第四章　不定积分

求导运算：$F'(x) = (\ ?\ )$

不定积分运算：$(\ ?\ )' = f(x)$

$\left.\begin{array}{l} \text{求导运算：} F'(x) = (\ ?\ ) \\ \text{不定积分运算：} (\ ?\ )' = f(x) \end{array}\right\}$ 互逆运算

第一节 不定积分的概念与性质

一、原函数的概念

二、不定积分的概念

三、基本积分公式 (一)

四、不定积分的线性运算性质

一、 原函数的概念

定义 1. 若在区间 I 上，函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x)$，

即对任意的 $x \in I$，都有 $F'(x) = f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$，

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例如 $(\sin x)' = \cos x$， 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$， 故 $\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一个原函数

问题: 1. 在什么条件下，一个函数的原函数存在?

2. 若原函数存在，原函数是否唯一？若不唯一，那么究竟有多少个?

定理1(原函数的存在定理) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在 I 上存在原函数.　(下章证明)

初等函数在其定义区间上连续 $\Longrightarrow$

初等函数在其定义区间上有原函数

定理2(原函数的性质)

(1) 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数, C 为任意常数.

证: $\because\ (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$

$\therefore F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的原函数

(2) $f(x)$ 的其他原函数与 $F(x)$ 只相差一个常数

证: 设 $\Phi(x)$是 $f(x)$的任一原函数,

即 $\Phi'(x)=f(x)$ 又因为 $F'(x)=f(x)$

$$\therefore\quad [\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

故 $\Phi(x)-F(x)=C_0$ (C_0 为某个常数)

二、不定积分的概念

定义 2. $f(x)$ 在区间 I 上原函数的全体称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分, 记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$, 其中

$\int$ — 积分号　　$f(x)$ — 被积函数

x — 积分变量　$f(x)\mathrm{d}x$ — 被积表达式

C 称为 积分常数
不可丢 ！

若 $F'(x) = f(x)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$ （ C 为任意常数 ）

例如，$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$　$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$

$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$$

一般地，$\int x^\mu \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C, \mu \neq -1$是常数

例 1. 求 $\int \frac{1}{x} dx$

解：当 $x > 0$ 时，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$，

故在 $(0,+\infty)$ 内，$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

当 $x < 0$ 时，$[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$，

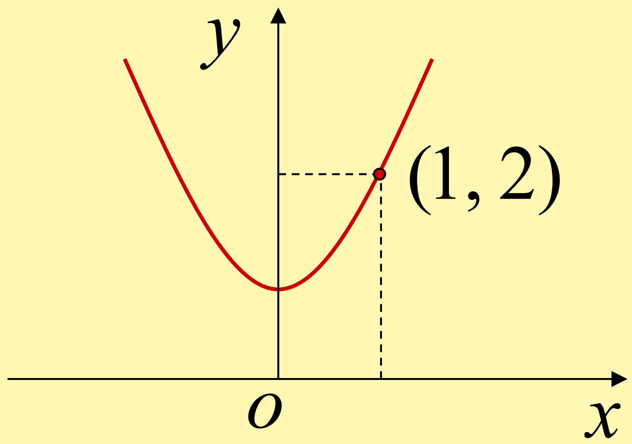
故在 $(-\infty,0)$ 内，$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$

综合起来有，$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$

例 2. 设曲线通过点 (1, 2), 且其上任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的 2 倍, 求此曲线的方程.

解: $\because \quad y' = 2x$

$\therefore \quad y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$



所求曲线过点（1 , 2）, 故有

$$2 = 1^2 + C \quad \therefore \quad C = 1$$

因此所求曲线为 $y = x^2 + 1$

微分与积分之间的关系:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int F'(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}\,F(x)=F(x)+C$

例 3 设 $\arctan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,求

$$f(x),\int f(x)dx,\int f'(x)dx.$$

解: $f(x)=(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2},\int f(x)dx=\arctan x+C,$

$$\int f'(x)dx=f(x)+C=\frac{1}{1+x^2}+C.$$

三、基本积分公式(一)

(1) $\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$ （k 为常数)

(2) $\int x^{\mu}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$ 或 $-\operatorname{arccot} x + C$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(6) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

(12) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$

(13) $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

(14) $\int \operatorname{sh} x \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$

(15) $\int \operatorname{ch} x \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

四、不定积分的线性运算性质

定理3. 设 $f(x), g(x)$ 的原函数存在, k, l 是常数, 则

$$\int [kf(x) + lg(x)]dx = k\int f(x)dx + l\int g(x)dx.$$

例 4 求 $\int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解:原式 $= \int x^{-\frac{1}{2}}(x^2-4x+4)\mathrm{d}x = \int (x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}x$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x - 4\int x^{\frac{1}{2}}dx + 4\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}} + C$$

例 5 $\int \frac{1+3x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x$.

解:原式 $= \int \frac{(1+x^2)+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{x} + 2\arctan x + C$$

例 6. 求 $\int(2^x+\tan^2 x)\mathrm{d}x$

解：原式 $=\int 2^x\mathrm{d}x+\int\tan^2 x dx$

$$=\int 2^x\mathrm{d}x+\int(\sec^2 x-1)dx$$

$$=\int 2^x\mathrm{d}x+\int\sec^2 x dx-\int dx$$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}+\tan x-x+C$$

注：检验积分结果是否正确，只要对结果求导，看它的导数是否等于被积函数。

例 7. 求 (1) $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x$.

解: (1) 原式 $= \int \frac{4}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = -4\cot x + C$

(2) 原式 $= \int \frac{4}{\sin^2 2x} \mathrm{d}x = -2\cot 2x + C$

或 原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$

$= \tan x - \cot x + C$

注：同一个函数的不定积分，可以通过不同的形式表达，但经过变形后应可以相互转化.

内容小结

1. 不定积分

- 原函数 与 不定积分 的定义
- 基本积分公式
- 不定积分的 线性运算 性质

2. 直接积分法:

利用 恒等变形, 积分性质 及 基本积分公式 进行积分.

常用的恒等变形方法 $\begin{cases} \text{分项积分} \\ \text{加项减项} \\ \text{利用三角公式，代数公式，}\cdots \end{cases}$

思考与练习

1. 若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数，则

$$\int x^2 f(\ln x)\,\mathrm{d}x = \underline{\quad -\frac{1}{2}x^2 + C \quad}$$

提示：$f(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$

$$f(\ln x) = -e^{-\ln x} = -\frac{1}{x}$$

2. 若 $f(x)$ 是 e^{-x} 的原函数，则

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \underline{\quad \frac{1}{x} + C_0 \ln|x| + C \quad}$$

提示：已知 $f'(x) = e^{-x}$

$$\therefore \quad f(x) = -e^{-x} + C_0$$

$$f(\ln x) = -\frac{1}{x} + C_0$$

$$\frac{f(\ln x)}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_0}{x}$$

3. 求不定积分 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^{x}+1}\mathrm{d}x$

解: $\int \frac{e^{3x}+1}{e^{x}+1}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{(e^{x}+1)(e^{2x}-e^{x}+1)}{e^{x}+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int (e^{2x}-e^{x}+1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}+x+C$$

第二节 换元积分法

一、第一类换元法 (凑微分法)

二、第二类换元法

换元法思想的来源—复合函数的微分法则

设 $F'(u)=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 可导，则有

$$\mathrm{d}F[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}F[\varphi(x)]$$

$$=F[\varphi(x)]+C=F(u)+C\Big|_{u=\varphi(x)}=\int f(u)\mathrm{d}u\Big|_{u=\varphi(x)}$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \underset{\text{第二类换元法}}{\overset{\text{第一类换元法}}{\rightleftarrows}} \int f(u)\mathrm{d}u$$

一、第一类换元法

定理1. 设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$， $u=\varphi(x)$ 可导，

则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u\Big|_{u=\varphi(x)} = F[\varphi(x)]+C$$

即 $\int f[\varphi(x)]\underline{\varphi'(x)\mathrm{d}x} = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)]+C$

凑微分法

如何应用第一类换元法？

设要求 $\int g(x)dx$,若函数 $g(x)$可化为

$g(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$的形式，

那么 $\int g(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$

这样，函数 $g(x)$的积分就转化为函数 $f(u)$的积分。如果能求得 $f(u)$的原函数，那么也就得到了 $g(x)$的原函数。

例1. 求 $\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int e^{x^2}\,\mathrm{d}(x^2)$

令 $u = x^2$

$$= \int e^u\,\mathrm{d}u$$

$$= e^u + C$$

$$= e^{x^2} + C$$

例2. 求 $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(1-x^2)$

令 $u=1-x^2$

$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

在对变量代换熟练以后，就不必写出中间变量 u 了

例3. 求 $\int \tan x\mathrm{d}x$

解: $\int \tan x\mathrm{d}x = \int \dfrac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

类似地

$$\int \cot x\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}$$

$$= \ln|\sin x| + C$$

例4. 求 $\int (ax+b)^m \mathrm{d}x \quad (m \neq -1, a \neq 0)$

解：原式 $= \frac{1}{a}\int (ax+b)^m \, \mathrm{d}(ax+b)$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{m+1}(ax+b)^{m+1}+C$$

$$= \frac{1}{a(m+1)}(ax+b)^{m+1}+C$$

注：当 $m=-1$ 时

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$$

例5. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$

想到公式

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan u + C$$

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(\frac{x}{a})^2}$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

例6. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}$

$$= \arcsin\frac{x}{a} + C$$

想到 $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$

例7. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$

解: $\because \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+a}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a} - \int \frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\ln|x-a| - \ln|x+a|\right] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

常用的凑微分形式:

(1) $$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b)$$

(2) $$\int f(x^n)x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\,\mathrm{d}x^n$$

(3) $$\int f(x^n)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x^n$$

(4) $$\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\,\mathrm{d}\sin x$$

(5) $$\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\,\mathrm{d}\cos x$$

(6) $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\ \mathrm{d}\tan x$

(7) $\int f(e^x)e^x\mathrm{d}x = \int f(e^x)\ \mathrm{d}e^x$

(8) $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\ \mathrm{d}\ln x$

例8. 求 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\,(1+2\ln x)}$

解: 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}\ln x}{1+2\ln x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+2\ln x)}{1+2\ln x}$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+2\ln x\right| + C$$

例9. 求 $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\mathrm{d}x$.

$$= \int \frac{1}{1+(e^x)^2}\mathrm{d}e^x$$

例10. 求 $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解: 原式 $= 2\int e^{3\sqrt{x}}\mathrm{d}\sqrt{x} = \frac{2}{3}\int e^{3\sqrt{x}}\mathrm{d}(3\sqrt{x})$

$$= \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}} + C$$

例11. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$

解法1

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}(1+e^x)}{1+e^x}$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C$$

解法2

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}$$

$$= -\ln(1+e^{-x}) + C$$

$-\ln(1+e^{-x}) = -\ln[e^{-x}(e^x+1)]$ 两法结果一样

例12 求 $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x,\ \int \cos^3 x\,\mathrm{d}x.$

解: $\because\quad \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (\dfrac{1+\cos 2x}{2})^2$

$$= \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2})$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)$$

$$\therefore\quad \int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}[\ \frac{3}{2}\int \mathrm{d}x+\int \cos 2x\,\mathrm{d}(2x)\ +\frac{1}{8}\int \cos 4x\,\mathrm{d}(4x)\ ]$$

$$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x\ +\frac{1}{32}\sin 4x\ +C$$

例13. 求 $\int \sin x \cos 3x \, \mathrm{d}x$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

例14. 求 $\int \sec^6 x\mathrm{d}x$

解: 原式 $= \int (\tan^2 x+1)^2$ $\mathrm{d}\tan x$

$$= \int (\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1)\,\mathrm{d}\tan x$$

$$= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

例15. 求 $\int \sec x \mathrm{d}x$

解法 1

$$\int \sec x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}\right) \mathrm{d}\sin x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|1+\sin x\right| - \ln\left|1-\sin x\right|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$$

解法 2 $\int \sec x \mathrm{d}x = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}$$

$$= \ln\left|\ \sec x + \tan x\right| + C$$

同样可证

$$\int \csc x \mathrm{d}x = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$$

或 $\int \csc x \mathrm{d}x = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$

例16. 求 (1) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (2) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$

解 (1) 原式 $= \int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+(\sqrt{x})^2)\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+(\sqrt{x})^2)}\mathrm{d}\sqrt{x}$

$$= 2\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x}) = (\arctan\sqrt{x})^2 + C$$

(2) 原式 $= \int \frac{\sin x}{1+(\sin^2 x)^2}\mathrm{d}(\sin x)$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\sin^2 x)^2}\mathrm{d}(\sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x) + C$$

思考与练习

1. 下列各题求积方法有何不同?

$$(1)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{4+x} = \int \frac{\mathrm{d}(4+x)}{4+x} \qquad (2)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{1+(\frac{x}{2})^2}$$

$$(3)\ \int \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(4+x^2)}{4+x^2}$$

$$(4)\ \int \frac{x^2}{4+x^2}\mathrm{d}x = \int [\,1-\frac{4}{4+x^2}\,]\mathrm{d}x$$

$$(5)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int [\,\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\,]\mathrm{d}x$$

$$(6)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)}$

提示:

法1 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x(x^{10}+1)}\mathrm{d}x$

法2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)} = \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}x^{10}}{x^{10}(x^{10}+1)}$

法3 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^{11}(1+x^{-10})} = \frac{-1}{10}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^{-10})}{1+x^{-10}}$

3. 证明递推公式

$$I_n=\int\tan^n x\,\mathrm{d}x=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}\quad(n\ge 2)$$

证： $I_n=\int\tan^{n-2}x\,(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x$

$$=\int\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}(\tan x)\quad -I_{n-2}$$

$$=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}\quad -I_{n-2}$$

注： $I_n\to\cdots\to I_0$ 或 I_1

$$I_0=x+C,\quad I_1=-\ln\left|\cos x\right|+C$$

二、第二类换元法

第一类换元法解决的问题

$$\underset{\text{难求}}{\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x} = \underset{\text{易求}}{\int f(u)\mathrm{d}u}\bigg|_{u=\varphi(x)}$$

若所求积分 $\int f(u)\mathrm{d}u$ 难求，

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 易求,

则得第二类换元积分法.

常用的第二类换元法有

三角代换，倒代换，根式代换

定理 2. 设 $x=\psi(t)$ 是单调可导函数，且 $\psi'(t)\neq 0$，$f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f[\psi(t)]\psi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

其中 $t=\psi^{-1}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

证: 设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 的原函数为 $\Phi(t)$，令

$$F(x)=\Phi[\psi^{-1}(x)]$$

则 $F'(x)=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=f[\psi(t)]\cancel{\psi'(t)}\cdot\dfrac{1}{\cancel{\psi'(t)}}=f(x)$

$$\therefore\ \int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C=\Phi[\psi^{-1}(x)]+C$$

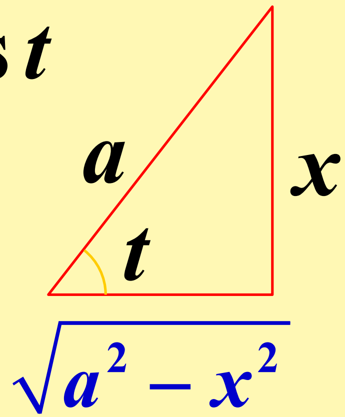
$$=\int f[\psi(t)]\psi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

例17. 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0)$

解: 令 $x = a\sin t,\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t$$

$$\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$$



$$\therefore \quad \text{原式} = \int a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

例18. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a>0)$

解: 当$x>a$时, 令 $x=a\sec t,\ t\in(0,\frac{\pi}{2})$, 则

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=a\tan t$$

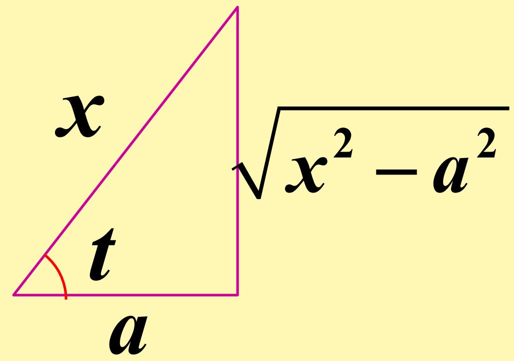
$$\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore\ 原式 =\int\frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\int\sec t\,\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\quad(C=C_1-\ln a)$$



$x > a$ 时， $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

当 $x < -a$ 时，令 $x = -u$， 则 $u > a$， 于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - a^2}} = -\ln\left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C_1$$

$$= -\ln\left| -x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C_1$$

$$= -\ln\left| \frac{a^2}{-x - \sqrt{x^2 - a^2}} \right| + C_1$$

$(C = C_1 - 2\ln a)$ $$= \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

例19. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a>0)$

解: 令 $x = a\tan t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t + a^2} = a\sec t$$

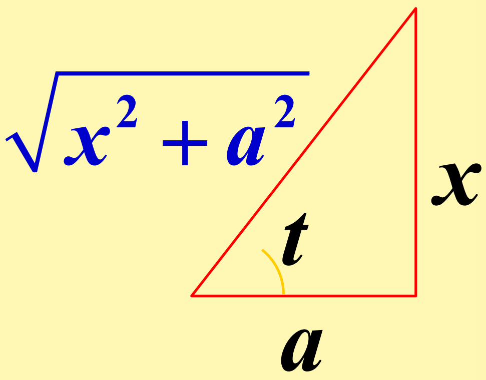
$$\mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad \text{原式} = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C_1$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C \quad (C = C_1 - \ln a)$$



例20. 求 $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$

也可令 $x=a\sin t \quad (t\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}))$,

解: 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=\int \frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}}\cdot\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t=-\int (a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}\,|t|\,\mathrm{d}t$$

当 $x>0$ 时,

$$\text{原式}=-\frac{1}{2a^2}\int (a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(a^2t^2-1)$$

$$=-\frac{(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C$$

当 $x<0$ 时, 类似可得同样结果.

例21. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ 也可令 $x = a\tan t \quad (t \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})),$

解: 令 $x = \frac{1}{t}(x>0)$, 得

$$\text{原式} = -\int \frac{t}{\sqrt{a^2t^2+1}}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\int \frac{\mathrm{d}(a^2t^2+1)}{\sqrt{a^2t^2+1}}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2+1} + C = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$$

当 $x<0$ 时, 类似可得同样结果.

例22 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

解： 令 $\sqrt{1+e^x}=t>1$,则 $1+e^x=t^2$,

从而 $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$,

原式 $=\int \frac{2}{t^2-1}dt$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$$

小结:

1. 第二类换元法常见类型:

(1) $\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x$, 令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$

(2) $\int f\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$, 令 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

第四节讲

(3) $\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$, 令 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$

(4) $\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})\,\mathrm{d}x$, 令 $x=a\tan t$ 或 $x=a\,\mathrm{sh}\,t$

(5) $\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$, 令 $x=a\sec t$ 或 $x=a\,\mathrm{ch}\,t$

(6) 分母中因子次数较高时，可试用 倒代换

2. 基本积分公式 (二)

(16) $\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

(17) $\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(18) $\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(19) $\int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(20) $$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

(21) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

(22) $$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

(23) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

(24) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\,x+\sqrt{x^2-a^2}\,\right|+C$$

例23. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$

解: 原式 $= \int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\mathrm{d}(x+1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

例24. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$

解: 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}} = \arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$

例25. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

解: 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}(1-e^{-2x})}} = \int \frac{e^{-x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = -\arcsin e^{-x}+C$$

备用题 1. 求下列积分:

1) $$\int x^2 \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}(x^3+1)$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$$

2) $$\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-(2-2x)+5}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + 5\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}}$$

$$= -2\sqrt{1+2x-x^2} + 5\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

2. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{2\sin x\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

解: 利用 凑微分法, 得

$$原式 = \int \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}(1+\sin^2 x)$$

令 $t=\sqrt{1+\sin^2 x}$

$$= \int \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \;= 2\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2(t-\arctan t)+C$$

$$= 2\left[\sqrt{1+\sin^2 x}-\arctan\sqrt{1+\sin^2 x}\right]+C$$

3. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

解：令 $x=\sin t$，$1+x^2=1+\sin^2 t$，$\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$

原式 $\displaystyle=\int\frac{\cos t}{(1+\sin^2 t)\cos t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$

分子分母同除以 $\cos^2 t$

$$=\int\frac{\sec^2 t}{\sec^2 t+\tan^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{1+2\tan^2 t}\,\mathrm{d}\tan t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{1+(\sqrt{2}\tan t)^2}\,\mathrm{d}\sqrt{2}\tan t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan t)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

第三节　分部积分法

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$ $\longrightarrow$ $uv' = (uv)' - u'v$

$$\longrightarrow \left.\begin{aligned} &\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x \\ \text{或}\quad &\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \end{aligned}\right\}\ \text{分部积分公式}$$

选取 u 及 v'(或 $\mathrm{d}v$) 的原则:

1) v 要容易求得;

2) $\int v\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\,\mathrm{d}v$ 容易积出.

例1. 求 $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

解：原式 $= x\ln x - \int x \, \mathrm{d}(\ln x)$

$$= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

$$= x\ln x - \int \mathrm{d}x$$

$$= x\ln x - x + C$$

例2. 求 $\int \arccos x \, \mathrm{d}x$

解：原式 $= x\arccos x - \int x d \arccos x$

$$= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

思考：求 $\int \arcsin x dx$

例3. 求 $\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$

解: 原式 $= x\ln(1+x^2) - \int x d\ln(1+x^2)$

$$= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int (1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2(x-\arctan x) + C$$

例4. 求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int x\,\mathrm{d}\sin x$

$$= x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

思考：如何求 $\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$?

提示： 原式 $= -\int x^2\,\mathrm{d}\cos x = -[x^2\cos x - \int \cos x\,\mathrm{d}(x^2)]$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \cdots$$

例5. 求 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

解：原式 $=\int \arctan x\,\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\int\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$$

解题技巧: 选取 u 及 v' 的一般方法:

把被积函数视为两个函数之积, 按 "反对幂指三" 的顺序, 前者为 u 后者为 v'.

反: 反三角函数
对: 对数函数
幂: 幂函数
指: 指数函数
三: 三角函数

例6. 求 $\boxed{\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x}$

解: 原式 $=\int \sin x\,\mathrm{d}e^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$

$= e^x \sin x - \int \cos x\,\mathrm{d}e^x$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x)$

$= e^x \sin x - e^x \cos x - \boxed{\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x}$

故 原式 $= \dfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

说明: 也可设 $u = e^x, v'$ 为三角函数, 但两次所设类型必须一致.

思考: 求 $\int e^x \cos x dx$

例7　求积分 $\int \sin(\ln x)dx$

解: $\boxed{\int \sin(\ln x)dx} = x\sin(\ln x) - \int x d[\sin(\ln x)]$

$$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

$$= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \boxed{\int \sin(\ln x)dx}$$

$$\therefore \int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

思考: 求 $\int \cos(\ln x)dx$

例8. 求 $\boxed{\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x}$

解: 原式 $= \int \sec x d \tan x$

$$= \sec x \tan x - \int \tan x \, \mathrm{d} \sec x$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, \mathrm{d}\, x$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$$

$$= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \boxed{\int \sec^3 x dx}$$

从而, 原式 $= \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$

思考: 求 $\int \csc^3 x dx$

例9. 求 $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

解: 原式 $= \int \ln\cos x\,\mathrm{d}\tan x$

$$= \tan x\cdot\ln\cos x - \int \tan x\,\mathrm{d}(\ln\cos x)$$

$$= \tan x\cdot\ln\cos x + \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x\cdot\ln\cos x + \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x\cdot\ln\cos x + \tan x - x + C$$

例10. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$, 求 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$

解: $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}f(x)$

$$= x f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C$$

$$= -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C$$

说明: 此题若先求出 $f'(x)$ 再求积分反而复杂.

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(-\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

例11. 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

内容小结

分部积分公式 $\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$

1. 使用原则: v易求出, $\int u'v\,\mathrm{d}x$易积分

2. 使用经验: “反对幂指三” , 前 u 后 v'

3. 题目类型:

分部化简; 循环解出;

第四节 有理函数的积分

一、有理函数的积分

二、可化为有理函数的积分举例

一、 有理函数的积分

有理函数:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}\qquad a_0b_0\neq 0$$

$m\le n$时, $R(x)$称为假分式; $m>n$时, $R(x)$称为真分式

假分式的分解

$$\text{假分式}\ \overset{}{\underset{\text{相除}}{=\!=\!=\!=}}\ \text{多项式}+\boxed{\text{真分式}}$$

$\downarrow$ 分解

其中 部分分式 的形式为

$\boxed{\text{若干 部分分式 之和}}$

$$\frac{A}{(x-a)^n};\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\quad (n\in \mathrm{N}^+,\ p^2-4q<0)$$

确定部分分式系数的方法：待定系数法

例1. 将下列真分式分解为部分分式：(1) $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$;

解：$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

通分，去分母得

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$
$$=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A$$

比较系数得 $\begin{cases}A+B=0\\-2A-B+C=0\\A=1\end{cases}$ 从而 $\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=1\end{cases}$

故 原式 $=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

(2) $\dfrac{x-2}{(x+1)(x^2+2)}$.

解: 设 $\dfrac{x-2}{(x+1)(x^2+2)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2}$

通分, 去分母得: $x-2 = A(x^2+2) + (x+1)(Bx+C)$

即 $x-2 = (A+B)x^2 + (B+C)x + (2A+C)$

比较恒等式两边的系数, 得方程组,

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=1 \\ 2A+C=-2 \end{cases}$$

即 $A=-1$, $B=1$, $C=0$

原式 $= -\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x^2+2}$

(3) $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$

解：设原式 $=\dfrac{A}{1+2x}+\dfrac{Bx+C}{1+x^2}$,

整理得 $1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x)$,

$$1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A,$$

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

四种典型的部分分式的积分:

1. $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a|+C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n}+C \quad (n\neq 1)$

3. $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$

4. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$

$(p^2-4q<0, n\neq 1)$

变分子为

$\frac{B}{2}(2x+p)+C-\frac{Bp}{2}$

再分项积分

例2. 求 $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$

解：原式 $\displaystyle=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-3\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

思考：如何求 $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$?

例3. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解: 已知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x}-\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}(1+2x)}{1+2x}-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$=\frac{2}{5}\ln|1+2x|-\frac{1}{5}\ln(1+x^2)+\frac{1}{5}\arctan x+C$$

说明：将真分式分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，要注意观察被积函数的特点寻求简便的方法.

例4. 求 $I=\int \frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$

解：$I=\int \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int \frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+4)}{x^4+5x^2+4}+\int \frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C$$

二、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

令 $t = \tan\frac{x}{2}$

万能代换

t 的有理函数的积分

例5. 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \left(t+2+\frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2 + 2t + \ln\left| t \right| \right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left| \tan\frac{x}{2} \right| + C$$

例6. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} \quad (ab \neq 0)$

解：原式 $= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x + (\frac{b}{a})^2}$

$$= \frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x) + C$$

说明：通常求含 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 及 $\sin x\cos x$ 的有理式的积分时，用代换 $t = \tan x$ 往往更简便.

例7. 求 $\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2}\mathrm{d}x \quad (ab \neq 0)$

解: 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\tan x + b)^2 \cos^2 x}$

令 $t = \tan x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{(at+b)^2} = -\frac{1}{a(a\,t+b)} + C$$

$$= -\frac{1}{a(a\tan x + b)} + C$$

2. 简单的无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式, 可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x, \quad 令\ t=\sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \quad 令\ t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x,$$

令 $t=\sqrt[p]{ax+b}$, p 为 m, n 的最小公倍数.

例8. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$

解：令 $u=\sqrt[3]{x+2}$，则 $x=u^3-2$，$\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$\text{原式} = \int \frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u = 3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

$$= 3\int \left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= 3\left[\frac{1}{2}u^2 - u + \ln\left|1+u\right|\right] + C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right| + C$$

例9. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

解: 为去掉被积函数分母中的根式, 取根指数 2, 3 的最小公倍数 6, 令 $\sqrt[6]{x}=t,$ 则有

$$\text{原式} = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln\left|1+t\right|\right] + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$$

例10. 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

$$\text{原式}=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2\sqrt{x(x+1)}+1\right|+C$$

内容小结

1. 有理函数的积分

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\text{有理函数} \arrow[d, "\text{分解}"] & & \text{三角函数有理式} \arrow[ll, "{\text{万能代换}\quad t=\tan\frac{x}{2}}"'] \\
\text{多项式及部分分式之和} & & \text{简单的无理函数} \arrow[u, "\text{三角代换}"'] \arrow[ull, "\text{根式代换}"']
\end{tikzcd}
$$

2. 有理函数的积分按照上述方法虽然可以积出，

但不一定简便，

要注意综合使用基本积分法， 简便计算.

备用题 1. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x$

分母次数较高,
宜使用倒代换.

解: 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ 故

$$\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\frac{1}{t^6}(1+\frac{1}{t^2})}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t=-\int \frac{t^6}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int (t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\arctan\frac{1}{x}+C$$

2. 求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x} \mathrm{d}x$

解: 原式 $= \int \frac{1}{3+\cos x} \mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{3+\cos x} \mathrm{d}x$

前式令 $u = \tan\frac{x}{2}$; 后式凑微分

$$= \int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} \mathrm{d}u - \int \frac{1}{3+\cos x} \mathrm{d}(3+\cos x)$$

$$= \int \frac{1}{u^2+2} \mathrm{d}u - \ln|3+\cos x|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} - \ln|3+\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan\frac{x}{2}) - \ln|3+\cos x| + C$$