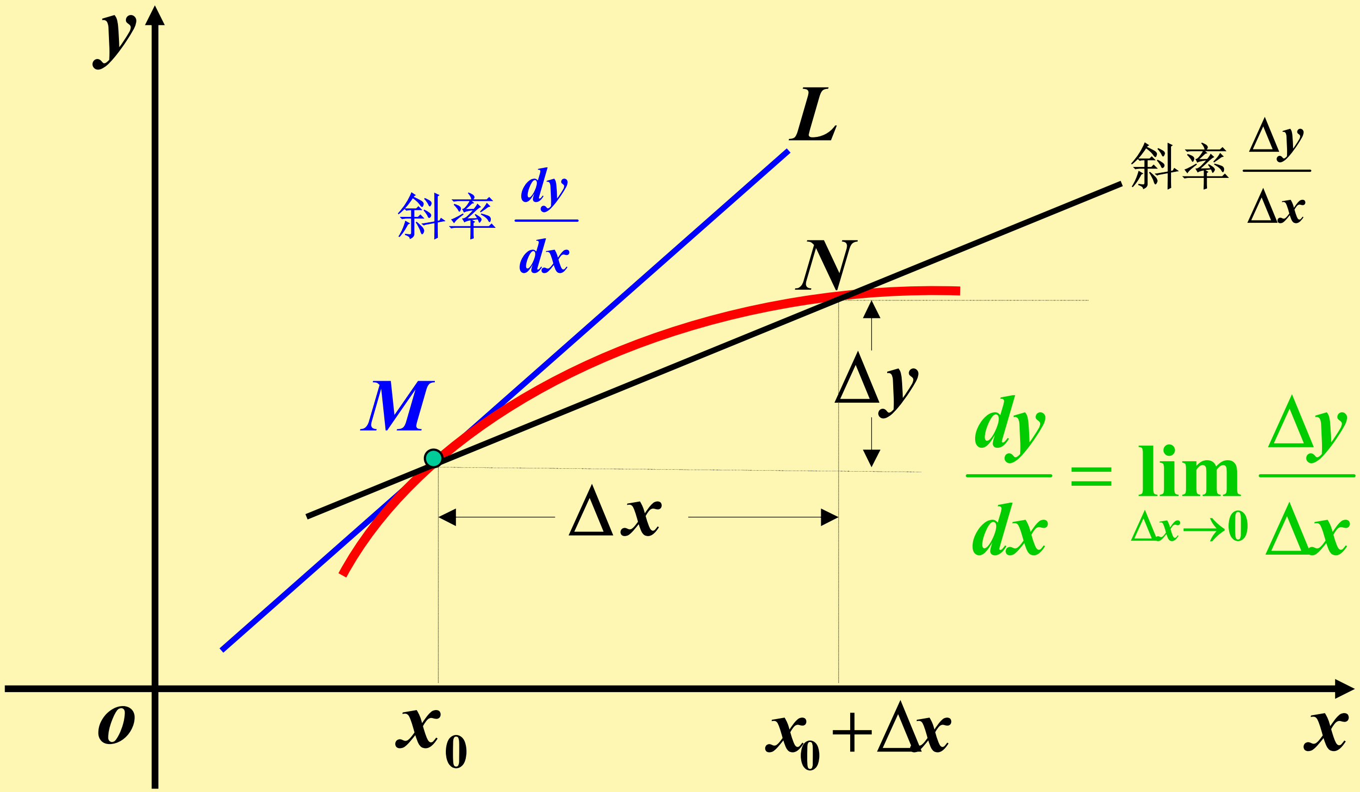
第二章 导数与微分



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

* 微分学是微积分的重要组成部分,它的基本概念是 导数 和 微分.

* 两个基本概念来源于两类问题:

1) 研究函数在某点变化的快慢, 即 变化率问题;

2) 研究当自变量变化少许时, 函数值变化了多少, 即 改变量问题.

前者引出 “导数” 概念, 后者引出 “微分” 概念.

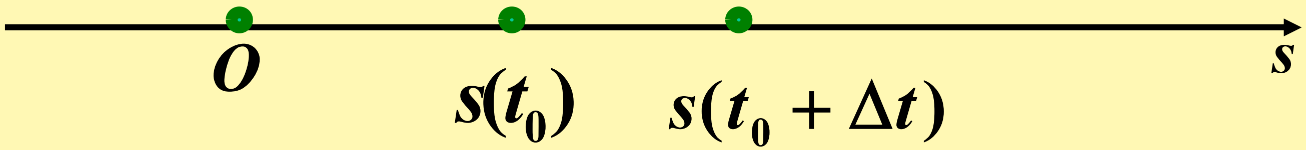
* 本章基本内容就是建立导数和微分的概念,讨论函数的求导方法和微分运算方法.

第一节　导数的定义

- 概念的引入
- 导数的概念
- 导数的意义
- 可导与连续的关系

一、概念的引入

例1 设作变速直线运动的质点,它的位移规律是 $s=s(t)$,
则它在时刻 t_0 的速度 $v(t_0)$ 是什么?



时间：$t_0 \to t_0+\Delta t$

位移：$\Delta s = s(t_0+\Delta t) - s(t_0)$

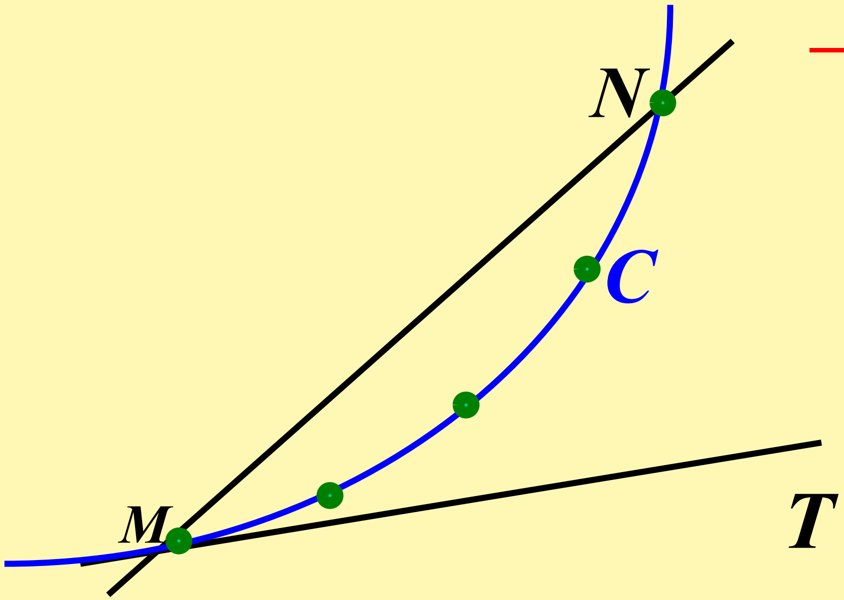
平均速度：$\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} \approx v(t_0)$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

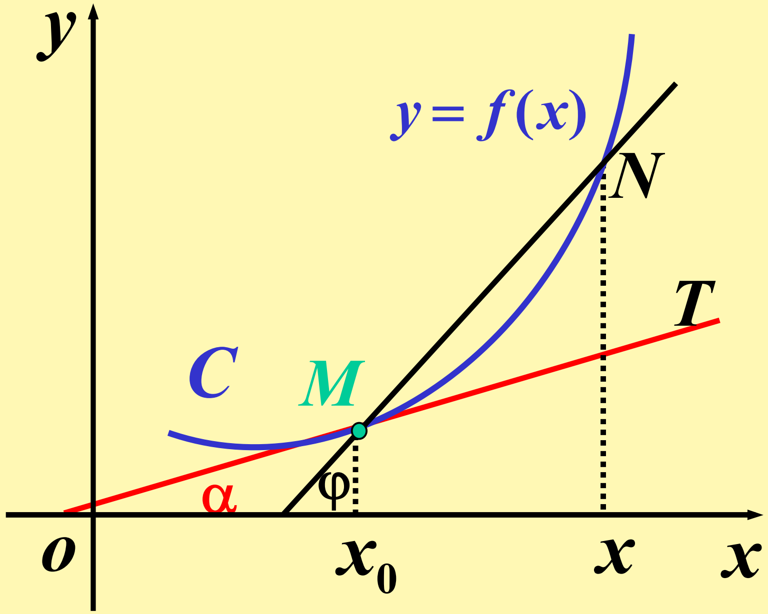
例2 求曲线的切线方程.

割线的极限位置

——切 线



若点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，割线 MN 绕点 M 转动趋于一个极限位置 MT，则直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线。



$$N \to M \Rightarrow x \to x_0$$

令 $\Delta x = x - x_0$，则 $\Delta x \to 0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$N(x,y) \xrightarrow{\text{沿曲线}y=f(x)} M(x_0,y_0)$$

割线 $MN \xrightarrow{\text{绕M点转动}}$ 极限位置 MT

割线的斜率 $\tan\varphi \longrightarrow$ 切线的斜率 $\tan\alpha$

$$\therefore \tan\alpha = \lim_{N\to M}\tan\varphi = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

变速直线运动的瞬时速度:

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

曲线的切线斜率:

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

两者的共性:

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限

二、导数的概念

1. 点导数的定义

定义　设函数 $y=f(x)$在点 x_0的某个邻域内有定义，当自变量 x在 x_0处取得增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$仍在该邻域内)时，相应地函数 y取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$; 若$\Delta x\to 0$时$\Delta y$与$\Delta x$之比的极限存在，则称函数$y=f(x)$在点 x_0处可导，并称此极限为函数 $y=f(x)$在点 x_0处的导数，记做：$f'(x_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

说明:

1. 导数的定义是构造型的,它是函数的一种特殊形式的 极限.

2.导数也可记作 $y'\big|_{x=x_0},\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0},\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

3. 导数定义形式的不同记号:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

4. 如果极限不存在,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 不可导.

如果极限不存在的原因是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$,

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数为无穷大.

2. 单侧导数的定义

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

函数在一点处可导的 充要条件：

$$\boxed{f'(x_0)\text{存在} \Leftrightarrow f'_+(x_0)\text{、}f'_-(x_0)\text{都存在且相等}}$$

3. 导函数(区间导数)的定义

★ 如果函数 $y=f(x)$在开区间 I 内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$在开区间 I 内可导.

★ 对于任一 $x\in I$,都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值 $f'(x)$。这个函数叫做原来函数 $f(x)$ 的导(函)数。记作:

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx} \text{ 或 } \frac{df(x)}{dx}.$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

说明:

1.在上述极限表达式中，Δx是变量,x是常量。

2.对于闭区间的端点,只要求单侧可导.

3. $f'(x_0)$ 与 $f'(x)$ 之间的关系:

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0} \neq \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}=0$$

4. 由定义求导数

步骤：(1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 3 求函数 $f(x) = C$(C为常数)的导数.

解 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{C - C}{h} = 0.$

即 $(C)' = 0.$

例 4 求函数 $y = x^n$ (n为正整数)的导数.

解 $$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}h + \cdots + C_n^n h^{n-1}]$$

$$= nx^{n-1}$$

即 $$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

一般地: $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}.$ $(\mu \in R)$

例如: $$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

例 5 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即 $$(\sin x)'=\cos x.$$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

类似地，$(\cos x)'=-\sin x$

例 6 求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$的导数.

解 $$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\ln a.$$

即 $$(a^x)'=a^x\ln a.$$

特别地： $(e^x)'=e^x.$

例 7　求函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解　$y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\log_a(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$$

即　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　特别地：$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$

★ 请记住以下基本求导公式:

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(a^{x})' = a^{x} \ln a$$

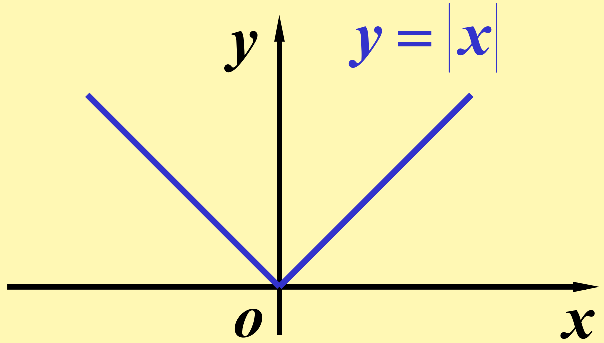
$$(e^{x})' = e^{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

例 8 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解 $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$,



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$,

$\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

Back

例 9 求$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \ x \ge 0 \\ \cos x - 1 & , \ x < 0 \end{cases}$在$x=0$处的导数。

解 $f_+'(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-0}{h}=0$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\cos h-1-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\dfrac{h^2}{2}}{h}=0$$

$$\therefore f'(0)=0$$

三、导数的意义

1. 概念中的导数

	均匀	不均匀
速度	$v=\dfrac{s}{t}$	$v=\dfrac{ds}{dt}$
加速度	$a=\dfrac{v}{t}$	$a=\dfrac{dv}{dt}$
电流强度	$i=\dfrac{q}{t}$	$i=\dfrac{dq}{dt}$
线密度	$\rho=\dfrac{m}{l}$	$\rho=\dfrac{dm}{dl}$
角速度	$\omega=\dfrac{\theta}{t}$	$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$

在均匀情况下,凡是用除法定义的概念或物理量,在不均匀的情况下, 都是用导数。

其他如:种群的生长率和死亡率;放射性物质的衰变率;战争中物资和战斗力的损耗率;冷却过程中的温度变化率等等,都与导数有关.

2. 导数的几何意义

切线的斜率：$\tan\alpha = f'(x_0)$

切线方程：　$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程：　$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\quad (f'(x_0) \neq 0)$

特殊情况：

1) $f'(x_0) = \infty$时　切线：$x = x_0$　　法线：$y = y_0$

2) $f'(x_0) = 0$时　切线：$y = y_0$　　法线：$x = x_0$

注意：导数存在 $\underset{\not\leftarrow}{\rightarrow}$ 有切线

例 10 写出平行于直线 $6x+2y+1=0$ 且与曲线 $y=\frac{3}{4}x^4$ 相切的切线方程 .

分析 凡涉及切线、法线的问题，关键在于寻求**切点**和**切线的斜率**.

解 直线 $6x+2y+1=0$ 其斜率为 $k=-3$

$\therefore -3 = y' = (\frac{3}{4}x^4)' = 3x^3 \quad \therefore x=-1$

$x=-1$ 时，$y=\frac{3}{4}x^4=\frac{3}{4}$ 故切点为 $(-1,\frac{3}{4})$

$\therefore$ 所求切线为 $y-\frac{3}{4}=-3(x+1)$, 即 $12x+4y+9=0.$

四、可导与连续的关系

定理 若函数在某点可导，则其一定在该点连续.

证 设函数 $f(x)$在点 x_0可导,则根据定义有：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\bullet\Delta x$$

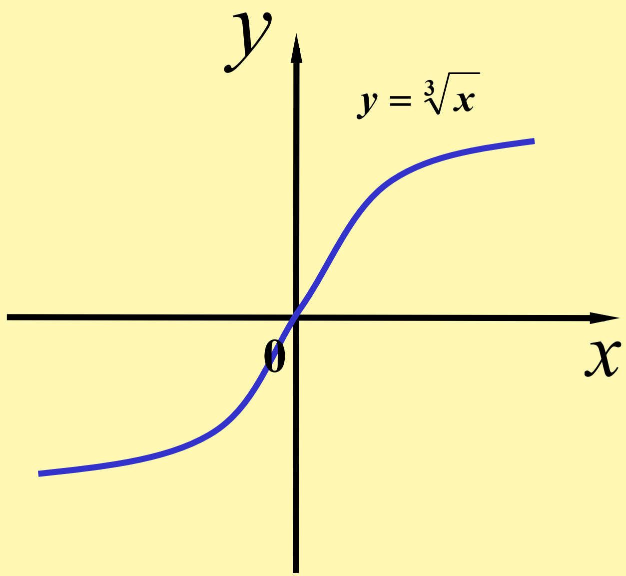
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\bullet\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x$$

$$=f'(x_0)\bullet 0=0$$

注意：不连续一定不可导，但连续未必可导.

如 例 8 中 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.

再如，$f(x)=\sqrt[3]{x}$，



$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\infty,$$

在 $x=0$ 处不可导 .

★ 本节内容小结

物理典型:速度问题

几何典型:切线问题

求切线和法线方程

导数的概念:函数对自变量的瞬时变化率

导数的定义:当自变量的增量趋于零时,函数增量与自变量增量之比的极限。

可导与连续的关系

利用定义求导数

加深对导数概念的理解;
基本求导公式的推导;
分段函数分界点处的可导性讨论等.

推论 (1) $$\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x);$$

(2) $$[Cf(x)]' = Cf'(x);$$

(3) $$\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} f_k(x);$$

(4) $$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

例 1 验证下列函数的导数公式

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

证 $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{(1)' \cdot \cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$$

例 2 设$y=\log_a x\cdot\sin x-\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}$，试求$y'$.

解 $y'=(\log_a x\cdot\sin x)'-(\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1})'$

$$=(\log_a x)'\sin x+\log_a x\cdot(\sin x)'$$

$$-\frac{(\cos x-1)'(\cos x+1)-(\cos x-1)(\cos x+1)'}{(\cos x+1)^2}$$

$$=\frac{\sin x}{x\ln a}+\log_a x\cdot\cos x-\frac{-\sin x(\cos x+1)+(\cos x-1)\sin x}{(\cos x+1)^2}$$

$$=\frac{\sin x}{x\ln a}+\log a x\cdot\cos x+\frac{2\sin x}{(\cos x+1)^2}$$

例 3 设 $y = x^3 \ln x \cos x + 3e^x - 2^x + \sin\frac{\pi}{4}$，求 y'.

解 $y' = (x^3 \ln x \cos x)' + (3e^x)' - (2^x)' + (\sin\frac{\pi}{4})'$

$$= (x^3)' \ln x \cos x + x^3 (\ln x)' \cos x + x^3 \ln x (\cos x)'$$

$$+ 3e^x - 2^x \ln 2 \quad + 0$$

$$= 3x^2 \ln x \cos x + x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos x + x^3 \ln x \cdot (-\sin x)$$

$$+ 3e^x - 2^x \ln 2$$

$$= (3\ln x + 1)x^2 \cos x - x^3 \ln x \sin x + 3e^x - 2^x \ln 2$$

NJUPT

二、反函数的求导法则

定理　设函数 $y = f(x)$ 在某区间内单调、可导且 $f'(x) \neq 0$，则其反函数 $x = g(y)$ 在对应区间内也可导，且有

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

即　反函数的导数等于原函数导数的倒数.

证　设$y=f(x)$是单调连续函数,

则其反函数$x=g(y)$也是单调连续函数.

因此,若令$\Delta x=g(y+\Delta y)-g(y)$

则$\Delta y\to 0$时有$\Delta x\to 0$;且当$\Delta y\neq 0$时有$\Delta x\neq 0$.

于是,$\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$

两边取极限有　$$\frac{dx}{dy}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

因为$f'(x)\neq 0$,　所以　$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}$$

例 4 证明下列结论:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-\infty,+\infty)$$

$$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in (-\infty,+\infty)$$

解 1) $y=\arcsin x$

$\because\ x=\sin y$在 $I_y=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内单调、可导，

且 $(\sin y)'=\cos y>0$,

$\therefore$ 在 $I_x=(-1,1)$内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

类似可得 $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

解　3) $y=\arctan x$

$\because\ x=\tan y$在　$I_y=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内单调、可导，

且 $(\tan y)'=\sec^2 y>0,$

$\therefore$ 在　$I_x=(-\infty,+\infty)$上有

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

类似可得　$(\operatorname{arc}\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$

三、复合函数的求导法则

定理(链式法则)

若:1)函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 可导,

2) $y=f(u)$ 在与 x 对应的点 $u=\varphi(x)$ 可导,

则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

即 因变量对自变量求导, 等于因变量对中间变量求导, 再乘以中间变量对自变量求导.

证　由$y=f(u)$在点u可导，$\therefore \lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha$　(其中$\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0$)

则 $\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$　*

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}]$$

$$=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta u\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u)\varphi'(x).$$

$u=\varphi(x)$在x处可导

$\Downarrow$

$u=\varphi(x)$在x处连续

$\Downarrow$

$\Delta x\to 0$时，$\Delta u\to 0$

注 1) 多层复合的情形

设 $y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = \psi(x),$

则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

2) $\{f[\varphi(x)]\}'$与 $f'[\varphi(x)]$的差异.

前者表示先将 $u = \varphi(x)$代入,再对 x求导,

即先复合再求导;

后者表示先对 u求导,再将 $u = \varphi(x)$代入,

即先求导再复合.

$$\{f[\varphi(x)]\}' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

例 5 求下列函数的导数

$$1)\ y=\sin\frac{2x}{1+x^2} \qquad 2)\ y=\tan^2(\ln x)$$

解 1)函数可视为由$y=\sin u, u=\dfrac{2x}{1+x^2}$复合而成

故$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\cos\frac{2x}{1+x^2}$$

2) $y=\tan^2(\ln x)$

函数可视为由$y=u^2, u=\tan v, v=\ln x$复合而成

故 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}=2u\cdot\sec^2 v\cdot\dfrac{1}{x}$

$$=2\tan(\ln x)\cdot\sec^2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$

注 1. 在求复合函数导数时关键是先搞清复合结构,然后 由表及里一层一层地求导,一直求到最后一层,不能漏掉任何一层.

2. 熟练掌握后可省去中间变量.

例 6 计算导数(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (2) $y=\arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

解 (1) $$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(2) $$y=\frac{1}{1+\dfrac{1+x}{1-x}}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)'=\frac{1-x}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{1-x}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

四、初等函数的求导问题

1. 导数运算的基本法则

$$(1)[Cu(x)]' = Cu'(x)$$

$$(2)[u(x)+v(x)]' = u'(x)+v'(x)$$

$$(3)[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$$(4)\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$(5)[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \text{或} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$(6)\{f[\varphi(x)]\}' = f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

2. 基本初等函数的导数公式

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

至此,初等函数的求导问题均可以解决,但需注意

这 并不意味着 “初等函数在其定义区间内必定可导”,

如 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 在 $x=0$.

例 7 证明: $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

解 $x>0$时, $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$x<0$时, $(\ln|x|)'=[\ln(-x)]'$

$$=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'$$

$$=\frac{1}{x}$$

综上, $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

例 8 求下列函数的导数

$$(1)\, y=\sin^4 x-\cos^4 x \qquad (2)\, y=\frac{x^3+x+1}{1+x^2}$$

解 $(1)\, y'=4\sin^3 x\cdot(\sin x)'-4\cos^3 x\cdot(\cos x)'$

$$=4\sin^3 x\cos x+4\cos^3 x\sin x$$

$$=4\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

$$=2\sin 2x$$

另解: $y=\sin^4 x-\cos^4 x$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\cos 2x$$

$$y'=(-\cos 2x)'=-(-\sin 2x)\cdot 2=2\sin 2x$$

$$(2)\ y=\frac{x^3+x+1}{1+x^2}$$

解 $$y'=\frac{(x^3+x+1)'(1+x^2)-(x^3+x+1)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(3x^2+1)(1+x^2)-2x(x^3+x+1)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{x^4+2x^2-2x+1}{(1+x^2)^2}=1-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

另解： $$y=\frac{x(x^2+1)+1}{1+x^2}=x+\frac{1}{1+x^2}$$

$$y'=1-\frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot(1+x^2)'=1-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

注　从本例可见，如果能把 $f(x)$ 先予以恒等变形成简单的函数，那么再求导就简捷得多.

所以在具体做题时,一定要先把求导的函数审视一遍看看能否予以简化,不要盲目代公式.

五、隐函数的导数

1. 显函数和隐函数

2. 隐函数求导的方法

1° 先将 $F(x,y)=0$ 化成显函数 $y=f(x)$，
然后再求导（前提是能显化）。

2° 方程 $F(x,y)=0$

把方程中的 y 看作 x 的函数，
两边对 x 求导得一含有 y' 的等式，

从中解出 y'.

例9 利用隐函数求导法，求下列函数的导数 y'。

1) $y = \cos(x + y)$

解 把 y 看作 x 的函数，两边对 x 求导，有

$$y' = -\sin(x + y) \cdot (1 + y')$$

解得：

$$y' = \frac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$$

2) $e^y - e^{-x} + xy = 0$

解　把y看作x的函数，两边对 x求导，有

$$e^y \cdot y' + e^{-x} + y + x \cdot y' = 0$$

解得：$y' = -\dfrac{e^{-x} + y}{x + e^y}$

若要求 y' 在 $x = 0$处的值，

从原方程知，此时 $e^y - 1 = 0 \Rightarrow y = 0$，故

$$\therefore y'\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = -\frac{(1+0)}{0+1} = -1$$

注 1)一般隐函数 y不能表示成 x的显式，故其导数 y'一般也不能表示成 x的显式，我们也没有必要把 y' 表示为 x的显式。

2)若要计算 y' 当 $x = x_0$ 时的值时，通常应由

原方程解出 y_0,

然后把 (x_0, y_0)一起代入 y' 的表示式中，

即可求出 $y'\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$。

例 10 已知 y是由方程 $\sin y + xe^y = 0$所确定的隐函数，试求 y'，以及在 $(0,0)$点处的切线的方程。

解 $\because \sin y + xe^y = 0$

$$\therefore (\cos y)y' + e^y + xe^y \cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{e^y}{\cos y + xe^y}$$

$$\therefore k = y'\Big|_{\substack{y=0\\x=0}} = -1$$

$\therefore$ 所求切线为： $y - 0 = -1(x - 0)$ 即 $y = -x$

3. 对数求导法

观察函数 $y=\dfrac{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$, $y=x^{\sin x}$.

结构特点(适用范围):

多个函数相乘或幂指函 数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

方法:

先在方程两边取对数, 然后利用隐函数的求导方法求出导数.

------对数求导法

例 11 设 $y=\dfrac{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$, 求$y'$.

解　等式两边先取绝对值再取对数得

$$\ln|y| = \ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-1| - 2\ln|x+4| - x$$

上式两边对　x求导得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1$$

$$\therefore y' = \frac{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1\right]$$

例 12 设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$, 用对数求导法求 y'.

解 等式两边取对数得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

上式两边对 x求导得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

六、由参数方程确定的函数的导数

[引例] 斜上抛物体运动 $\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

$$y = v_2 \cdot \frac{x}{v_1} - \frac{1}{2} g (\frac{x}{v_1})^2 = \frac{v_2}{v_1} x - \frac{g}{2 v_1^2} x^2$$

前者物理意义清楚, 后者几何意思明显.

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 能确定x与y间的函数关系,

则称此函数$y=y(x)$(或$x=x(y)$)为参数方程所确定的函数 。

NJUPT

问题：$y' = \dfrac{dy}{dx} = ?$

例如 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{x}{2}$ 消去参数

$\therefore y = t^2 = (\dfrac{x}{2})^2 \qquad \therefore y' = \dfrac{1}{2}x$

问题：消参困难或无法消参如何求导？

在方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 中,

设函数$x=\varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,

$$\therefore y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$$

再设函数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$都可导, 且$\varphi'(t)\neq 0$,

则由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

例 13 求摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程。

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = 1$$

当 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 时, $x = a(\dfrac{\pi}{2}-1), y = a$

$\therefore$ 所求切线方程为:

$$y - a = x - a(\frac{\pi}{2}-1)$$

即: $y = x + a(2-\dfrac{\pi}{2})$

（※由极坐标方程确定的函数的导数）

例14 求心脏线 $\rho = a(1+\cos\theta)$在 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解： 根据极坐标与直角坐标 间的关系有：

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{[a(1+\cos\theta)\sin\theta]'}{[a(1+\cos\theta)\cos\theta]'} = \frac{a(\cos\theta+\cos 2\theta)}{a(-\sin\theta-\sin 2\theta)}$$

$$= -\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta+\sin 2\theta}$$

$$\therefore k_{切} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\because \theta = \frac{\pi}{2} 时 x = 0, y = a$$

$$\therefore 所求切线方程为: y = x + a$$

$$\boxed{\rho = \rho(\theta) \overset{化为参方}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}}$$

★本讲内容小结

1. 初等函数的求导问题

导数的构造性定义 ⇒ 运算法则(四则/反函数/复合)

导数的构造性定义 ⇓

$(C)'=0$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\ln x)'=1/x$

⇒ 其它的基本初等函数的求导公式

运算法则 ⇓ 其它的基本初等函数的求导公式

运算法则、其它的基本初等函数的求导公式 ⇒ 所有初等函数(显式)的求导问题

注：1)求导运算是高数中最基本最重要的计算,是全书的重点,而复合函数的求导是其中的难点.

2)复合函数求导的关键在于正确分解复合结构.

3)必须熟记基本导数公式(注意公式的特点).

★本讲内容小结

2. 其他形式的初等函数的求导问题

1)隐函数的导数

(直接对方程两边求导)

2)某些特殊的显函数－对数求导法

(方程两边取对数,然后按隐函数的求导法则求导)

3)由参数方程确定的函数的导数

(实质上是利用复合函数与反函数的求导法则)

4)由极坐标方程确定的函数的导数

(利用直角坐标与极坐标之间的关系转化为由参数方程确定的函数的求导问题)

★ 思考与练习

若 $f(u)$ 在 u_0 不可导，$u=g(x)$ 在 x_0 可导，且 $u_0=g(x_0)$，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处（　　）.

（1）必可导；（2）必不可导；（3）不一定可导；√

解答　例如 $f(u)=|u|$ 　在 $u=0$ 处不可导

取 $u=g(x)=x$ 　在 $x=0$ 处可导

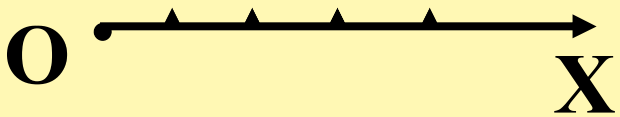
$f[g(x)]=|x|$ 　在 $x=0$ 处不可导　(1) ×

取 $u=g(x)=x^2$ 　在 $x=0$ 处可导

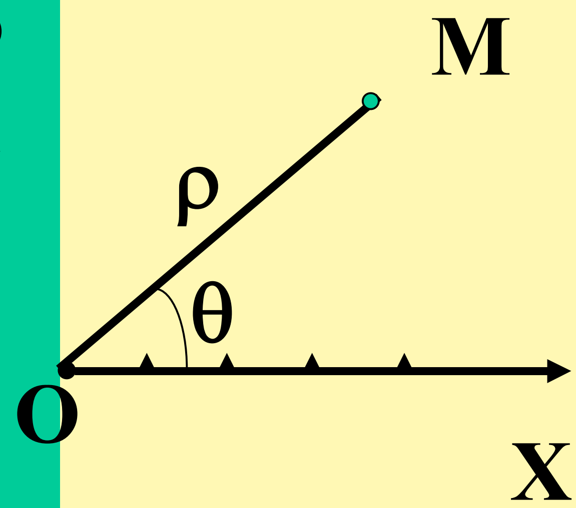
$f[g(x)]=|x^2|=x^2$ 　在 $x=0$ 处可导　(2) ×

极坐标

极坐标系：在平面内取一个定点O，叫做**极点**，引一条射线OX，叫做**极轴**。再选定一个长度单位和**计算角度的正方向**（通常取逆时针方向）



对于平面上任意一点 M，用 ρ 表示线段 OM 的长度，用 θ 表示从 OX 到 OM 的角度，ρ 叫做点 M 的 **极径**，θ 叫做点 M 的 **极角**，有序数对 (ρ, θ) 叫做 M 的极坐标。



极坐标系下点与它的极坐标的对应情况

[1]给定(ρ,θ)，就可以在极坐标平面内确定唯一的一点 M。

[2]给定平面上一点 M，却有无数个极坐标与之对应。原因在于：极角有无数个

一般地，若(ρ,θ)是一点的极坐标，则$(\rho,\theta+2k\pi)$都可以作为它的极坐标.

限定 $0\leqslant\theta<2\pi$，那么除极点外，平面内的点与其极坐标就可以 一一对应 了.

极坐标与直角坐标的互化:

设点M的直角坐标是（x, y）极坐标是（ρ，θ）

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}(x \neq 0) \end{cases}$$

互化公式的三个前提条件:

1. 极点与直角坐标系的原点重合;
2. 极轴与直角坐标系的x轴的正半轴重合;
3. 两种坐标系的单位长度相同.

常见曲线的极坐标方程

例 （1）过点 $A(a,0)$，且垂直于极轴的直线 L 的极坐标方程：$\rho\cos\theta = a$

（2）中心在极点, 半径为 a 的圆：$\rho = a$

（3）中心在 $A(a,0)$ 半径为 a 的圆.

$$\rho = 2a\cos\theta$$

Back

第三节 高阶导数及相关变化率

- 高阶导数
- 相关变化率

一、高阶导数

1、高阶导数的概念

引例:变速直线运动的加速度.

设 $s = f(t)$, 则瞬时速度为 $v(t) = f'(t)$

$\because$ 加速度 a 是速度 v 对时间 t 的变化率

$$\therefore a(t) = v'(t) = [f'(t)]'.$$

定义 如果函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$仍然可导,

则称 $f'(x)$的导数为函数 $f(x)$的二阶导数.

记作: $f''(x)$或y''或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

类似地,可定义三阶导数、四阶 导数……,一般地,

$n-1$阶导数的导数称为 n阶导数,分别记作:

$y''', y^{(4)}, \cdots\cdots, y^{(n)}$ 或$f'''(x), f^{(4)}(x), \cdots\cdots, f^{(n)}(x)$

或 $\dfrac{d^3y}{dx^3}, \dfrac{d^4y}{dx^4}, \cdots\cdots, \dfrac{d^ny}{dx^n}$ 或 $\dfrac{d^3f}{dx^3}, \dfrac{d^4f}{dx^4}, \cdots\cdots, \dfrac{d^nf}{dx^n}$

即： $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]' = \dfrac{d}{dx}(y^{(n-1)}) \quad (n = 1, 2, \cdots)$

约定： y称为函数y的零阶导数，即$y = y^{(0)}$.

注： 二阶及二阶以上的导数称为 高阶导数。

2、高阶导数的计算

1)直接法：即由高阶导数的定义 逐阶 去求.

例 1 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 求 y'''.

解 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

$$y''=[(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}]' =-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x =-x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'''=-(x^2+1)^{-3/2}-x\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(x^2+1)^{-5/2}\cdot 2x$$

$$=(x^2+1)^{-5/2}[-(x^2+1)+3x^2] =\frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}$$

例 2 计算下列函数的 n阶导数：

$$(1)e^{x} \quad (2)\sin x \quad (3)\ln x \quad (4)x^{\alpha}$$

解 $(1)(e^{x})^{(n)} = e^{x}$ 一般： $(a^{x})^{(n)} = a^{x}(\ln a)^{n}$

$$(2)\, y' = (\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

注: 求 n 阶导数时, 求出 1-3 或 4 阶后, 分析结果的规律性, 写出 n 阶导数. (再用 数学归纳法 证明)

(3) $y = \ln x$

$$y' = \frac{1}{x} \qquad y'' = -\frac{1}{x^2} \qquad y''' = \frac{2!}{x^3}$$

$$y^{(4)} = -\frac{3!}{x^4} \qquad \cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \quad (n \geq 1,\ 0! = 1)$$

$$(4)\ y = x^{\alpha}\ (\alpha \in R)$$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad (n \geq 1)$$

若 α 为正整数 n,则

$$y^{(n)} = (x^{n})^{(n)} = n!, \qquad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$$

一些常用的高阶导数公式:

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0)$ $\qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ $\qquad (\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geq 1,\ 0! = 1)$$

2)间接法

所谓 间接法,即利用已知的高阶导数公式, 通过运算法则求出 n 阶导数.

★ 高阶导数的运算法则

设函数u和v具有n阶导数, 则

(1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$　　(2) $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$

(3) $$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$ 莱布尼兹公式

例 3 计算下列函数的 n阶导数：

$$(1)\, y=\sin 3x\cdot x^2 \quad (2)\, y=\sin^6 x+\cos^6 x \quad (3)\, y=\frac{2x+1}{x^2-x-2}$$

解 $(1)\, y^{(n)}=(\underbrace{\sin 3x}_{u}\cdot \underbrace{x^2}_{v})^{(n)}$

莱布尼兹公式

$$= C_n^0(\sin 3x)^{(n)}\cdot x^2 + C_n^1(\sin 3x)^{(n-1)}\cdot(x^2)'$$

$$+C_n^2(\sin 3x)^{(n-2)}\cdot(x^2)''$$

$$=3^n\sin(3x+n\cdot\frac{\pi}{2})\cdot x^2+n3^{n-1}(\sin 3x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2})\cdot 2x$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}3^{n-2}(\sin 3x+(n-2)\cdot\frac{\pi}{2})\cdot 2$$

(2) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\therefore\ y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}).$$

$$(3)\ y=\frac{2x+1}{x^2-x-2}$$

解 $$y=\frac{2x+1}{x^2-x-2}=\frac{2x+1}{(x-2)(x+1)}=\frac{\frac{5}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{5}{3}(-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}+\frac{1}{3}(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

注：计算高阶导数一般比较麻烦,多使用间接法,使用时,应根据给出的函数先予以化简变成基本公式中的形式(如(2)(3)),然后再套用公式计算。

3)分段函数、隐函数以及参数方程确定的函数的高阶导数

例 4 $f(x)=\begin{cases}3x^2 & x\ge 0\\ 2x^2 & x<0\end{cases}$，求 $f''(x)$

解 $f'(x)=\begin{cases}6x & x>0\\ 4x & x<0\end{cases}$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2}{x}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2}{x}=0$$

$$\therefore f'(0)=0$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}6x & x\geq 0\\ 4x & x<0\end{cases} \qquad f''(x)=\begin{cases}6 & x>0\\ 4 & x<0\end{cases}$$

$$f''_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{6x}{x}=6$$

$\therefore f''(0)$不存在

$$f''_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{4x}{x}=4$$

$$\therefore f''(x)=\begin{cases}6 & x>0\\ 4 & x<0\end{cases}$$

例 5 设方程 $y=\tan(x+y)$ 确定 $y=y(x)$, 求 y', y''.

解 方程两边对 x 求导得:

$$y' = \sec^2(x+y)(1+y')$$

整理得: $$y' = \frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)} = \frac{\tan^2(x+y)+1}{-\tan^2(x+y)}$$

$$\Rightarrow y' = -1 - \frac{1}{\tan^2(x+y)} \qquad \Rightarrow y' = -1 - \frac{1}{y^2}$$

将上式中的 y 仍视为 x 的函数, 两边继续对 x 求导:

$$y'' = 2y^{-3} \bullet y' = -\frac{2}{y^3}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)$$

例 6 求由摆线 $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$所确定的函数 $y = y(x)$的二阶导数 .

解 $\because \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \dfrac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{\cos\theta(1-\cos\theta) - \sin\theta\cdot\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= -\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}$$

一般地，若函数 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 二阶可导,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

即 $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

注：掌握该结论的推导思想！

二、相关变化率

我们来介绍导数在相关变化率问题中的简单应用.

设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 都是可导函数，

而变量 x 与 y 之间存在某种关系，

从而它们的变化率 $\dfrac{dx}{dt}$ 与 $\dfrac{dy}{dt}$ 间也存在一定关系，

这种两个相互依赖的变化率称为相关变化率

相关变化率问题:

已知其中一个变化率时，如何求出另一个变化率?

例 1 一个气球的半径以 $10cm/s$的速度增长着,求当半径为 $10cm$时体积和表面积的增长速度.

解 设在时刻t时,气球的半径为$r=r(t)$,

则气球的体积和表面积 分别为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3(t) \qquad S=4\pi r^2(t)$$

显然，V和S都是t的函数.

今问：当$r=10cm$时$V'(t)=?\ S'(t)=?$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2(t)\cdot\frac{dr(t)}{dt}=4\pi\cdot r^2(t)\cdot\frac{dr(t)}{dt}$$

由题设知 $\dfrac{dr(t)}{dt}=10cm/s$

$$\therefore \left.\frac{dV}{dt}\right|_{r(t)=10}=4\pi\cdot 10^2\cdot 10=4000\pi cm^3/s$$

类似地， $\dfrac{dS}{dt}=4\pi\cdot 2r(t)\cdot\dfrac{dr(t)}{dt}$

$$\therefore \left.\frac{dS}{dt}\right|_{r(t)=10}=4\pi\cdot 2\cdot 10\cdot 10=800\pi cm^2/s$$

即$r=10cm$时,体积的增长速度为$4000\pi cm^3/s$,

表面积的增长速度为$800\pi cm^2/s$.

例 2 有一个底半径为 $R(cm)$,高为 $h(cm)$的圆锥形容器,如以 Acm^3/s的速度由顶部向容器内注水,试求容器内水位高度为圆锥形容器的高度的一半时,水面上升的速度.

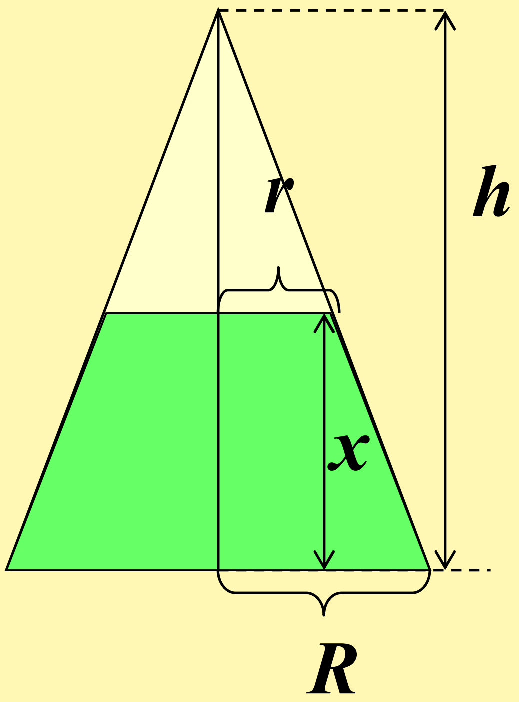
解 设在时刻t时,容器内水面高度为$x=x(t)$,

今问：当$x=\dfrac{1}{2}h$时 $\dfrac{dx}{dt}=?$

$\because$ 水面升高是由于顶部有 水注入

$\therefore v_{\text{顶部注水}}=v_{\text{容器水量增加}}=Acm^3/s$

$\because$ 容器水量 $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h - \dfrac{1}{3}\pi r^2 (h-x)$



$$= \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h-x}{h}R\right)^2 (h-x)$$

$$= \frac{\pi R^2}{3h^2}[h^3 - (h-x)^3]$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^2}{h^2}(h-x)^2 \frac{dx}{dt} = A$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{Ah^2}{\pi R^2 (h-x)^2}$$

$\therefore$ 当 $x = \dfrac{1}{2}h$ 时, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4A}{\pi R^2}$.

★前面内容回顾

变化率问题－导数
- 概念
- 计算
- 简单应用 — 相关变化率问题

增量问题－微分
- 概念
- 计算
- 简单应用 — 近似计算

第四节　微分

- 微分的概念
- 微分的运算法则及基本公式
- 微分在近似计算中的应用

一、微分的概念

1、问题的提出

已知 $y=x^2$，x在 x_0 的增量是 Δx,求 Δy.

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2 = \underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$

(1) : Δx的线性函数;

(2) : Δx的高阶无穷小(当$|\Delta x|$很小时可忽略).

$\therefore \Delta y \approx 2x_0\cdot\Delta x.$ 既容易计算又是较好的近似值

一般地，如果 $y=f(x)$满足一定条件，则增量 Δy可表示为

$\Delta y = A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$

2. 微分的定义

设函数 $y=f(x)$在某区间内有定义，x_0及 $x_0+\Delta x$在这区间内，如果:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

(其中A是不依赖于Δx的常数)，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0可微,而$A\Delta x$叫做函数$y=f(x)$在点 x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作 dy，即 $dy=A\cdot\Delta x$.

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x) \qquad dy = A\cdot\Delta x$$

注：(1) dy是自变量的增量 Δx的线性函数;

(2) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$是比 Δx高阶的无穷小;

(3) 当 $|\Delta x|$ 很小时, $\Delta y \approx dy$，其误差为 $o(\Delta x)$;

(4) 若 $A \neq 0$，则 $\Delta x \to 0$时, dy与 Δy是等价无穷小.

$$\because \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A\cdot\Delta x} \to 1$$

3. 函数可微的条件

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A = f'(x_0)$.

证明：(必要性) 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微, 则有:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (1)$$

两边同除以Δx, 并令$\Delta x\to 0$ 取极限, 则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) = A$$

故 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且有 $f'(x_0) = A$

(充分性)　设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，即有：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

根据函数极限与无穷小的关系可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha \qquad (\alpha\text{是}\Delta x\to 0\text{时的无穷小})$$

于是有 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \qquad (2)$

(2)式中 $f'(x_0)$ 与 Δx 无关，$\alpha\Delta x$ 是较 Δx 高阶的无穷小，故

(2)式相当于(1)式, 这说明 $f(x)$ 在 x_0 处可微。证毕 。

该定理说明: 对于一元函数, 可导 与 可微 是 等价 的.

注：1)通常把自变量 x的增量 Δx称为自变量的微分，记作 dx，即 $dx = \Delta x$.

2)函数 $y = f(x)$在任意点 x的微分，称为函数的微分，记作 dy或 $df(x)$，即

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

3) $\because dy = f'(x)dx \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

函数的微分 dy与自变量的微分 dx之商等于该函数的导数．故导数也叫"微商".

因此,记号“$\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{df(x)}{dx}$”的含义与前面导数定义部分相比内涵更丰富了。

例如: 1)利用微商的概念，参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定的函数 $y=y(x)$的导数 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

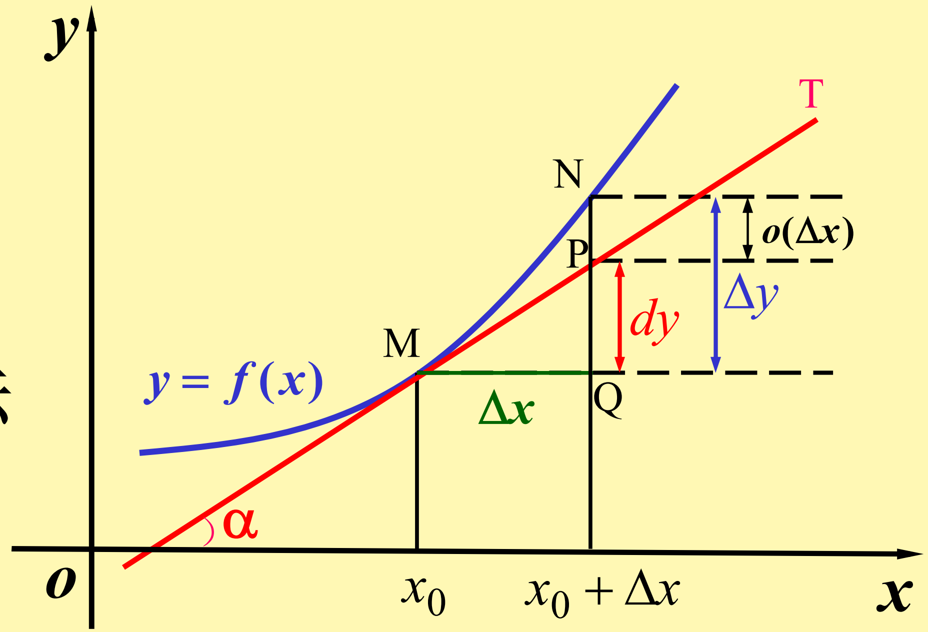
2)反函数的导数: $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{y'}$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{dy}=\frac{-\frac{1}{y'^2}\cdot y''dx}{y'dx}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

4、微分的几何意义

几何意义:(如图)

当 Δy是曲线上的点的纵坐标的增量时，dy就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量.



当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，

切线段MP可近似代替曲线段MN.（以直代曲）

二、微分的运算法则及基本公式

$dy = f'(x)dx \Rightarrow$ 求法：计算函数的导数，再乘以自变量的微分.

1) 基本初等函数的微分公式

$$d(C) = 0 \qquad d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \qquad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx \qquad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx \qquad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \qquad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}dx \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(\operatorname{arc}\cot x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$$

2)函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

$$d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{du}{u^2}$$

3)复合函数的微分法则

设 $y = f(u)$及 $u = \varphi(x)$都可导，则复合函数

$y = f[\varphi(x)]$的微分为

$$dy = y'(x)dx = f'(u)\cdot\varphi'(x)dx \quad 而 \quad du = \varphi'(x)dx$$

即：$dy = f'(u)du$

★ 微分形式不变性

设函数 $y=f(u)$有导数 $f'(u)$,

(1) 若 u是自变量,则 $\underline{dy=f'(u)du}$;

(2) 若 u是中间变量，即 u是另一变量 x的可微函数

$u=\varphi(x)$, 则 $dy=f'(u)\varphi'(x)dx$

$\because \varphi'(x)dx=du$, $\therefore \underline{dy=f'(u)du}$.

结论：无论 u是自变量还是中间变量，函数

$y=f(u)$的微分形式总是 $dy=f'(u)du$

通常把这个性质称为 微分形式不变性。

例 1 在括号中填入适当的函数, 使下列等式成立.

(1) $d(\quad) = \cos\omega t dt$; (2) $d(\sin x^2) = (\quad) d(\sqrt{x})$.

解 (1) $\because (\sin\omega t)' = \omega\cos\omega t$, $\therefore (\frac{1}{\omega}\sin\omega t)' = \cos\omega t$

$$\therefore d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t + C) = \cos\omega t dt.$$

$$(2) \because \frac{d(\sin x^2)}{d(\sqrt{x})} = \frac{2x\cos x^2 dx}{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx} = 4x\sqrt{x}\cos x^2,$$

$$\therefore d(\sin x^2) = (4x\sqrt{x}\cos x^2)d(\sqrt{x}).$$

注: 本例中 (1) 是微分的反问题,是不定积分要研究的内容,数学中的反问题往往出现多值性.

NJUPT

三、微分在近似计算中的应用

当 $|\Delta x|$ 很小时,$\Delta y \approx dy$,其误差为 $o(\Delta x)$.

$\therefore$ 当$|\Delta x| << 1$时，有 $\Delta y \approx dy\big|_{x=x_0}$

因此，我们可以利用微分去做一些近似计算:

1) 计算函数增量的近似值

$$f(\underbrace{x_0+\Delta x}_{x}) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x, |\Delta x| << 1,$$

2) 计算x_0附近点x处的函数值的近似值

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), |x - x_0| << 1,$$

例 2 煅烧生成的半径为10cm的金属原板，冷却后半径收缩了0.05cm，问面积缩小了多少？

解 $\because S = \pi r^2,\quad r = 10\,cm,\quad \Delta r = -0.05\,cm.$

$$\therefore \Delta S \approx dS = S'(r)\Delta r = 2\pi r \cdot \Delta r = 2\pi \times 10 \times (-0.05)$$

$= -\pi\ (cm^2)$. 即面积缩小了约 π平方厘米.

例3 计算$\sqrt{2}$的近似值。

解 令$f(x) = \sqrt{x}$,

则$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\therefore \sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$$

取 $x_0 = 1.96$

则$\Delta x = 2 - 1.96 = 0.04$比较小

$$\therefore \sqrt{2} \approx \sqrt{1.96} + \frac{1}{2\sqrt{1.96}} \cdot 0.04$$

$$\approx 1.414$$

★ 本章内容小结

1.微分学所要解决的两类问题:

$$\begin{cases} \text{函数的变化率问题} \Longrightarrow \text{导数的概念} \\ \text{函数的增量问题} \Longrightarrow \text{微分的概念} \end{cases}$$

2.导数与微分的联系: 可导 $\Leftrightarrow$ 可微.

3.导数与微分的区别: (1) (2)

★ 导数与微分的区别:

1. 函数 $f(x)$ 在点x_0处的导数是一个定数 $f'(x_0)$, 而微分 $dy = f'(x_0)(x - x_0)$ 是x的线性函数,实际上,它是$x \to x_0$时的无穷小.

$$\because \lim_{x\to x_0} dy = \lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

2. 从几何意义上来看, $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率,而微分 $dy = f'(x_0)(x - x_0)$是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线当横坐标从 x_0 到 x时对应的纵坐标增量.