第三章

微分中值定理

与导数的应用

3.1　中值定理

3.1.1　费马(Fermat)引理

3.1.2　罗尔(Rolle)定理

3.1.3　拉格朗日(Lagrange)定理

3.1.4　柯西(Cauchy)定理

3.1.1 费马(Fermat)引理

几何意义

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \text{ 在}\cup(x_0)\text{有定义,} \\ \text{且 } f(x)\le f(x_0),\ f'(x_0) \text{ 存在} \\ \quad (\text{或}\ge) \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$

证: 对 $\forall x_0+\Delta x\in\cup(x_0)$, 有 $f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$,

则 $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\begin{cases} f'_-(x_0)\ge 0 & (\Delta x\to 0^-) \\ f'_+(x_0)\le 0 & (\Delta x\to 0^+) \end{cases} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$

注：通常称导数为零的点为函数的 驻点（或稳定点，临界点）。

Back

3.1.2、罗尔(Rolle)定理

几何意义

$y=f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

(2) 在开区间 (a,b) 内可导

(3) 在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$

$\Longrightarrow$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=0.$

证: 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故在 $[a,b]$ 上取得最大值 M 和最小值 $m.$

若 $M=m$, 则 $f(x)\equiv M,\ x\in[a,b]$,

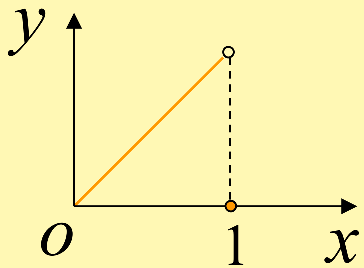
此时 $\forall\xi\in(a,b),\ f'(\xi)=0.$

Back

若 $M>m$, 则 M 和 m 中至少有一个与端点值不等, 不妨设 $M\neq f(a)$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=M$, 故由 **Fermat 引理** 得 $f'(\xi)=0$.

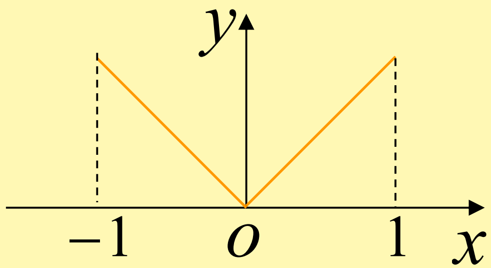
注: 若定理条件不全具备, 则结论不一定成立. 例如,

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$$



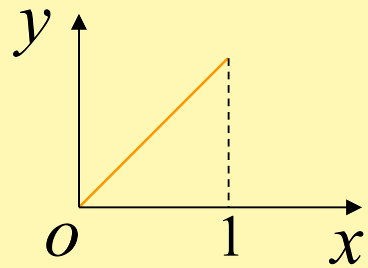
$f(x)=|x|$

$x\in[-1,1]$



$f(x)=x$

$x\in[0,1]$



例1. 已知 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 判断方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间。

解：显然 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上满足 Rolle 定理 的条件.

$\therefore \exists x_1 \in (1,2), s.t. f'(x_1)=0.$

类似地, …

例2. 若 $f(x)$ 可导, 试证在其两个零点间一定有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

证: 设 $f(x_1)=f(x_2)=0,\ x_1<x_2$,

欲证: $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

只要证 $e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$ 亦即 $[e^x f(x)]'\big|_{x=\xi}=0$

作辅助函数 $F(x)=e^x f(x)$, 显然 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足 **Rolle 定理** 的条件.

因此 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$0=F'(\xi)=[e^x f(x)]'\big|_{x=\xi}=e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)$$

例3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，且 $f(1)=0$，

求证存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

证：设辅助函数 $\boldsymbol{F(x)=x^n f(x)}$

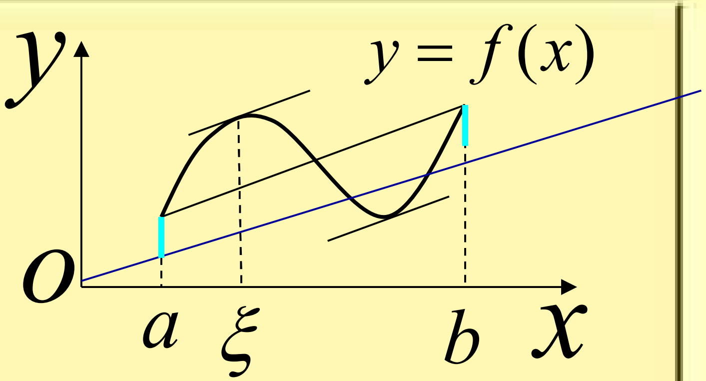
显然 $\boldsymbol{F(x)}$ 在 $[0,1]$ 上满足 Rolle 定理 的条件，

因此至少存在一点 $\xi\in(0,1)$， 使得

$$\boldsymbol{0=F'(\xi)=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)}$$

即 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

3.1.3 拉格朗日(Lagrange)定理



$y=f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在开区间 (a, b) 内可导

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证: 问题转化为证 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

Back

作辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

显然, $\boldsymbol{F(x)}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$\boldsymbol{F(a)}=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\boldsymbol{F(b)}$, 由罗尔定理知至少存在一点

$\xi\in(a,b)$, 使得 $\boldsymbol{F'(\xi)=0}$, 即定理结论成立.

注:(1) 此定理的几何意义是: 可导函数在开区间内至少有一点处的切线平行于两个端点的连线.

(2) 拉格朗日定理 结论 的其他表示形式:

① $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \quad \xi\in(a,b)$

② $f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a) \quad \theta\in(0,1)$

③ $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad \theta\in(0,1)$

从式 ③ 可以看出,拉格朗日定理将函数在有限区间上的增量和这一区间上某点处的导数联系起来, 从而提供了用导数研究函数的理论依据. 式 ③ 称为 有限增量公式.

推论：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(x)\equiv 0$,则 $f(x)$ 在 I 上必为常数.

证: 在 I 上任取两点 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, 在 $[x_1, x_2]$ 上用拉格朗日定理, 得

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1) = 0 \quad (x_1<\xi<x_2)$$

$$\therefore \quad f(x_2)=f(x_1)$$

由 x_1, x_2 的任意性知, $f(x)$ 在 I 上为常数.

例4. 证明恒等式 $\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2},\ x \in [-1,1].$

证: 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则在 $(-1,1)$ 上

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0$$

由推论可知 $f(x) = \arcsin x + \arccos x \equiv C$ (常数)

令 $x = 0$, 得 $C = \frac{\pi}{2}.$

又 $f(\pm 1) = \frac{\pi}{2}$, 故所证等式在定义域 $[-1,1]$ 上成立.

经验: 欲证 $x \in I$ 时 $f(x) \equiv C$, 只需证在 I 上 $f'(x) \equiv 0$,

且 $\exists x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = C$.

例5. 证明不等式 $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x>0).$

证: 设 $f(t)=\ln(1+t)$, 则 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日定理的条件，因此有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0), \quad 0<\xi<x$$

即
$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}, \qquad 0<\xi<x$$

因为
$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$$

故
$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \qquad (x>0)$$

3.1.4 柯西(Cauchy) 定理

几何意义

$f(x)$ 及 $F(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 [a , b] 上连续

(2) 在开区间 (a , b) 内可导

(3)在开区间 (a , b) 内 $F'(x) \neq 0$

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

分析: $F(b)-F(a) = F'(\eta)(b-a) \neq 0 \qquad a<\eta<b$

要证 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)} = 0 \qquad \varphi'(\xi)$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$$

Back

证: 作辅助函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, 且

$$\varphi(a)=\frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\varphi'(\xi)=0$,

即 $$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

思考: 柯西定理的下述证法对吗？

$\because f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$

$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$

两个 ξ 不一定相同

上面两式相比即得结论. 错!

例6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证: 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1^2-0^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}$$

设 $F(x)=x^2$, 则 $f(x), F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 柯西定理 条件, 因此在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f(1)-f(0)}{F(1)-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$

内容小结

1. 微分中值定理之间的相互关系

$$
\begin{tikzcd}
\text{费马引理} \arrow[d] & & \text{拉格朗日定理} \arrow[dll, dashed, shift right, "f(b)=f(a)"'] \\
\text{罗尔定理} \arrow[urr, shift right] \arrow[rr, shift left] & & \text{柯西定理} \arrow[u, dashed, "F(x)=x"'] \arrow[ll, dashed, shift left, "{f(b)=f(a)}" , "{F(x)=x}"']
\end{tikzcd}
$$

2. 微分中值定理的应用

(1) 证明有关中值问题的结论

(2) 证明恒等式

(3) 证明不等式

关键:
利用逆向思维
找辅助函数

费马(1601 - 1665)

法国数学家，他是一位律师, 数学只是他的业余爱好。在数学上有许多重大贡献. 他特别爱好数论, 他于 1637 年提出的费马大定理:

" 当正整数 $n>2$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 无正整数解 "

到 1995 年才被英国数学家 怀尔斯 及其学生 泰勒 所证明。.

费马引理是后人从他研究最大值与最小值的方法中提炼出来的.

Back

拉格朗日 (1736 – 1813)

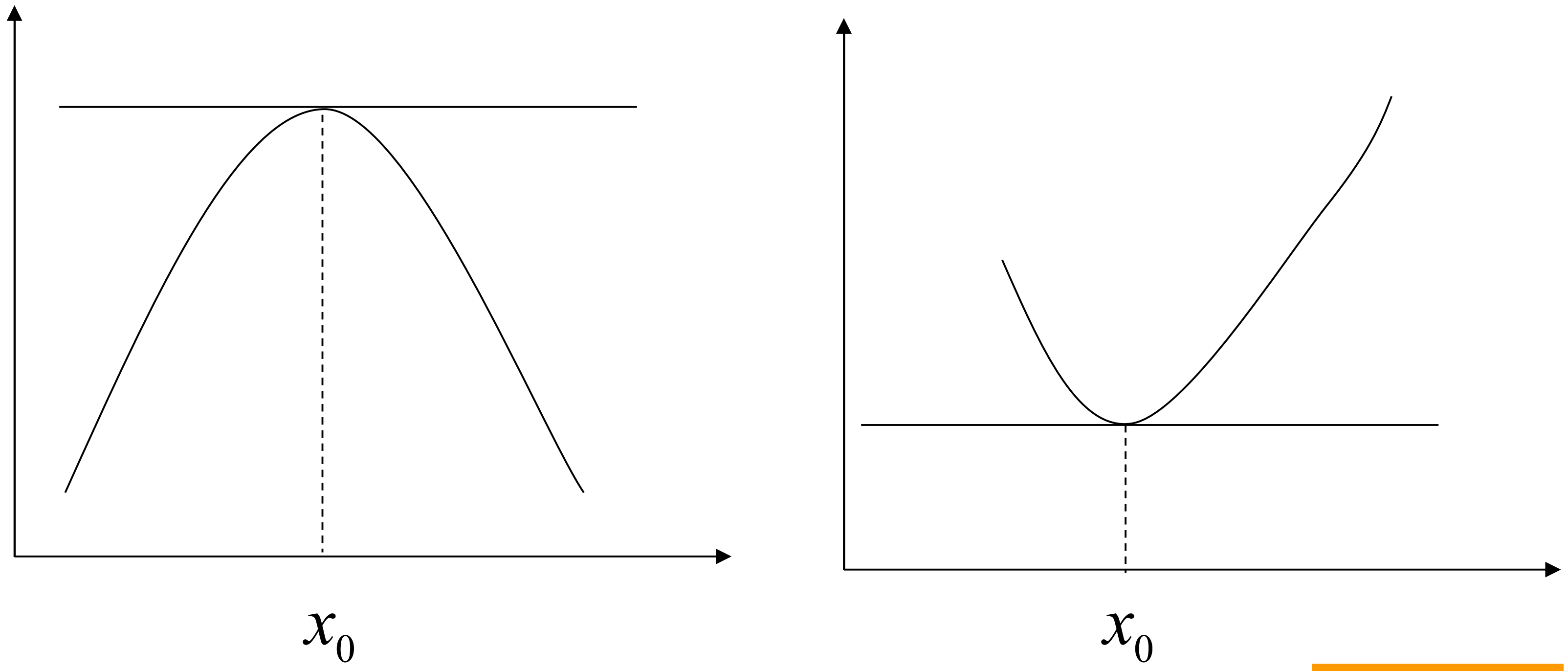
法国数学家. 他在方程论, 解析函数论, 及数论方面都作出了重要的贡献, 近百余年来, 数学中的许多成就都直接或间接地溯源于他的工作, 他是对分析数学产生全面影响的数学家之一.

柯西(1789 – 1857)

柯西，A.-L.

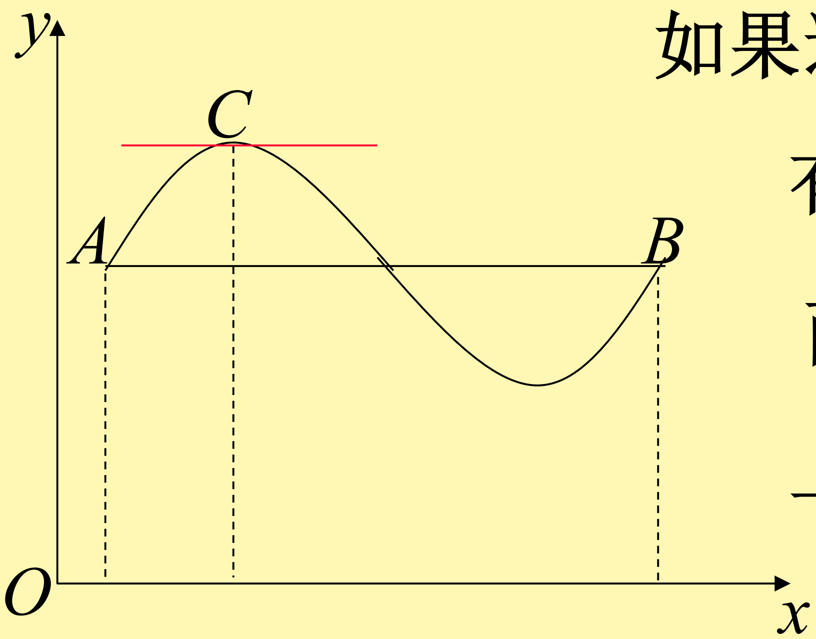
法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学, 复变函数和微分方程方面. 一生发表论文800余篇, 著书 7 本, 《柯西全集》共有 27 卷. 其中最重要的的是为巴黎综合学校编写的《分析教程》,《无穷小分析概论》,《微积分在几何上的应用》 等, 有思想有创建, 对数学的影响广泛而深远. 他是经典分析的奠基人之一, 为微积分所奠定的基础推动了分析的发展.

费马引理的几何意义：若 $y=f(x)$在以 x_0为中心的某邻域内有定义，$f(x_0)$是最值且 $f'(x_0)$存在，则曲线 $y=f(x)$在点 $(x_0，f(x_0))$处有平行于 x轴的切线。



Back

Rolle 定理的几何意义



如果连续曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线，且两端点的纵坐标相等，则 $\overset{\frown}{AB}$ 上至少存在一异于A、B 的点 C，使 $\overset{\frown}{AB}$ 在该点的切线平行于 x 轴（平行于弦AB）

Back

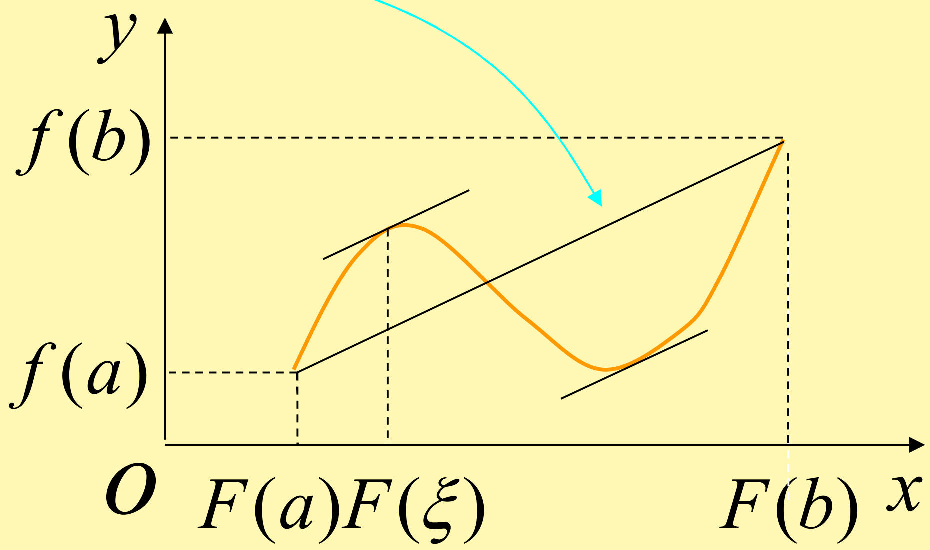
柯西定理的几何意义:

Back

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}} = \boxed{\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}}$$

弦的斜率　　切线的斜率

$$\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$



注意到: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{f'(t)}{F'(t)}$

3.2 洛必达法则

3.2.1、$\dfrac{0}{0}$ 型未定式

3.2.2、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

3.2.3、其他未定式

若当$x \to a$(或$x \to \infty$)时，函数$f(x)$和$F(x)$都趋于零或都趋于无穷大，那么极限$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{F(x)}$可能存在，也可能不存在. **通常称这种极限为未定式.** 为了叙述方便，

习惯上用记号 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 来表示这种未定式.

本节中,我们将利用柯西中值定理来推出求这类极限的一种简便而比较有效的方法。

3.2.1、$\frac{0}{0}$ 型未定式

定理 3.2.1 (L'Hospital 法则)

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$

2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a)$ 内可导, 且 $F'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

定理条件: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a)$内可导,且 $F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

证: 无妨假设 $f(a)=F(a)=0$, 在指出的邻域内任取 $x\neq a$, 则 $f(x), F(x)$ 在以 x, a 为端点的区间上满足柯西定理条件, 故

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\quad (\xi \text{在} x, a \text{之间})$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\overset{3)}{=\!=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

洛必达法则 $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}}$

注 1. 定理中 $x\to a$ 换为

$x\to a^+$， $x\to a^-$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$

之一， 条件 2) 作相应的修改，结论仍然成立.

2. 若 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型，且 $f'(x), F'(x)$ 仍满足定理的条件，则

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\frac{f''(x)}{F''(x)}$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{2x}(\alpha\neq 0)$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-b^{x}}{x}(a\neq b>0)$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}\ln a-b^{x}\ln b}{1}=\ln\dfrac{a}{b}$.

例3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

$\dfrac{0}{0}$ 型

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

$=\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2}+1}=1$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

$\dfrac{0}{0}$ 型

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$$

注意：不是未定式不能用洛必达法则！

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}\neq\lim_{x\to 1}\frac{6}{6}=1$$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\sin x}$.

$\dfrac{0}{0}$ 型

解: 注意到 $\sin x \sim x$

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

注：洛必达法则是求未定式极限的较有效的方法，但要

与其他求极限的方法结合使用。例如，能化简时尽量

化简，运用等价无穷小替换或重要极限等可简化运算

3.2.2、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 3.2.2 (L'Hospital 法则)

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a)$内可导，且 $F'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

例6. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\ (n>0)$.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$

例7. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}\ (n>0,\lambda>0)$.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

解: (1) n 为正整数的情形.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$$

Back

(2) n 不为正整数的情形.

令 $k=[n]+1$

则 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}}{\lambda^k e^{\lambda x}}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=0$$

例6, 例7 表明 $x \to +\infty$ 时,

$$\ln x,\quad x^n\ (n>0),\quad e^{\lambda x}\ (\lambda>0)$$

后者比前者趋于 $+\infty$ 更快.

关于洛必达法则的说明

1) 洛必达法则不是万能的。例如, 用洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

但 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

2) 当 $\lim \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在 $(\neq \infty)$ 时, $\lim \dfrac{f(x)}{F(x)}$ 不一定不存在。

例如, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\cos x}{1}$

$\|$ $\qquad$ 极限不存在

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x}) = 1$

3.2.3、其他未定式: $\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$型

解决方法:

$$\boxed{\infty-\infty}\xrightarrow[\boxed{\text{转化}}]{\text{通分}}\begin{cases}\boxed{\dfrac{0}{0}}\\[2ex]\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}\end{cases}\xleftarrow[\boxed{\text{转化}}]{\text{取倒数}}\boxed{0\cdot\infty}\xleftarrow[\boxed{\text{转化}}]{\text{取对数}}\begin{cases}\boxed{0^0}\\ \boxed{1^\infty}\\ \boxed{\infty^0}\end{cases}$$

例8. 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x\quad(n>0).$

$\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-n}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-n\,x^{-n-1}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=0$$

Back

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\frac{0}{0}} & & & \boxed{0^0} \arrow[dl] \\
\boxed{\infty-\infty} \arrow[ur, "通分"] \arrow[dr, "转化"'] & & \boxed{0\cdot\infty} \arrow[ul, "取倒数"'] \arrow[dl, "转化"] & \arrow[l, "取对数", "转化"'] & \boxed{1^\infty} \arrow[l] \\
 & \boxed{\frac{\infty}{\infty}} & & & \boxed{\infty^0} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

例9. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

$\boxed{\infty-\infty\text{型}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

$$\boxed{\infty-\infty}\ \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}}\ \boxed{\dfrac{0}{0}},\ \boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}\ \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}}\ \boxed{0\cdot\infty}\ \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}}\ \boxed{0^0},\ \boxed{1^\infty},\ \boxed{\infty^0}$$

例10. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

$\boxed{0^0\text{型}}$

解: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$

利用 例8

$$= e^0 = 1$$

内容小结

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

洛必达法则

令 $y = f^g$

取对数

$\frac{0}{0}$ 型

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$\infty - \infty$ 型

$0 \cdot \infty$ 型

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g} \cdot \frac{1}{f}}$$

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$$

思考与练习

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$

分析：原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \dfrac{1}{2}(3+0)$

$\boxed{\ln(1+x) \sim x}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=$ $\frac{1}{6}$

分析：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$\boxed{\sin x\sim x}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0}\cos x=1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$

$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$

洛必达(1661 – 1704)

法国数学家, 他著有《无穷小分析》(1696), 并在该书中提出了求未定式极限的方法, 后人将其命名为“洛必达法则”.他在15岁时就解决了帕斯卡提出的摆线难题, 以后又解决了伯努利提出的“最速降线”问题,在他去世后的1720年出版了他的关于圆锥曲线的书.

3.3 泰勒 (Taylor)公式

3.3.1、泰勒(Taylor)多项式

3.3.2、泰勒(Taylor)定理

3.3.3、几个初等函数的麦克劳林公式

3.3.1、泰勒(Taylor)多项式

为了便于研究，往往希望用一些简单的函数来近似表达较复杂的函数. 多项式函数是较简单的一种函数，因此人们常用多项式来近似表达函数.

前面讲微分时，我们用一次多项式近似表达函数：

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0, \ |x - x_0| << 1)$$

在 x_0处,右边的一次多项式及其一阶导数的值，分别等于被近似表达的函数及其导数的相应值

缺点：精确度不够高，不能估计误差的大小.

设想: 用较高次多项式$p_n(x)$近似表示$f(x)$, 使得$p_n(x)$在点x_0处与$f(x)$有相同的函数值、一阶导数值、直至n阶导数值，并设法找出误差公式。

设 $p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$

则 $a_0=p_n(x_0)=f(x_0)$， $a_1=p_n'(x_0)=f'(x_0)$,

$$p_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$p_n''(x)=2!a_2+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$a_2=\frac{1}{2!}p_n''(x_0)=\frac{1}{2!}f''(x_0),$$

....

返回

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

$$a_n = \frac{1}{n!} p_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

故

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

此式称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒多项式 .

上一页

3.3.2、泰勒(Taylor)定理

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数, 则当 $x\in(a,b)$ 时, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x) \quad ①$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间) ②

公式 ① 称为 $f(x)$ 的带有 拉格朗日型余项 的 n 阶泰勒公式 .

公式 ② 称为 n 阶泰勒公式的 拉格朗日型余项

返回

注:

(1) 当 $n=0$ 时, 泰勒公式 变为 拉格朗日中值公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

(2) 由泰勒公式可知，用多项式 $p_n(x)$近似表达函数 $f(x)$时，其误差为$|R_n(x)|$. 如果对于某个固定的 n,当 $x\in(a,b)$时 $|f^{(n+1)}(x)|\le M$，则有误差估计式 $|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$

$$\therefore\ R_n(x)=o[(x-x_0)^n] \quad (x\to x_0)$$

返回

NJUPT

注意到 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ ③

在不需要余项的精确表达式时, 泰勒公式 可写为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n] \quad ④$$

公式 ③ 称为 n 阶泰勒公式的 佩亚诺(Peano)型余项.

公式④ 称为带有 佩亚诺型余项 的 n 阶泰勒公式

在泰勒公式①中若令 $x_0=0,\ \xi=\theta x\ \ (0<\theta<1)$,则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为带有 拉格朗日型余项的麦克劳林（Maclaurin）公式

类似地，可以写出带有 佩亚诺型余项的 麦克劳林公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$$

返回

3.3.3、几个初等函数的 麦克劳林 公式

(1) $f(x)=e^x$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=e^x, \quad f^{(k)}(0)=1 \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$

如果取 $x=1$, 则可计算无理数 e 的近似值。

返回

(2) $f(x)=\sin x$ 麦克劳林

$$\because \quad f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(k)}(0)=\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & k=2m \\ (-1)^{m-1}, & k=2m-1\end{cases} \quad (m=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$$

其中 $R_{2m}(x)=\dfrac{(-1)^m\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1} \quad (0<\theta<1)$

(3) $f(x)=\cos x$ 麦克劳林

类似可得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!} x^{2m+2} \quad (0<\theta<1)$$

返回

(4) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$ 麦克劳林

已知 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1,2,\cdots)$

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

所以

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0<\theta<1)$$

$$(5)\quad f(x)=(1+x)^{\alpha}\qquad (x>-1)$$

麦克劳林

$$\because\quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\ \ (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

$$\therefore\quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$$(0<\theta<1)$$

例1 求 e^{-x^2} 的麦克劳林展式。

间接展开法

解 $\because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$$\therefore e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + o(x^{2n})$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + o(x^{2n})$$

例2 将 $f(x)=x^3-2x+5$ 按 $x-1$ 的乘幂展开。

解：$f(1)=4,\quad f'(1)=(3x^2-2)\big|_{x=1}=1$

$$f''(1)=6x\big|_{x=1}=6,\quad f'''(1)=6,$$

$$f^{(4)}(x)=0$$

$$f(x)=4+(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$$

Taylor

例3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解: $\because\quad e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\therefore\quad e^{x^2}+2\cos x-3=(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x^4+o(x^4)$$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{12})x^4+o(x^4)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{7}{12}$

内容小结

1. 泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o[(x-x_0)^n]$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

当 $x_0=0$ 时为 麦克劳林公式.

2. 常用函数的麦克劳林公式

$$e^x,\quad \sin x,\quad \cos x,\quad \ln(1+x),\ (1+x)^{\alpha}$$

泰勒 (1685 – 1731)

英国数学家, 他早期是牛顿学派最优秀的代表人物之一， 重要著作有:

《正的和反的增量方法》**(1715)**

《线性透视论》**(1719)**

他在**1712** 年就得到了现代形式的泰勒公式.

他是有限差分理论的奠基人.

泰勒. B

麦克劳林 (1698 – 1746)

英国数学家，著作有:

《流数论》**(1742)**

《有机几何学》**(1720)**

《代数论》**(1742)**

在第一本著作中给出了后人以他的名字命名的麦克劳林级数.

3.4 函数的单调性和极值

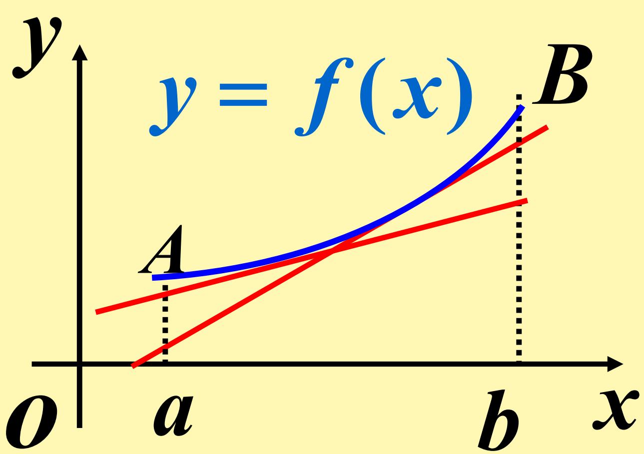
3.4.1、函数单调性的判定法

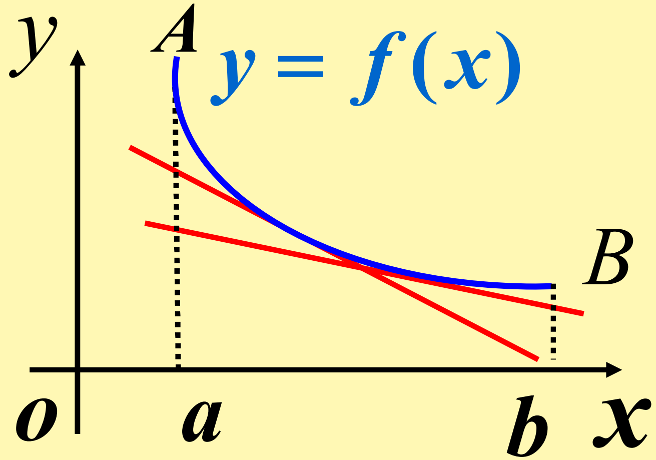
3.4.2、函数的极值及其求法

3.4.3、最大值与最小值问题

3.4.1、 函数单调性的判定法

如图所示





单调 递增

曲线上各点处的切线的 斜率 是 非负 的

单调 递减

曲线上各点处的切线的 斜率 是 非正 的

定理 3.4.1.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，在 (a,b) 内可导。

若 $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$上单调递增 (递减).

证: 不妨设 $f'(x)>0$, $x\in(a,b)$,任取 x_1，$x_2\in[a,b]$ $(x_1<x_2)$

由 拉格朗日中值定理 得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\ >0$$

$$\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$$

故 $f(x_1)<f(x_2)$. 这说明 $f(x)$在 $[a,b]$上单调递增。

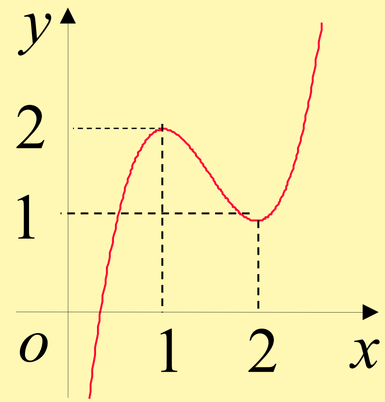
例1. 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

返回

解: $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=1,\ x=2$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$



故 $f(x)$的单调增区间为 $(-\infty,1]$, $[2,+\infty)$;

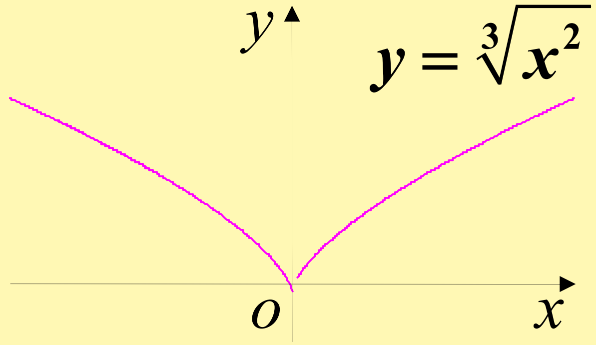
$f(x)$的单调减区间为 $[1,2]$.

说明:

1) 单调区间的分界点除 驻点 外,也有可能是 导数不存在的点.

例如, $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$

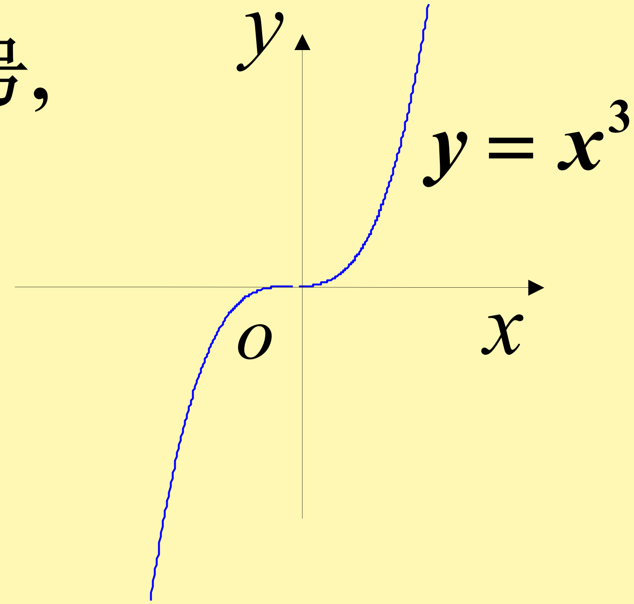
$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \qquad y'\big|_{x=0}=\infty$$



2) 如果函数在某驻点两边导数同号,
则函数的单调性不改变.

例如, $y=x^3$, $x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=3x^2 \qquad y'\big|_{x=0}=0$$



讨论函数的单调性可按下列步骤进行:

(1) 确定连续函数 $y=f(x)$ 的定义域;

(2) 求出 $f'(x)$,用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点,

将定义域划分成若干子区间;

(3) 判断 $f'(x)$ 在每个子区间内的符号, 就可以确定

出函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

例2. 证明 $x>0$ 时，成立不等式 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$

证：令 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right]>0$$

因此$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加，从而当$x>0$时$f(x)>f(0)$,

而 $f(0)=0$，故 $f(x)>f(0)=0$，即 $1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0.$

亦即 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$

3.4.2、函数的极值及其求法

定义3.4.1: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，$\boldsymbol{x_0 \in (a,b)}$，

若存在 x_0 的一个邻域，在其中当 $\boldsymbol{x \neq x_0}$ 时，

(1) $\boldsymbol{f(x) < f(x_0)}$， 则称 $\boldsymbol{x_0}$ 为 $\boldsymbol{f(x)}$ 的极大值点。

称 $f(x_0)$ 为函数的 极大值;

(2) $\boldsymbol{f(x) > f(x_0)}$， 则称 $\boldsymbol{x_0}$ 为 $\boldsymbol{f(x)}$ 的极小值点。

称 $f(x_0)$ 为函数的 极小值.

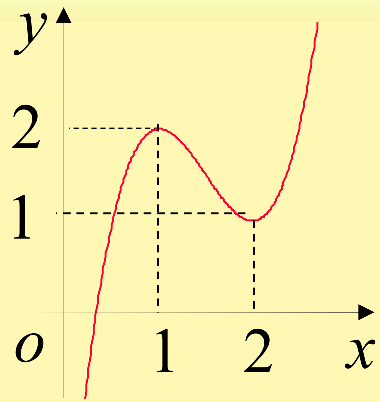
极大值点 与 极小值点 统称为 极值点，

极大值 与 极小值 统称为 极值。

NJUPT

例如 (例1)

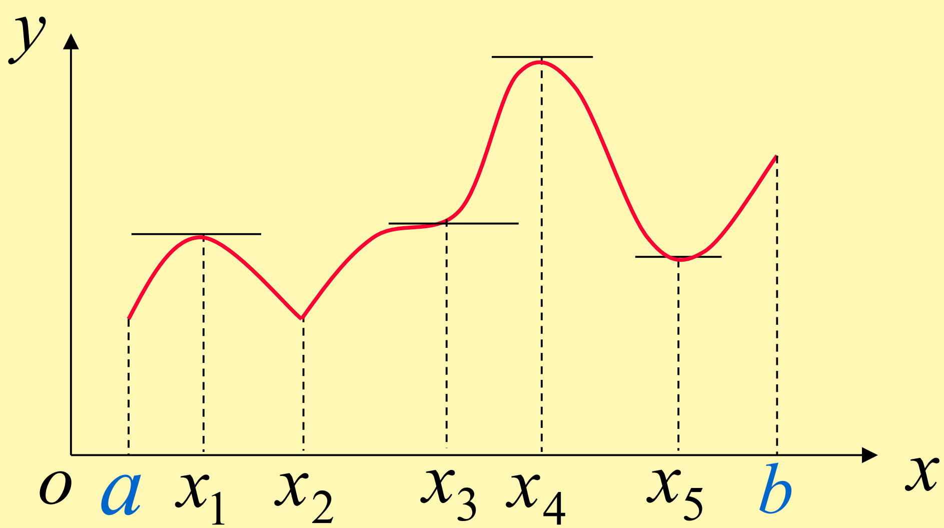
$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$$



$x=1$ 极大值点， $f(1)=2$ 是极大值

$x=2$ 极小值点， $f(2)=1$ 是极小值

注意：函数的 极值 是函数的 局部性质.



x_1, x_4 为极大值点

x_2, x_5 为极小值点

x_3 不是极值点

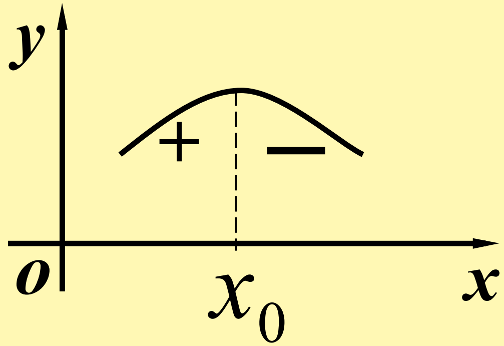
定理 3.4.2（第一充分条件）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续，且在空心邻域内有导数.

(1) 如果 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x)>0$，

而 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，

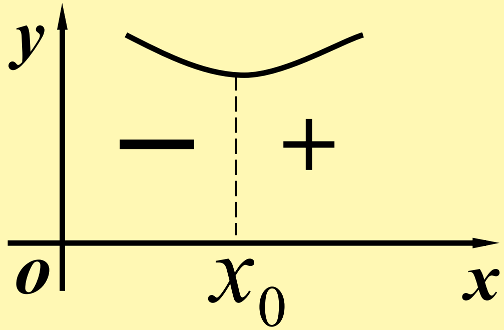
则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值。



(2) 如果 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x)<0$，

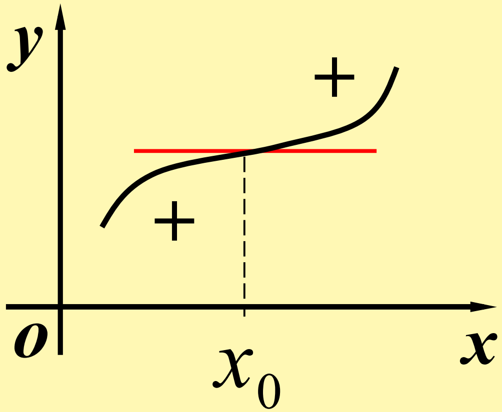
而 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，

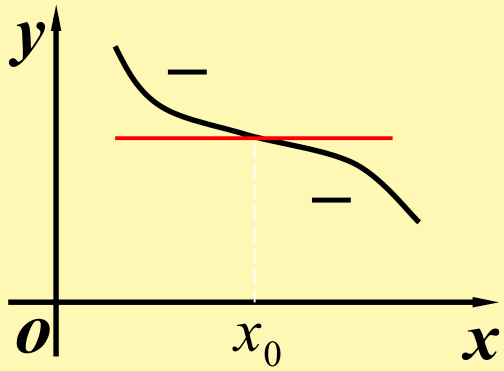
则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值。



(3)如果 $x\in U^0(x_0,\delta)$ 时, $f'(x)$ 的符号保持不变, 则 $f(x)$ 在

$\boldsymbol{x=x_0}$ 处没有极值。





求极值的步骤:

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求出方程 $f'(x)=0$ 的根和$f'(x)$不存在的点;

(3) 检查 $f'(x)$ 在驻点或不可导点的左右的正负号,

若异号，判断是极大值还是极小值;

(4) 求极值.

例3. 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解: 1) 求导数 $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$

2) 求极值可疑点

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=\frac{2}{5}$; $x_2=0$为不可导点。

3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	$\nearrow$

$\therefore x=0$ 是极大值点,其极大值为 $f(0)=0$

$x=\frac{2}{5}$ 是极小值点,其极小值为 $f(\frac{2}{5})=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$

定理3.4.3 (第二充分条件) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数, 且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$

(1) 若 $f''(x_0)<0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 取极大值;

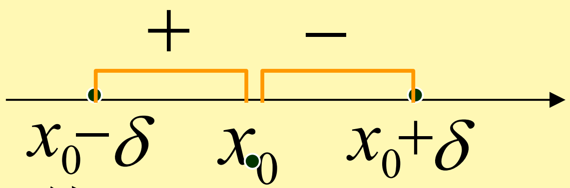
(2) 若 $f''(x_0)>0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 取极小值.

证: (1) $$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}$$

由 $f''(x_0)<0$ 知,存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

故当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, $f'(x)>0$;

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, $f'(x)<0$,



由 第一充分条件 知 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) 类似可证.

返回

定理 3.4.3 表明，如果函数 $f(x)$在驻点 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0)\neq 0$，那么该驻点 x_0 一定是极值点，并且可以按照二阶导数 $f''(x_0)$的符号来判定 $f(x_0)$是极大值还是极小值.

但是，如果 $f''(x_0)=0$，定理 3.4.3 就不能应用，

事实上，当 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$时，$f(x)$在 x_0 处可能有极大值，也可能有极小值，也可能没有极值。

例如，$f_1(x)=-x^4, f_2(x)=x^4, f_3(x)=x^3$ 在 $x=0$处分别有极大值、极小值、没有极值.

因此，如果函数在驻点处的二阶导数为零，那么还得用第一充分条件来判定。

例4. 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解: 1) 求导数

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2,\qquad f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$$

2) 求驻点

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$

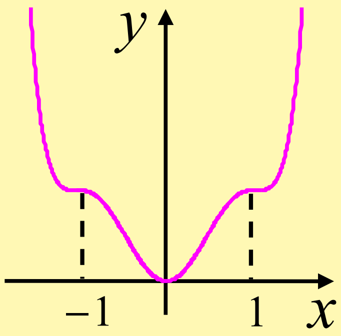
3) 判别

因 $f''(0)=6>0$, 故 $f(0)=0$ 为极小值;

因 $f''(-1)=f''(1)=0$, 故需用 第一充分条件 判别.

由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm 1$ 附近不变号,

$\therefore f(x)$ 在 $x=\pm 1$ 没有极值.



例5. 试问 a 为何值时，$f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{2}{3}\pi$ 时取得极值，求出该极值，并指出它是极大还是极小值。

解：$\because \quad f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，由题意应有

$$f'(\frac{2}{3}\pi)=a\cos(\frac{2}{3}\pi)+\cos 3(\frac{2}{3}\pi)=0$$

$$\therefore \quad a=2$$

又 $\because \quad f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$，$f''(\frac{2}{3}\pi)<0$

所以 $f(\frac{2}{3}\pi)=\sqrt{3}$ 为极大值

3.4.3、最大值与最小值问题

情形 1: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

则其最值只能在端点、导数不存在的点或驻点处取得.

求函数最值的方法:

(1)求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的最值可疑点(各驻点或不可导点)

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,x_m$$

(2) 最大值

$$M=\max\{f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,f(x_m),\ f(a),\ f(b)\}$$

最小值

$$m=\min\{f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

例6. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 上的最大值和最小值.

解: 显然 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 连续,

$$f(x)=\begin{cases}-(2x^3-9x^2+12x), & -\frac{1}{4}\le x\le 0\\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\le x<0\\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(-\frac{1}{4},\frac{5}{2})$ 内有最值可疑点 $x_1=0, x_2=1, x_3=2$

$f(-\frac{1}{4})=3\frac{19}{32}$, $f(0)=0$, $f(1)=5$, $f(2)=4$, $f(\frac{5}{2})=5$

故函数在 $x=0$ 取最小值 0; 在 $x=1$ 及 $\frac{5}{2}$ 取最大值 5.

情形 2: 当$f(x)$在区间内可导且只有 一个驻点 时,

若在此点取极大 (小)值 , 则也是最大(小)值.

情形 3:

在应用问题 中,往往根据问题的性质就可以判断可导函数 $f(x)$ 确有最大值或最小值,而且一定在定义区间内部取得,

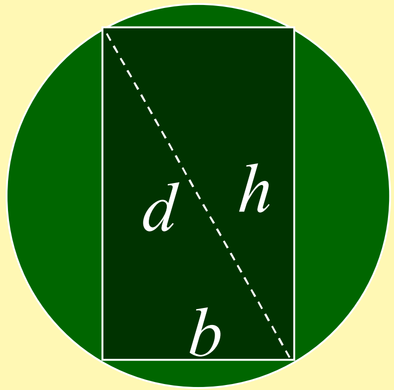
这时如果函数$f(x)$在区间内部只有一个驻点 x_0时， 就可以判定 $f(x_0)$ 是最大值或最小值.

例7. 把一根直径为 d 的圆木锯成矩形梁, 问矩形截面的高 h 和宽 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解: 由力学知识知矩形梁的 抗弯截面模量 为

$$w = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} b (d^2 - b^2), \quad b \in (0, d)$$

令 $w' = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2) = 0$ 得 $b = \sqrt{\frac{1}{3}}\, d$



由实际意义可知, 所求最值存在

且在区间内部取得,

而在区间内部只有一个驻点, 故 $b = \sqrt{\frac{1}{3}}\, d$ 时最大。

此时 $h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, d$ 即 $d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$

内容小结

1. 可导函数单调性的判别

$f'(x)>0,\ x\in I \longrightarrow f(x)$ 在 I 上单调递增

$f'(x)<0,\ x\in I \longrightarrow f(x)$ 在 I 上单调递减

2. 函数的极值

(1) 极值可疑点: 驻点 和 导数不存在的点

(2) 第一充分条件

$f'(x)$ 过 x_0 由正变负 $\longrightarrow f(x_0)$ 为极大值

$f'(x)$ 过 x_0 由负变正 $\longrightarrow f(x_0)$为极小值

(3) 第二充分条件

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极大值

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极小值

3. 连续函数的最值

最值点 应在 端点、导数不存在的点 和 驻点 上找;

应用题可根据问题的实际意义判别.

思考与练习

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在点 a 处(B).

(A) $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a)\neq 0$;

(B) $f(x)$ 取得极大值; (C) $f(x)$ 取得极小值;

(D) $f(x)$ 的导数不存在.

提示: 利用极限的保号性.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ (D).

(A) 不可导;

(B) 可导, 且 $f'(0)\neq 0$;

(C) 取得极大值;

(D) 取得极小值.

提示: 利用极限的保号性.

3. 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解,若 $f(x_0) > 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 (A)

(A) 取得极大值;

(B) 取得极小值;

(C) 某邻域内单调增加;

(D) 某邻域内单调减少.

提示: 将 $f(x)$ 代入方程, 令 $x = x_0$, 得

$$f''(x_0) = -4f(x_0) < 0$$

3.5 曲线的凹凸性、渐近线及函数图形的描绘

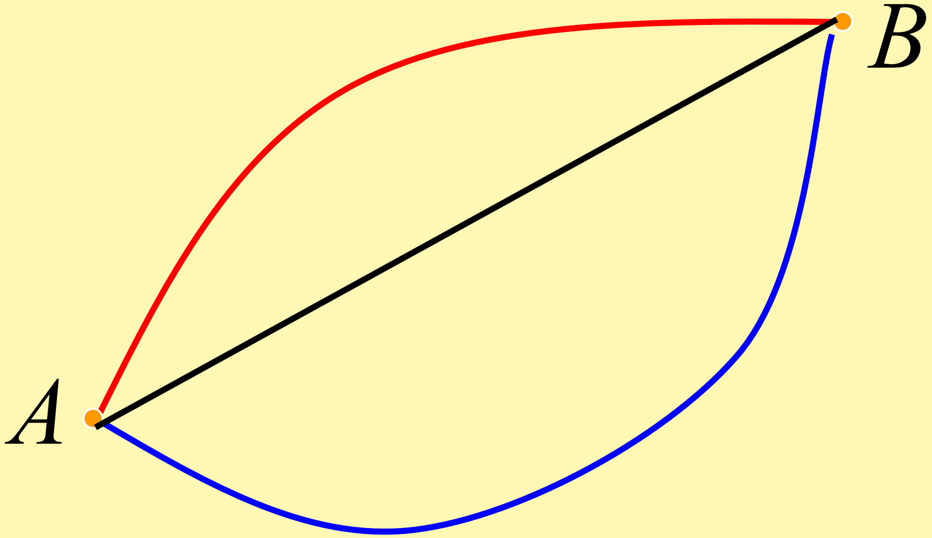
3.5.1、 曲线的凹凸性与拐点

3.5.2、 曲线的渐近线

3.5.3、 函数图形的描绘

3.5.1、曲线的凹凸性与拐点

如图所示



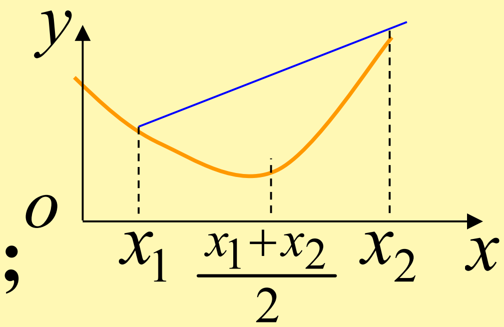
如果弧**AB**位于所张弦**AB**的下方,我们称曲线**AB**呈凹形.

如果弧**AB**位于所张弦**AB**的上方,我们称曲线**AB**呈凸形.

定义 3.5.1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, $\forall x_1 \neq x_2 \in I$,

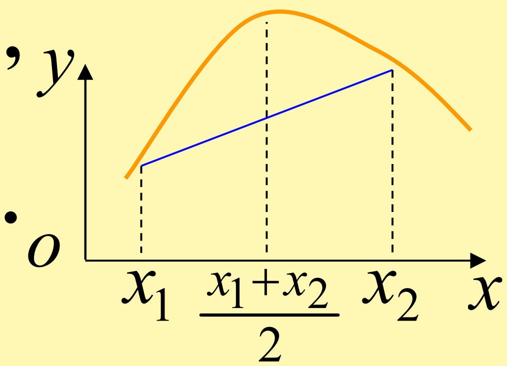
(1) 若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凹的;

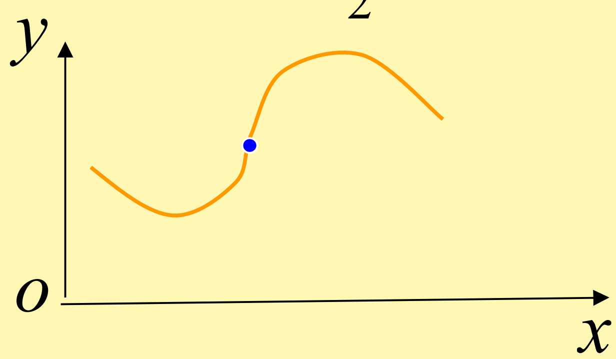


(2) 若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凸的.



如果连续曲线 $y = f(x)$ 在经过点 $(x_o, f(x_0))$ 时凹凸性发生改变，则称点 $(x_o, f(x_0))$ 为该曲线的拐点。



返回

定理3.5.1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数

(1) 若在 I 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$在 I 内的图形是凹的;

(2) 若在 I 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$在 I 内的图形是凸的.

证: $\forall x_1, x_2 \in I$, 利用一阶 泰勒公式 可得

$$f(x_1)=f(\frac{x_1+x_2}{2})+f'(\frac{x_1+x_2}{2})(x_1-\frac{x_1+x_2}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-\frac{x_1+x_2}{2})^2$$

$$f(x_2)=f(\frac{x_1+x_2}{2})+f'(\frac{x_1+x_2}{2})(x_2-\frac{x_1+x_2}{2})+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-\frac{x_1+x_2}{2})^2$$

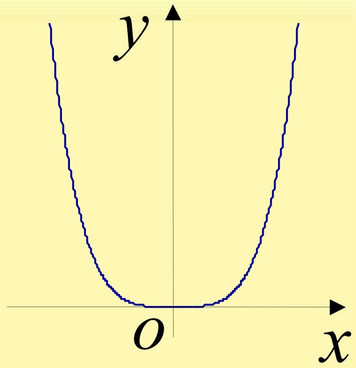
$\downarrow$ 两式相加

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(\frac{x_1+x_2}{2})\quad+\underline{\frac{1}{2!}(\frac{x_2-x_1}{2})^2[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]}$$

当$f''(x)>0$时, $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$, 说明 **(1)** 成立;

$<$ $<$ **(2)**

例1. 判断曲线 $y = x^4$ 的凹凸性.



解: $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$

当 $x \neq 0$ 时, $y'' > 0$; $x = 0$ 时, $y'' = 0$,

故曲线 $y = x^4$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是向上凹的.

说明: 若在某点二阶导数为 0, 但在其两侧二阶导数

不变号,则曲线的凹凸性不变.

求曲线拐点的步骤如下:

1.求 $f''(x)$;

2. 令 $f''(x)=0$, 求出该方程在区间 I 内的实根,并求出 I内 $f''(x)$ 不存在的点;

3.对于2中求出的一切根以及二阶导数不存在的点 x_0,

检验它们左右两侧 $f''(x)$ 的符号.当两侧的符号相反时,

点 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点;

当两侧的符号相同时,

点 $(x_0, f(x_0))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点.

NJUPT

例2. 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

解: 1) 求 y''

$$y'=12x^3-12x^2, \quad y''=36x^2-24x=36x(x-\frac{2}{3})$$

2) 求拐点可疑点坐标

令 $y''=0$ 得 $x_1=0, x_2=\frac{2}{3}$, 对应 $y_1=1, y_2=\frac{11}{27}$

3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凹	1	凸	$\frac{11}{27}$	凹

故该曲线在 $(-\infty, 0]$ 及 $[\frac{2}{3}, +\infty)$ 上向上凹, 在 $[0, \frac{2}{3}]$ 上向上凸, 点 $(0, 1)$ 及 $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$ 均为拐点.

例3. 求曲线 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & x\ge 0\\ -\dfrac{x^2}{2} & x<0\end{cases}$ 的凹凸区间及拐点.

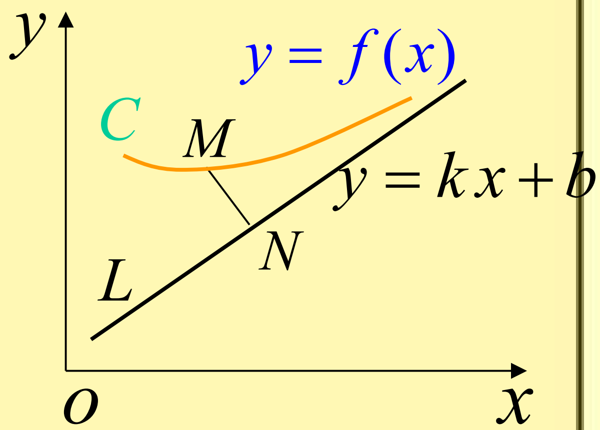
解： 容易求得

$$f'(x)=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}\qquad f''(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$f''(0)$不存在，但区间 $(-\infty,0]$ 为函数的凸区间，区间 $[0,+\infty)$ 为函数的凹区间，故点 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$的拐点。

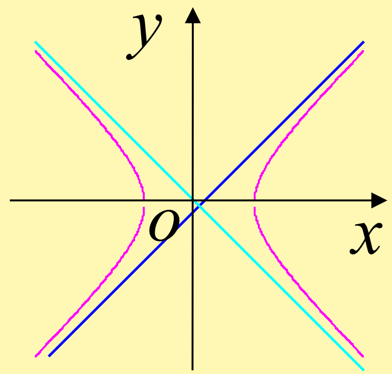
3.5.2、 曲线的渐近线

定义 3.5.2 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线.



例如，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

有渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$



但抛物线 $y=x^2$ 无渐近线.

(1). 水平与铅(垂)直渐近线

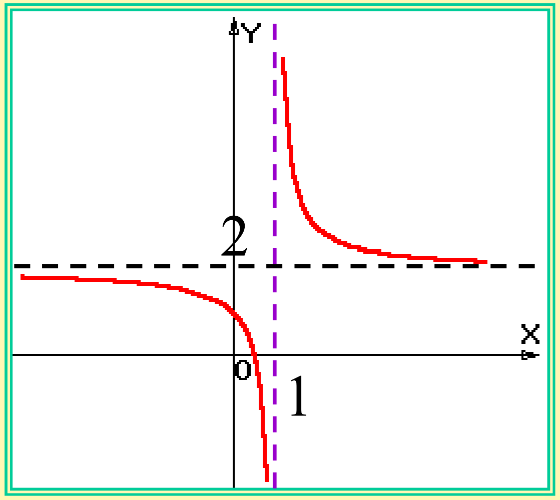
若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

(或 $x\to-\infty$)

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则曲线 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=x_0$.

(或 $x\to x_0^-$)

例4. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的渐近线.



解: $\because\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=2$

$\therefore\ y=2$ 为水平渐近线;

$\because\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=\infty$，$\therefore\ x=1$ 为垂直渐近线.

(2). 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$，则曲线 $y=f(x)$ 有
$(\text{或}\, x\to-\infty)$
斜渐近线 $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right]$$

$$\boxed{\therefore\quad k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}$$

$(\text{或}\, x\to-\infty)$

$$\boxed{b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]\quad (\text{或}\, x\to-\infty)}$$

例5. 求曲线 $y = \dfrac{5x^3}{x^2 + 2x - 3}$ 的渐近线.

解: $\because\ y = \dfrac{5x^3}{(x+3)(x-1)}$, $\lim\limits_{x \to -3} y = \infty$,

(或 $x \to 1$)

所以有铅直渐近线 $x = -3$ 及 $x = 1$

又因为 $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^2}{x^2 + 2x - 3} = 5$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - 5x] = \lim_{x \to \infty} \frac{-10x^2 + 15x}{x^2 + 2x - 3} = -10$$

$\therefore\ y = 5x - 10$ 为曲线的斜渐近线.

3.5.3、函数图形的描绘

步骤:

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域, 及函数的某些特性（如奇偶性、周期性等）；

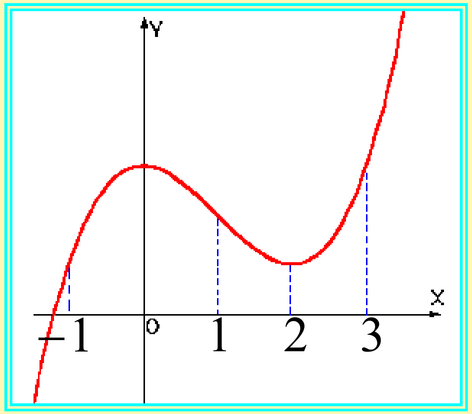
2. 求 $f'(x)$, $f''(x)$, 并求出 $f'(x)$及 $f''(x)$为 0 和不存在的点及函数的间断点，用这些点把函数的定义域划分成几个部分区间;

3. 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数图形的升降和凹凸，极值点和拐点;

4. 求渐近线; 5. 确定某些特殊点, 描绘函数的图形。

例6. 描绘 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ 的图形.

解: 1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 无奇偶性及周期性.



2) $y'=x^2-2x=x(x-2)$, $y''=2x-2$,

令 $y'=0$, 得 $x=0$, 2

令 $y''=0$, 得 $x=1$

3)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y		2		$\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$	
		(极大值)		(拐点)		(极小值)	

4)

x	0
y	2

例7. 描绘函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解: 1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 偶函数.

2) 求关键点

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}},\quad y''=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$; 令 $y''=0$ 得 $x=\pm1$

3) 判别曲线形态

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	

(极大值)　　　　(拐点)

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	

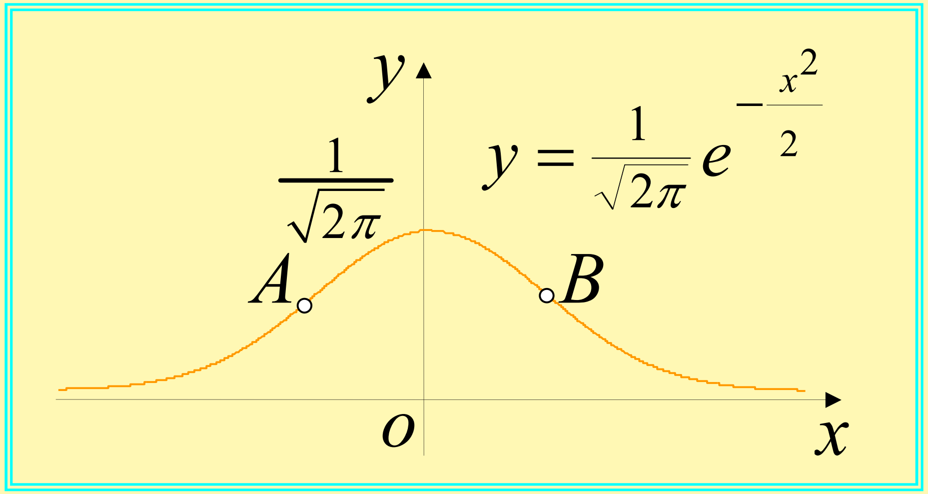
(极大值)　　　　(拐点)

4) 求渐近线

$$\lim_{x\to\infty} y = 0$$

$\therefore$ **$y = 0$ 为水平渐近线**

5) 作图



内容小结

1.曲线凹凸与拐点的判别

$f''(x) > 0, x \in I \longrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向上凹

$f''(x) < 0, x \in I \longrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向上凸

拐点 — 连续曲线上凹凸的分界点

2. 曲线渐近线的求法

水平渐近线； 垂直渐近线； 斜渐近线

3. 函数图形的描绘 ——— 按作图步骤进行

思考与练习

曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ D ）

(A) 没有渐近线； (B) 仅有水平渐近线；

(C) 仅有铅直渐近线；

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

提示: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$