定义:

$$\left.\begin{array}{l}\text{若}x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots,\text{则称}\{x_n\}\text{单调递减}\\ \text{若}x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots,\text{则称}\{x_n\}\text{单调递增}\end{array}\right\}\text{统称"单调数列"}.$$

例4 证: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$;

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

证:(1) 设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

由几何平均值不超过算术平均值知

$$a_1a_2\cdots a_{n+1}\le\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}\quad (a_i\ge 0)$$

$$\therefore x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\le\left(\frac{n\cdot(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$\therefore \{x_n\}\uparrow$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left(\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

$$\therefore\{y_n\}\downarrow,\ \therefore 2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$$

$\therefore$由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，为 e.

且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 注. $e=2.718\cdots$

证(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

记 $[x]=n$, 则 $n\le x<n+1$, 有 $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=e$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=e$$

由两边夹准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

证 (3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$

令$x=-(t+1)$, 则$x\to-\infty$时, $t\to+\infty$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)\right] = e$$

综上有:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e;$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e;$ (3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

例5 证明: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

证. 令 $x=\dfrac{1}{y}$, $x\to 0 \Leftrightarrow y\to\infty$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{y}=e.$$

注： 一般地，有以下结论：

若 $\lim f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}=e.$

例6 求 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{3x})^{2x}$

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{1}{3x})^{3x}]^{\frac{2x}{3x}}=e^{\frac{2}{3}}$

$$(2)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{3x}$$

解 原式 $=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2}{x+1}\cdot 3x}=e^{6}$

$$(3)\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

解 原式 $=\lim_{x\to 0}\left\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{x^2}}$

$$=e^{-\frac{1}{2}}$$

总结：(1) "$\frac{0}{0}$型"：用两边夹证明了 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

一般地,

若 $\lim f(x)=0$且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\frac{\sin[f(x)]}{f(x)}=1.$

(2) "1^{∞}型"：用单调有界证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e$

从而可得，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{y}=e$

一般地,

若 $\lim f(x)=0$且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=e.$

第七节. 无穷小的比较

一　定义

二　等价无穷小的应用

三　几个重要的等价无穷小关系

当$x \to 0$时，$x^3, x^2, \sin x, \tan x$ 都是无穷小,

$$而\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

一、定义

设 $\lim \alpha(x)=0, \quad \lim \beta(x)=0$

若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$,则称 $\beta(x)$是比 $\alpha(x)$高阶的无穷小,

记作 $\beta(x)=o(\alpha(x))$;

若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=C\neq 0$,则称 $\beta(x)$与 $\alpha(x)$是同阶无穷小;

若$\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha^k(x)}=C\neq 0(k>0)$,则称 $\beta(x)$是关于$\alpha(x)$的 k阶无穷小。

若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$,则称 $\beta(x)$与 $\alpha(x)$是等价无穷小,

记作:$\beta(x) \sim \alpha(x)$.

例:$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$, $\therefore \tan x$为x的一阶无穷小,且 $\tan x \sim x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore 1 - \cos x$ 为 x 的二阶无穷小, 且 $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$.

二、等价无穷小的应用

(等价无穷小替换原理)设$\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 若$\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在,

$$\text{则} \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

证 $$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim\left(\frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\beta}\right)$$

$$= \lim \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

例: $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5} \qquad \left(\because \begin{matrix} \tan 3x \sim 3x \\ \sin 5x \sim 5x \end{matrix}\right)$$

例 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x}{\tan^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

$$(\because \tan^3 x\sim x^3,\ \sin x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\quad)$$

另解.原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\cdot 2x}{x^3}=0$ ？ 错!

注: 等价无穷小替换, 可用于乘、除因子,

不要用于加、减中!

三、几个重要的等价无穷小关系

$x \to 0$时，

$$(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x(\alpha \neq 0)$$

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^{2}$$

$$a^{x}-1 \sim x\ln a(a>0\text{且}a \neq 1)\text{，特别地，}\mathrm{e}^{x}-1 \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

一般地： 若 $\lim f(x)=0$，则把上面所有的 x 换成 $f(x)$结论仍然成立。

例 求(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2}{(3x)^2}=\dfrac{2}{9}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^3}{\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^3}{\left(\frac{x}{2}\right)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\frac{1}{8}x^3}=8.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3\sin 2x)}{1-\cos 3x}=8$$

$$(5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^{1-\cos 3x^2}-1)}{\tan^4 2x}=\frac{9}{32}$$

$$(6)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 4x}-1}{\ln(1-5x^2)}=-\frac{8}{5}$$

第八节. 函数的连续性与间断点

一　函数的连续性

二　函数的间断点及其分类

一. 函数的连续性

1. 函数在一点连续的定义

$\Delta x = x - x_0$称为自变量 x在 x_0 处的增量，

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$称为函数在 x_0 处的增量。

定义1.设 $y = f(x)$在 $U(x_0)$内有定义,若

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, 则称 $y = f(x)$ 在 x_0 点连续.

对定义中的极限等式变换之后可得到函数在一点连续的等价定义。

定义2.设$y=f(x)$在$U(x_0)$内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,

则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续.

Back

"$\varepsilon-\delta$"语言:$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$时

恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称 $f(x)$在 x_0点连续.

定义3.若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$在 x_0点左连续;

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$在 x_0点右连续.

($f(x)$在x_0点连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0点既左连续又右连续.)

2. 函数在区间上的连续性

定义4. 若 $f(x)$在区间 I上每点连续,则称 $f(x)$为 I上的连续函数, 记作 : $f(x)\in C(I)$. 如 : $f(x)\in C[a,b]$

注 : (1) $y=f(x)\in C[a,b]\Leftrightarrow \forall x_0\in(a,b), f(x)$在$x_0$点连续,

$f(x)$在a点右连续, $f(x)$在b点左连续.

(2) $y=f(x)\in C[a,b]$的几何意义 :

当 $x\in[a,b]$时, $y=f(x)$的图形为一条连续不间断的曲线.

例 证明 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证. $\forall x_0 \in R$

$$\because 0 \le |\Delta y| = |\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0|$$

$$= \left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}\right| \le 2\cdot\left|\frac{\Delta x}{2}\right|\cdot 1 = |\Delta x|$$

由两边夹准则, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$, $\therefore\ y=\sin x$在 x_0 点连续.

由 x_0 的任意性可知 $y=\sin x \in C(-\infty,+\infty)$.

二. 函数的间断点及其分类

1.定义: 若 $f(x)$在 x_0点不连续,则称 x_0为 $f(x)$的间断点.

注. 由定义2知 $f(x)$在 x_0点连续必须满足下列条件：

(1) $f(x)$在$U(x_0)$内有定义 $\left(x_0 \in D_f\right)$

(2) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$存在 $\left(f(x_0+0).f(x_0-0)\text{都存在且相等}\right)$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

若三者有一不满足,则 x_0为 $f(x)$的间断点.

2. 间断点的分类: (各举一例,分别说明)

例1. 讨论 $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 点的连续性.

图像

解. 函数在 x=1 没定义, 故在 x=1不连续(间断).

但 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, 若补充定义 $y\big|_{x=1} = 2$

则 $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \neq 1 \\ 2, \quad x = 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 点连续,.

故 $x = 1$ 称为原来函数的可去间断点.

注：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在但不等于 $f(x_0)$，则也称

x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.

图像

例2. 讨论 $y=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$点的连续性.

解. $\because f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-}(x-1)=-1,\ f(0+0)=1$

$\therefore$ 称 $x=0$为函数的跳跃间断点.

函数的图形在 $x=0$ 处产生了 跳跃

图像

例3. 讨论 $y = \tan x$ 在 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 点的连续性。

解. $\because \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$ (不存在)

故称 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 为 $y = \tan x$的无穷间断点。

例4. 讨论 $y = \sin \dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 点的连续性.

图像

解. $\because \lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ 不存在,且在 $x = 0$左右函数振荡,

$\therefore$ 称 $x = 0$为 $y = \sin \dfrac{1}{x}$的振荡间断点.

间断点的分类:

- 第一类间断点 $\big(f(x_0-0).f(x_0+0)$ 都存在$\big)$
  - 可去间断点 $\big(f(x_0-0)=f(x_0+0)\big)$
  - 跳跃间断点 $\big(f(x_0-0)\neq f(x_0+0)\big)$
- 第二类间断点 $\big(f(x_0-0).f(x_0+0)$ 至少有一不存在$\big)$
  - 无穷间断点
  - 振荡间断点

例5.讨论函数 $f(x)=\dfrac{3}{2-\dfrac{2}{x}}$ 的间断点.

解：观察知 $x=0.x=1$时 $f(x)$无定义,

$\therefore x=0.x=1$为 $f(x)$的间断点.

对 $x=0,\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x-2}=0,$

$\therefore x=0$为 $f(x)$的可去间断点.

对 $x=1,\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{2x-2}=\infty,$

$\therefore x=1$为 $f(x)$的无穷间断点.

注:找间断点时,将函数表达式变形要谨慎,

否则可能会失去一些间断点.

例6.讨论 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x, & |x|\le 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$ 的连续性.

解. 当 $|x|<1$时, $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 无间断点

当 $|x|>1$时, $f(x)=|x-1|$无间断点

对 $x=-1$: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}|x-1|=2,$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\cos\dfrac{\pi}{2}x=0$ $\quad\therefore x=-1$是其跳跃间断点.

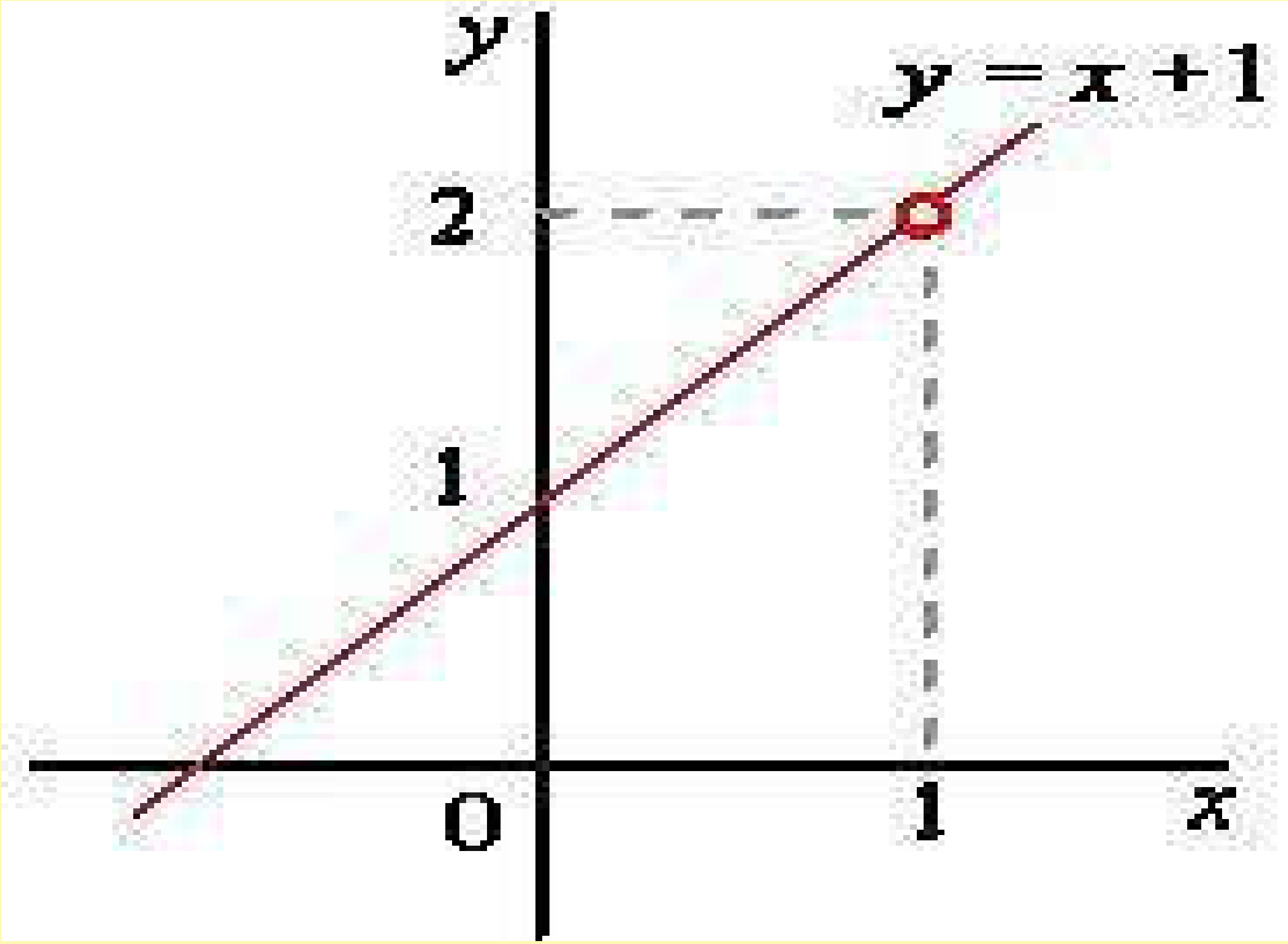
对 $x=1$: $f(1-0)=0,\quad f(1+0)=0,\quad f(1)=0$

$\therefore f(x)$在 $x=1$点连续.

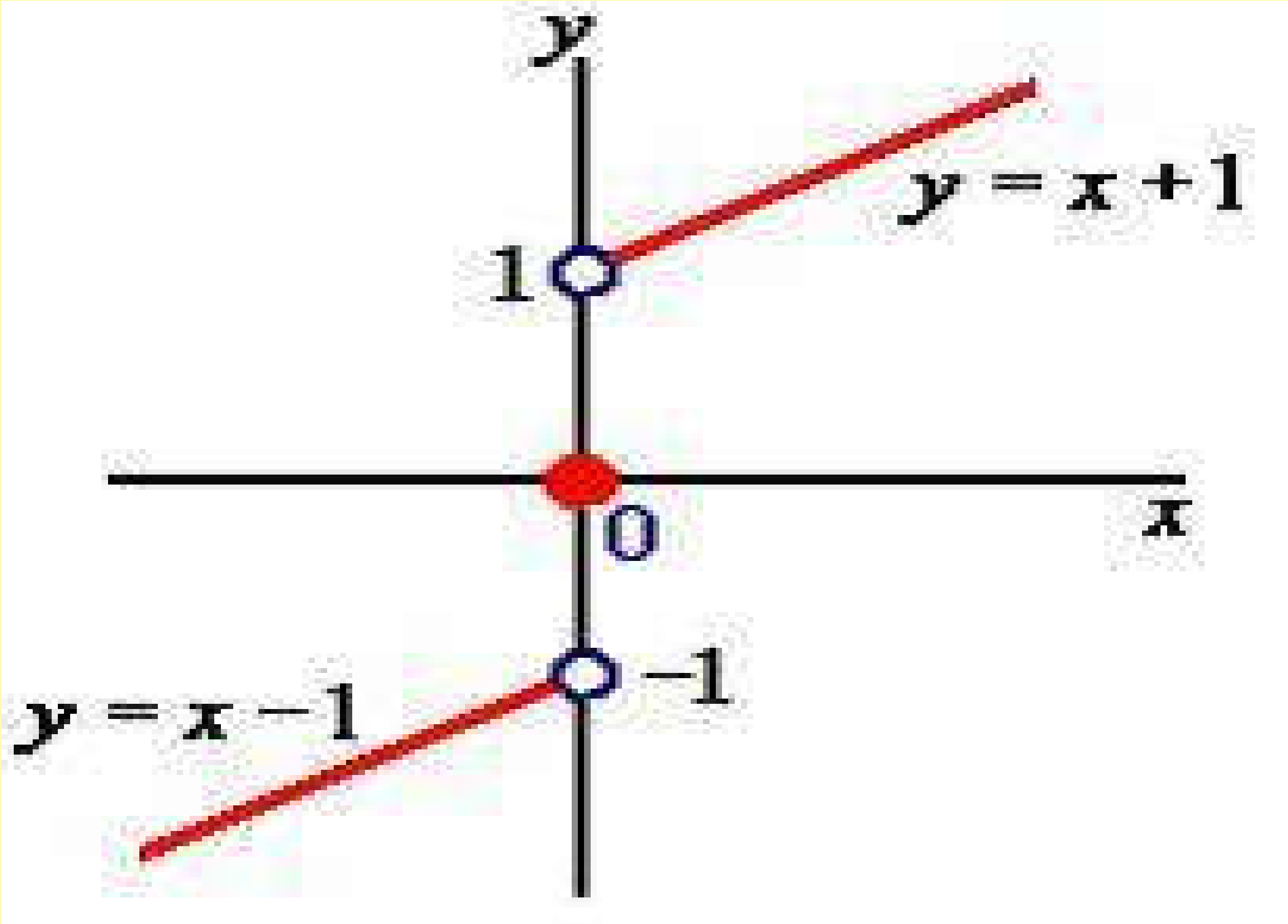
故$f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$内连续, $x=-1$为其跳跃间断点.

注. (1) 分段函数的分段点可能是间断点.

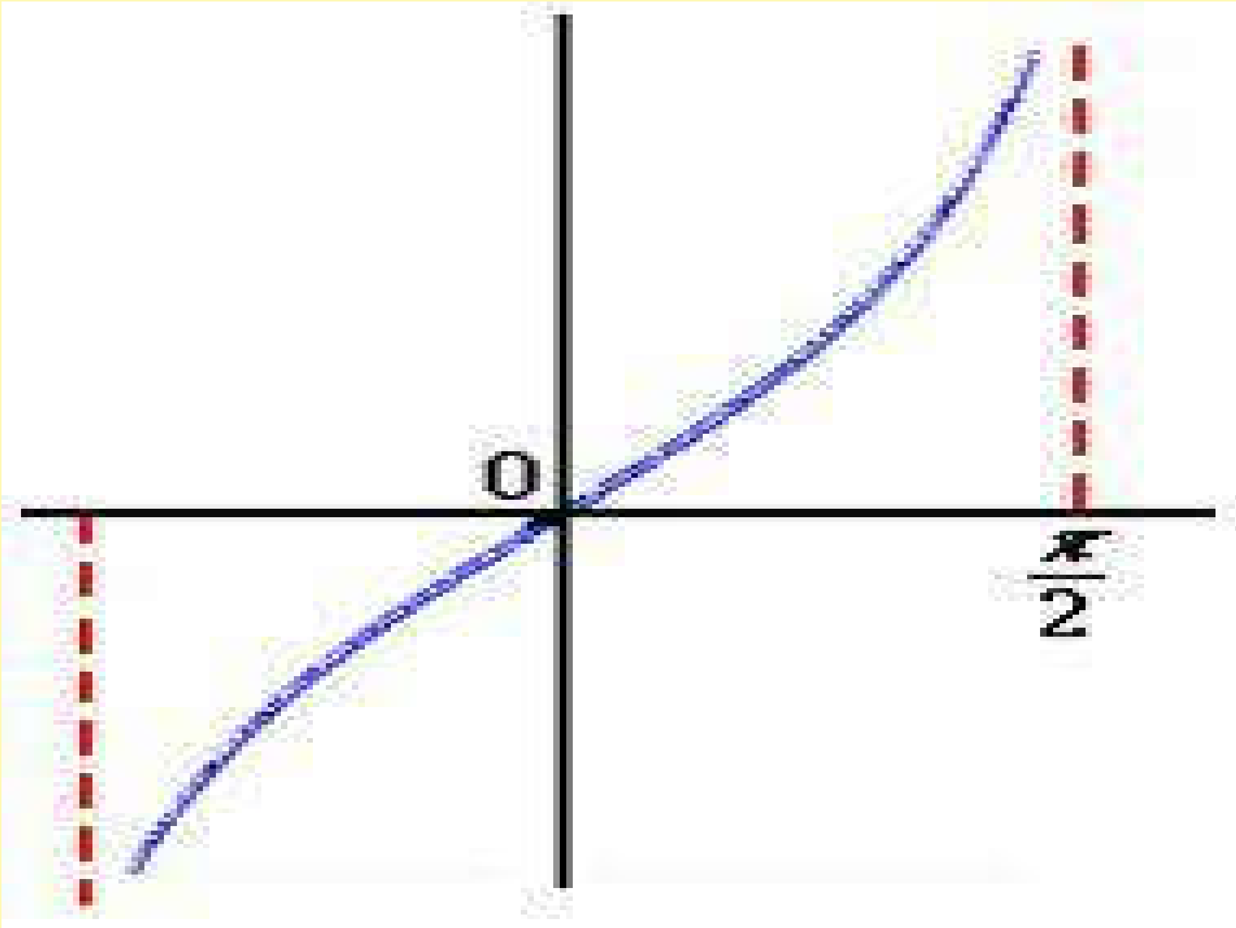
(2)讨论函数连续性时,须指出函数在哪些区间内连续.



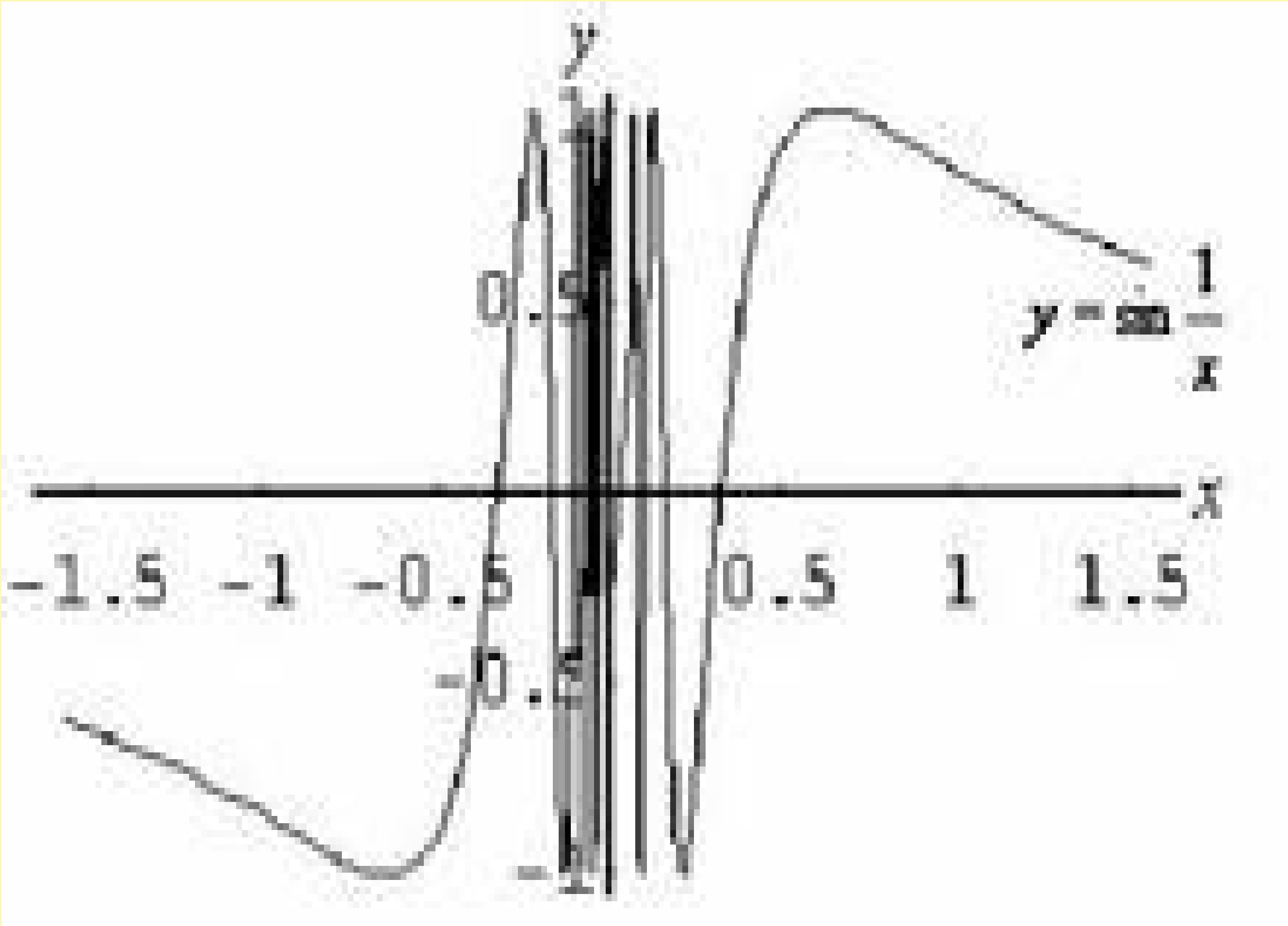
Back



Back



Back



Back

第九节. 连续函数的运算性质
闭区间上连续函数的性质

一　连续函数的运算性质

二　初等函数的连续性

三　闭区间上连续函数的性质

一. 连续函数的运算性质

定理 1. (连续函数和.差.积.商的连续性)

若两个函数 $f(x).g(x)$都在 x_0 连续,则

(1)$f(x)\pm g(x)$在 x_0 连续; (2)$f(x)\cdot g(x)$在 x_0连续;

(3)$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0连续$\left(g(x_0)\neq 0\right)$.

证. 由连续的定义及极限的四则运算法则, 如

$$(2)\because \lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)g(x_0)$$

$\therefore f(x)g(x)$在 x_0 连续.

例如:已知 $\sin x.\cos x$在 $(-\infty,+\infty)$内连续

则 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$在 $(-\infty,+\infty)$内连续,

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$在 $\cos x\neq 0.$

即 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in Z)$时连续,

$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$在 $x\neq n\pi(n\in Z)$时连续.

定理 2. (复合函数的连续性)

$$\left.\begin{array}{l}\text{设 } u=\varphi(x)\text{在 } x_0\text{连续}, \varphi(x_0)=u_0 \\ \text{又 } y=f(u)\text{在 } u_0\text{连续}\end{array}\right\} \Rightarrow y=f[\varphi(x)]\text{在 } x_0\text{连续}.$$

证 : $\forall \varepsilon>0, \because y=f(u)$在 u_0 连续

$\therefore \exists \eta=\eta(\varepsilon)>0$,当 $|u-u_0|<\eta$时 $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$

又 $u=\varphi(x)$在 x_0连续, $\therefore$对 $\eta>0, \exists \delta=\delta(\eta)>0$

当 $|x-x_0|<\delta$时, $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|u-u_0|<\eta$

综上,对 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$,当 $|x-x_0|<\delta$时

$$|f[\varphi(x)]-f[\varphi(x_0)]|=|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]$ 即 $f[\varphi(x)]$在 x_0连续.

注.(1)由 $y=\sin u$及 $u=x+\dfrac{\pi}{2}$在 $(-\infty,+\infty)$上连续

$$\xrightarrow{\text{定理2}} y=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x \text{在 } (-\infty,+\infty)\text{上连续}$$

(2) $f.\varphi$都连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$

定理 2′.

$$\left.\begin{array}{l}\text{设 } \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a \\ y=f(u)\text{在 } u=a\text{连续}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

证:

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] \overset{\text{令}u=\varphi(x)}{=} \lim_{u\to a} f(u) \overset{f\text{在}u=a\text{连续}}{=} f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

注:

(1)定理2′应用较多,如 $\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\frac{1}{6}}$

(2)将 $x\to x_0$ 换成 $x\to x_0^{+(-)}$.$x\to\infty$等,结论仍成立,

如

$$\lim_{x\to 0^+}\sin\sqrt{x}=\sin\left(\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\right)=\sin 0=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\arctan\frac{x}{x-1}=\arctan\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}\right)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

证明：若$\lim f(x)=A>0, \lim g(x)=B$,则

$$\lim f(x)^{g(x)}=A^B.$$

证明：
$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\lim \ln f(x)=\ln A$$

$$\therefore \lim g(x)\ln f(x)=B\ln A$$

$\because y=e^u$在 $(-\infty,+\infty)$上连续

$$\therefore \lim f(x)^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$$

$$=e^{B\ln A}=e^{\ln A^B}=A^B$$

例1.求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x}{x^2+1}\right)^{\frac{5x-1}{x+1}}$

解　原式 $=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-1}{x+1}}=2^5=32$

例2.求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

解.原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

定理 3 (反函数的存在与连续性)

若函数 $y = f(x)$在区间 I_x上单增(或单减)且连续, 那么它的反函数 $x = \varphi(y)$ 存在, 且在相应区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), x \in I_x\}$上也单增(或单减)且连续.

如:(1) $y = \sin x$在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上连续.单增,

则 $y = \arcsin x$在 $[-1,1]$上连续. 单增.

(2) $y = \cos x$在 $[0, \pi]$上连续.单减,

则 $y = \arccos x$ 在 $[-1,1]$上连续.单减.

类似地, $y = \arctan x$及 $y = arc\cot x$在 $(-\infty, +\infty)$上连续.

二. 初等函数的连续性

“基本初等函数”：幂. 指数. 对数. 三角. 反三角函数.

“初等函数”：由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的并可用一个式子表示的函数.

定理 4. 基本初等函数在其 定义域内 都连续.

证.(1) $\sin x \in C(-\infty,+\infty) \xrightarrow{\text{复合.四则.反函数}}$

$$\begin{cases} \cos x = \sin(x+\dfrac{\pi}{2}), \tan x, \cot x. \\ \arcsin x, \arccos x, \arctan x, arc\cot x \text{皆连续.} \end{cases}$$

(2) $y = a^x (a > 0, a \neq 1) \in C(-\infty,+\infty)$

$(\because \Delta x \to 0$时 $\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1) \to 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \log_a x \in C(0,+\infty) \\ y = x^{\mu} = a^{\mu \log_a x} \in C(0,+\infty) \end{cases}$$

定理 5. 初等函数在其 定义区间内 连续.

注.(1) 定义区间: 定义域内的区间.

如 $y=\sqrt{\sin x-1}$, $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$不构成区间

$\therefore y=\sqrt{\sin x-1}$在定义域内处处不连续.

(2)应用:若 x_0是初等函数 $f(x)$定义区间内一点,

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

如 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\ln(2-x)}{\arctan x}=\dfrac{1^2+\ln(2-1)}{\arctan 1}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{4}{\pi}$

该初等函数的定义区间为:$(-\infty,0),(0,2)$

三. 闭区间上连续函数的性质

定理 6 (最大.最小值定理)

$$f(x)\in C[a,b]\Rightarrow \exists \xi.\eta\in[a,b] \text{ 使得 } f(\eta)\le f(x)\le f(\xi)$$

即 $f(\xi)=M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x),\ f(\eta)=m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

注. 条件"连续"和"闭区间"缺一不可，否则结论不一定成立.

如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$内无最大.最小值.

定理 7(有界性定理):

$$f(x)\in C[a,b]\Rightarrow \exists M'>0, \text{使得 } |f(x)|\le M', \forall x\in[a,b].$$

定理 8 (零点定理):

$$f(x)\in C[a,b],\ f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists\xi\in(a,b)\text{使得 } f(\xi)=0.$$

定理 9 (介值定理)

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\in C[a,b] \\ f(a)=A\neq f(b)=B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \forall r\text{介于 } A.B\text{之间} \\ \exists\xi\in(a,b),\text{使得 } f(\xi)=r. \end{array}$$

定理 $9'$：设 $f(x)\in C[a,b],\ M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x), m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

则 $\forall r\in[m,M],\ \exists\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=r.$

证：(1)若 $r=m$ 或 $r=M$，则由定理 6.

$\exists x_1.x_2\in[a,b]$ 使得 $f(x_1)=m, f(x_2)=M$

(2) $m<r<M,\quad f\in C[x_1,x_2]$ 或 $[x_2,x_1]\xrightarrow{\text{定理 9}}$

$\exists\xi\in[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）$\subseteq[a,b]$ 使得 $f(\xi)=r.$

例1.证明 $x^3+1=4x^2$ 在 $(0,1)$内至少有一实根.

证： 原方程等价于 $x^3-4x^2+1=0$

令 $f(x)=x^3-4x^2+1$,则 $f(x)\in C[0,1]$

$$f(0)=1>0,\quad f(1)=-2<0$$

由零点定理知， $\exists\xi\in(0,1)$使得 $f(\xi)=0$

即原方程在 $(0,1)$内至少有一实根.

例2. 设 $f(x).g(x)\in C[a,b]$, $f(a)>g(a)$, $f(b)<g(b)$,

证明：$\exists x_0\in(a,b)$使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

证　设 $F(x)=f(x)-g(x)$, 则 $F(x)\in C[a,b]$,

$$F(a)>0,\ F(b)<0,$$

$\therefore \exists x_0\in(a,b)$ 使得 $F(x_0)=0$ 即 $f(x_0)=g(x_0)$.

例3.求证 $a_0x^7+a_1x^6+\cdots+a_7=0\ (a_0\neq 0)$ 至少有一实根.

证: 设 $f(x)=a_0x^7+a_1x^6+\cdots+a_7$ $\because a_0\neq 0$ 不妨设 $a_0>0$

$\because \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\therefore \forall M>0, \exists X_1>0,$ 当 $x<-X_1$ 时, $f(x)<-M<0$

取定 $x_1<-X_1$, 则 $f(x_1)<0$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\therefore \forall M>0, \exists X_2>0,$ 当 $x>X_2$ 时, $f(x)>M>0$

取定 $x_2>X_2$, 则 $f(x_2)>0$

$\because f(x)\in C[x_1,x_2],\quad f(x_1)f(x_2)<0$

$\therefore \exists \xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f(\xi)=0$, 即 $f(x)=0$ 至少有一实根.

例4　设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在,

则 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$内有界.

证：设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$,

对 $\varepsilon=1,\exists X>0$,当 $|x|>X$时,$|f(x)-a|<1$

即 $x>X$或 $x<-X$时,

$$|f(x)|=|(f(x)-a)+a|\le|f(x)-a|+|a|<1+|a|$$

又 $f(x)\in C[-X,X]$

$\therefore \exists M>0$,使得 $|f(x)|\le M, x\in[-X,X]$

取 $M'=\max\{1+|a|,M\}$,

则 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $|f(x)|\le M'$.