第五章 定积分及其应用

第一节 定积分的概念

一、引例

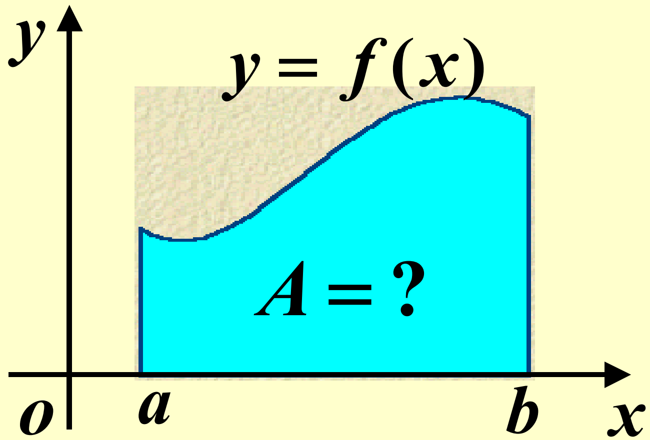
二、定积分的概念

一、引例

1. 曲边梯形的面积

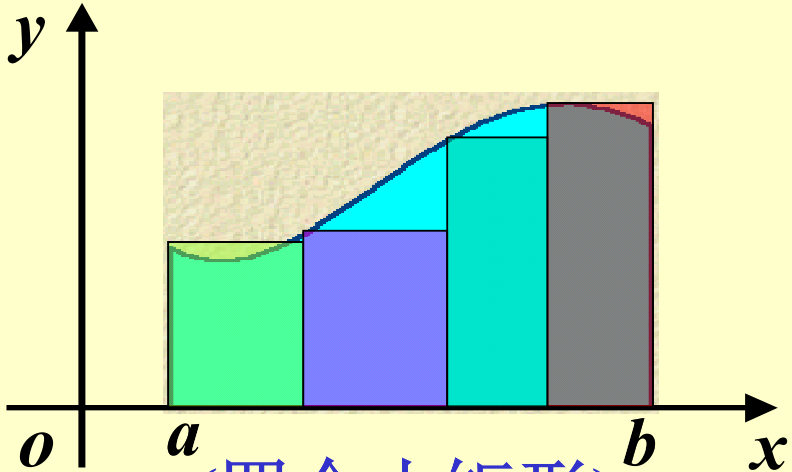
曲边梯形：由连续曲线

$y = f(x)(f(x) \geq 0)$

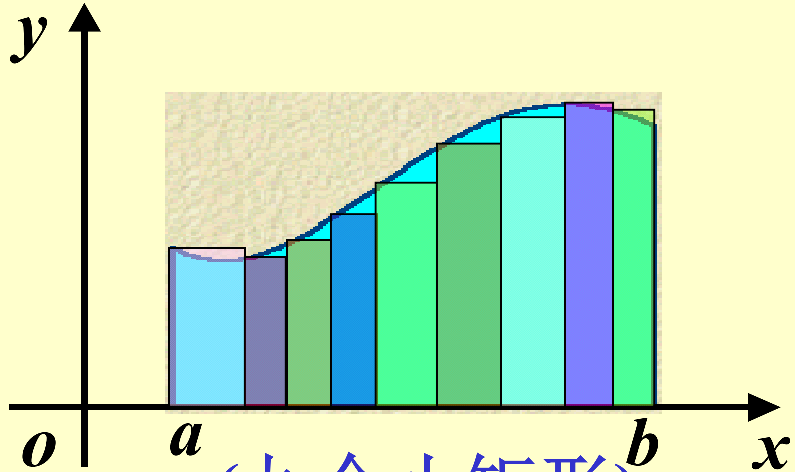


x轴与两条直线$x = a$、$x = b$所围成。

用矩形的面积 近似代替 曲边梯形的面积



(四个小矩形)



(九个小矩形)

小矩形越多，小矩形的总面积就越接近曲边梯形的面积。

计算曲边梯形面积的方法:

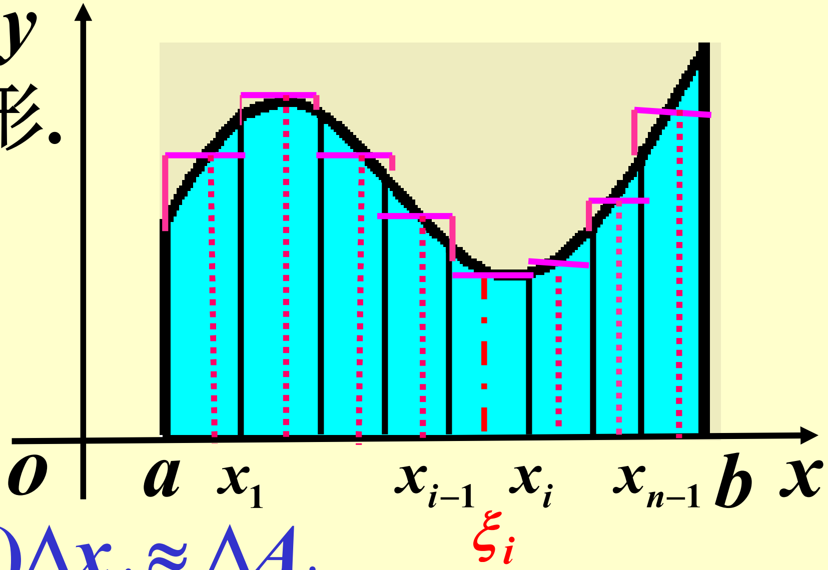
（1）“分割”在区间 $[a,b]$ 内 任意 插入 $n-1$ 个分点,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$,

长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 用直线 $x = x_i$

将曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形.



（2）“代替”

在每个小区间上 任取一点 ξ_i,

作以 $[x_{i-1}, x_i]$为底, 以$f(\xi_i)$

为高的小矩形，其面积为 $f(\xi_i)\Delta x_i \approx \Delta A_i$

以此来 近似代替 相应的窄曲边梯形的面积 ΔA_i.

（3）“求和”

将上述小矩形的面积求和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

得曲边梯形面积的近似值 $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

（4）“取极限”

当分割无限加细，即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\} \to 0$时，

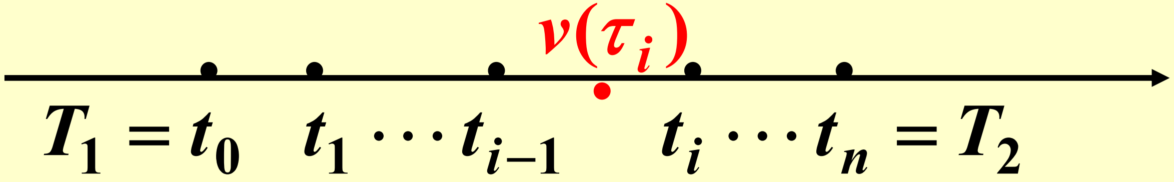
$$\left(\lambda \to 0 \Rightarrow n \to \infty\right)$$

曲边梯形的面积为 $A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，已知速度 $v=v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上 t 的一个连续函数，且 $v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程。

（1）“分割”



$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

（2）“代替” $\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i$

（3）“求和” $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（4）“取极限” $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的 精确值 $s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

上述两个问题的 共性:

- 都决定于一个函数及其自变量的变化区间.
- 解决问题的方法步骤相同.

（1）“分割”　　（2）“代替”

（3）“求和”　　（4）“取极限”

- 所求量极限结构式相同.　特殊乘积和式的极限

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

二、定积分的概念

1. 定义

设$f(x)$在$[a, b]$上有定义, 在$[a, b]$中 任意 插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots x_{n-1} < x_n = b$$

令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$， 任取 $\xi_i (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$,

只要 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\} \to 0$时

和式 $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ 总 趋于确定的极限 I,

则称 极限值 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的 定积分,

记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Back

积分上限

$[a,b]$ 积分区间

积分和

即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

由定积分的定义，前面两例分别为

曲边梯形的面积 $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$　路程 $s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t$

说明：(1) 定积分仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

(2) 如果$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在，

则称$f(x)$在区间$[a,b]$上 可积。

2．可积的充分条件

（1）函数$f(x)$在$[a,b]$上连续 $\Longrightarrow$ $f(x)$在$[a,b]$上可积

（2）函数$f(x)$在$[a,b]$上有界， 且只有有限个间断点

$\Longrightarrow$ $f(x)$在$[a,b]$上可积

（3）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调 $\Longrightarrow$ $f(x)$在$[a,b]$上可积

注：$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界是可积的必要条件，不是充分条件。

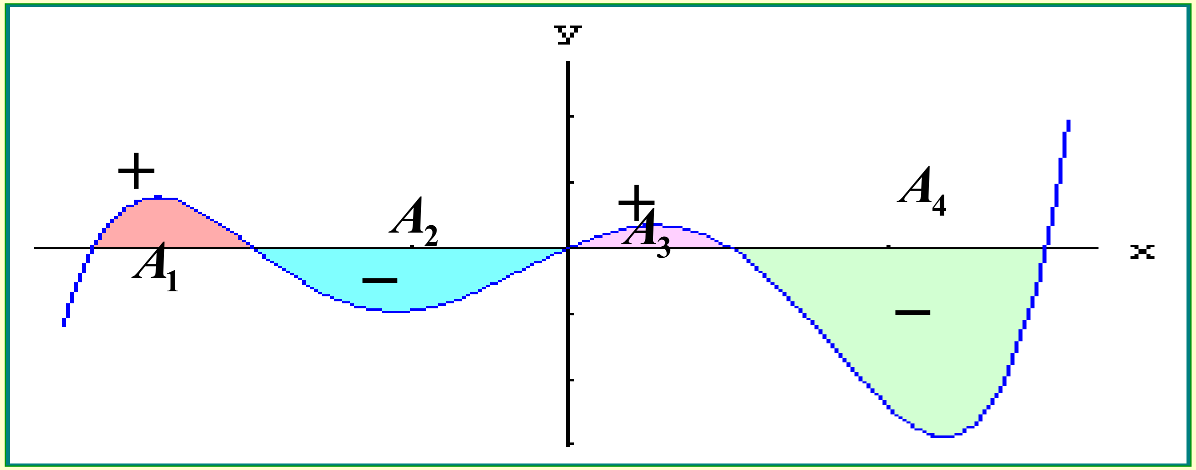
如 $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\0 & x\text{为无理数}\end{cases}$ 有界但不可积

3．定积分的几何意义

定积分是介于 x轴、函数 $f(x)$的图形及两条直线 $x=a, x=b$之间的面积的 代数和，

$f(x)>0,\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$　曲边梯形的面积

$f(x)<0,\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$　曲边梯形的面积的相反数



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

$$\int_a^b m \, \mathrm{d}x$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

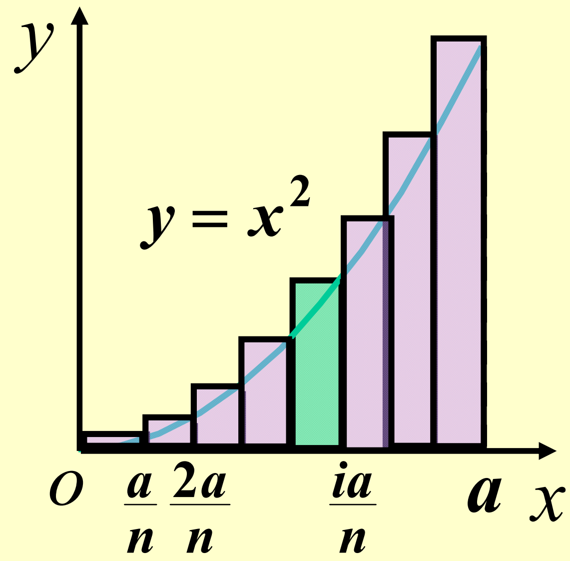
$$\int_{-1}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x$$

例1. 利用 定义 计算定积分 $\int_0^a x^2 \mathrm{d}x$

解: $f(x)=x^2$ 在 $[0,a]$上连续,所以可积,

将$[0,a]$ n等分, 分点为$x_i=\dfrac{ia}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n-1)$

小区间长度$\Delta x_i=\dfrac{a}{n}$, 取$\xi_i=x_i$



则$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ia}{n}\right)^2\cdot\frac{a}{n}$

$$=\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

所以$\displaystyle\int_0^a x^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{a^3}{3}$

例2. 将下列极限表示成定积分的形式。

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1^2}+\frac{n^2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i})^2}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

上式看成函数$\dfrac{1}{1+x^2}$在区间[0, 1]上的积分和式

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\boxed{\frac{i}{n}}}\cdot\boxed{\frac{1}{n}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

Δx_i

ξ_i

第二节 定积分的性质

对定积分的 补充规定:

当 $a = b$时,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

当 $a > b$时,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

说明: 在下面的性质中，假定定积分都存在，且不考虑积分上下限的大小。

对要求上限大下限小的性质会注明。

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

（此性质可以推广到有限多个函数作和的情况）

证: 左端 $= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

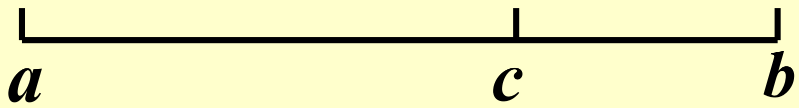
$=$ 右端

性质2 $\int_a^b k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ （k 为常数)

性质3 不论 a, b, c 的相对位置如何,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

证: 当 $a < c < b$ 时,



因 $f(x)$在 $[a,b]$ 上可积 ,

所以在分割区间时, 可以永远取 c 为分点 , 于是

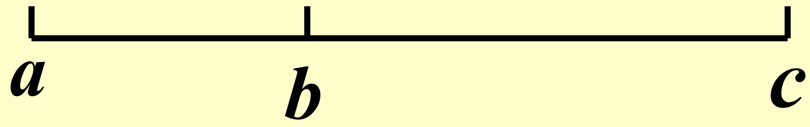
$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\Big\downarrow \ \text{令}\ \lambda \to 0$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

当 a, b, c 的相对位置任意时，例如 $a<b<c$，

则有



$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

（定积分对于积分区间具有可加性）

性质4 如果在区间 $[a,b]$上，$f(x)\geq 0$,

Back

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0 \quad (a<b)$

推论. 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b)$$

性质5 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a<b)$

性质6 若 m, M是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，最大值，

$$\text{则}\, m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

（此性质可用于估计积分值的范围）

性质7（积分中值定理）

若 $f(x)\in C[a,b]$, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

积分中值公式

证: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值分别为 m, M,

则由 性质 6 可得

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M$$

由闭区间上连续函数的介值定理知, 至少存在一点

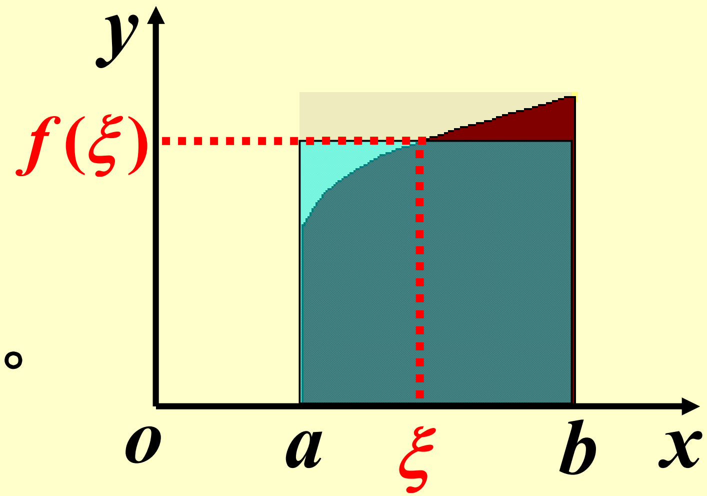
$\xi\in[a,b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

因此定理成立.

Back

积分中值公式 的几何解释:



可把 $$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = f(\xi)$$

理解为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值。

因 $$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

故它是有限个数的平均值概念的推广。

推广的积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号，

则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

例1. 比较 $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$与$\int_0^1 (1+x)\,\mathrm{d}x$之大小。

解: 令 $f(x)=e^x-1-x,\quad 0\le x\le 1,$

则有$f'(x)=e^x-1>0$, 所以 $f(x)\ge f(0)=0$

说明 $e^x\ge 1+x$ 又 $e^x \not\equiv 1+x$

于是 $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x > \int_0^1 (1+x)\,\mathrm{d}x$

例2. 对$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$估值。

解: $f(x)=1+\sin^2 x$, $f'(x)=2\sin x\cos x$,

$f(x)$在$(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$内的驻点为 $x=0$

$f(-\frac{\pi}{3})=\frac{7}{4}, f(0)=1, f(\frac{\pi}{2})=2$ $m=1, M=2,$

于是有 $\frac{5\pi}{6}\le\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x\le\frac{5}{3}\pi$

例3.设$f(x)$在$[0,1]$上可微,且满足 $f(1)=2\int_0^{1/2} xf(x)\mathrm{d}x$,

试证存在$\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)=-\dfrac{f(\eta)}{\eta}$

证明: 令$F(x)=xf(x)$ $F(1)=f(1)=F(\xi)$

由 积分中值定理

$$f(1)=2\int_0^{1/2} xf(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi),\xi\in[0,\frac{1}{2}]$$

由题设知 $F(x)$在 $[\xi,1]$上满足罗尔定理的条件,

故存在一点 $\eta\in(\xi,1)\subset(0,1)$, 使得 $F'(\eta)=0$

即 $F'(\eta)=f(\eta)+\eta f'(\eta)=0 \Rightarrow f'(\eta)=-\dfrac{f(\eta)}{\eta}$

第三节 微积分基本定理

一、积分上限的函数及其导数

二、微积分基本定理

在变速直线运动中, 已知位置函数 $s(t)$

与速度函数 $v(t)$ 之间有关系: $s'(t)=v(t)$

$[T_1, T_2]$ 内经过的路程为

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t = s(T_2)-s(T_1)$$

这里 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的原函数

这种 定积分 与 原函数 的关系具有普遍性。

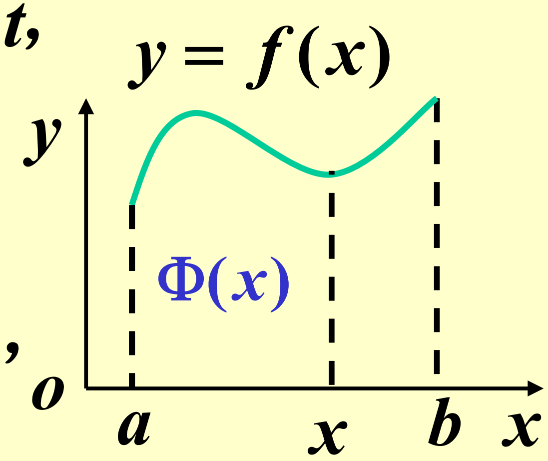
一、积分上限的函数及其导数

定义 设$f(x)\in C[a,b]$，$\forall x\in[a,b]$,

考察 $f(x)$在$[a,x]$上的 定积分$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$,

x 在 $[a,b]$ 上任意取定一个值时，

上面的定积分有唯一确定的值与之对应，



这样，在 $[a,b]$ 上定义了一个新的函数 $\Phi(x)$

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

称为 积分上限的函数

定理1. 若 $f(x)\in C[a,b]$，则积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$ 在 $[a,b]$ 上可导，

且有 $\Phi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$

证明： $\forall\, x, x+h\in[a,b]$，则有

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)$$

(ξ介于 x与 $x+h$之间)

$$\therefore\ \Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=\lim_{\xi\to x} f(\xi)$$

$$\because f(x)\in C[a,b]\qquad = f(x)$$

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的；

（2）给出了积分变限函数的求导公式。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)=-f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^{u} f(t)\,\mathrm{d}t\bullet\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\psi(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例1. $$\left(\int_{2x}^{\sin x} u^2 e^{-u}\,\mathrm{d}u\right)'$$

$$=(\sin x)^2 e^{-\sin x}\cdot\cos x-4x^2 e^{-2x}\cdot 2$$

例2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x (1-\cos t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2$$

例3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\frac{1}{2e}$$

例4. 确定常数 a, b, c 的值, 使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\,t}=c\quad (c\neq 0)$$

解: $\because\ x\to 0$时, $ax-\sin x\to 0$, $\quad c\neq 0$, $\therefore\ b=0$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c\neq 0\ \text{故}\,a=1$$

又由 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ 得 $c=\frac{1}{2}$

例5. 设$f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t = x$，求 $f(7)$

解：两边对 x 求导得 $3x^2 f(x^3-1)=1$,

令 $x^3-1=7$ 求得 $x=2$ 则$f(7)=\frac{1}{12}$

例6. 求函数 $F(x)=\int_1^x (2-\frac{1}{\sqrt{t}})\mathrm{d}t(x>0)$的单调减区间。

解：$F'(x)=(2-\frac{1}{\sqrt{x}})$, 令 $F'(x)=0$,求得 $x=\frac{1}{4}$,

当$0<x<\frac{1}{4}$时，$F'(x)<0$,

所以单调减区间为 $(0,\frac{1}{4}]$。

二、微积分基本定理

(牛顿—莱布尼兹公式)

定理2. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数,则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ (牛顿–莱布尼兹公式)

证: 根据定理 1, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,故

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$$

令 $x = a$,得 $C = F(a)$, 因此 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$

再令 $x = b$, 得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \overset{\text{记作}}{=} F(x)\Big|_a^b$$

牛顿—莱布尼兹公式

把求 定积分 问题转化为求 原函数 的问题。

★ 微积分基本定理

牛顿——莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) = F'(\xi)(b-a) = F(b)-F(a)$$

积分中值定理　　　　　　　　微分中值定理

通常把这一公式又叫做 微积分基本公式

例7. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\cos \pi - (-\cos 0)$$

$$= 1 - (-1)$$

$$= 2$$

例8. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}}$

$$= \arctan\sqrt{3} - \arctan(-1)$$

$$= \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{7}{12}\pi$$

例9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解: 设$f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $g(x)=x^n$

则 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上均连续, 且 $g(x)=x^n\geq 0$

有 $\int_0^1 \frac{x^n}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\sqrt{\xi}}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\sqrt{\xi}}\cdot\frac{1}{1+n}$

而 $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+\sqrt{\xi}}\leq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+n}=0$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 0$

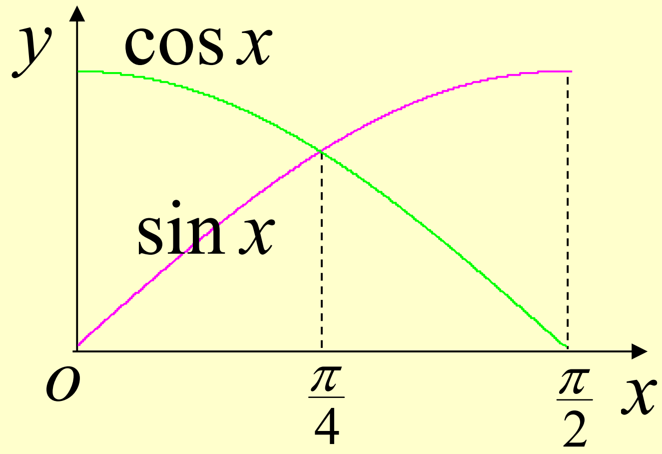
例10. 设$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in[-\dfrac{\pi}{2},0)\\ e^x, & x\in[0,1]\end{cases}$，求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x$。

解: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} e^{x}\mathrm{d}x$

$$= [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [e^{x}]_{0}^{1}$$

$$= 0-(-1)+e-1=e$$

例11. 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$



解: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2(\sqrt{2}-1)$$

例12. 已知$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\ge 0\\ x, & x<0\end{cases}$,

求$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$和$\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$

解: 当$x<0$时, $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\,\mathrm{d}t=[\frac{t^2}{2}]_0^x=\frac{x^2}{2}$

当$x\ge 0$时, $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t=[\sin t]_0^x=\sin x$

当$x<0$时, $\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^x t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x^2-1)$

当$x\ge 0$时, $\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0 t\,\mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}+\sin x$

例13. 已知$f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，试求$f(x)$

解：令$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=a \quad \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=b$

则$f(x)=x^2-ax+2b$

分别代入上两式得

$$\int_0^2 (x^2-ax+2b)\mathrm{d}x=a \quad \int_0^1 (x^2-ax+2b)\mathrm{d}x=b$$

积分得 $[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}+2bx]_0^2=a \Rightarrow 3a-4b=\frac{8}{3} \quad (1)$

$[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}+2bx]_0^1=b \Rightarrow a-2b=\frac{2}{3} \quad (2)$

由(1)，(2)解得 $a=\frac{4}{3}$， $b=\frac{1}{3}$

所以$f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

第四节 定积分的换元法
与分部积分法

一、定积分的换元法

二、定积分的分部积分法

一、定积分的换元法

定理1. 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

1) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$, 且 $R_\varphi=[a,b]$

2) $\varphi(t)$在 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$)上具有连续导数

则 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

证: 所证等式两边被积函数都连续, 因此定积分都存在, 且它们的原函数也存在. 设 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数, 则 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数, 因此有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\,[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

说明:

1) 必须注意 换元必换限, 原函数中的变量 不必代回.

2) 换元公式也可反过来使用, 即

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \quad (令\ x=\varphi(t))$$

或凑微分 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\underline{\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t} = \int_\alpha^\beta f\,[\,\varphi(t)\,]\,\mathrm{d}\,\varphi(t)$

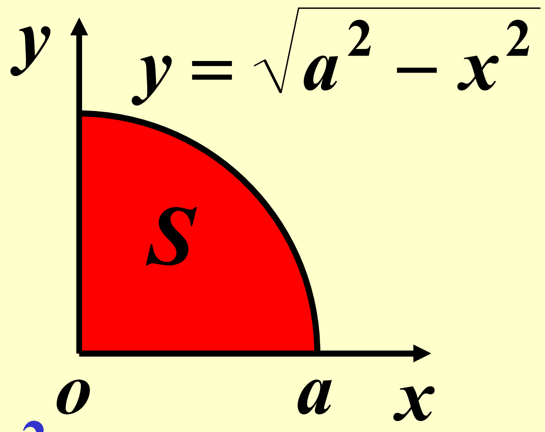
凑微分不换限

例1. 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0).$

解: 令 $x = a\sin t$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x = 0$ 时, $t = 0$; $x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad 原式 = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$



$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

例2. 计算 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

例3. 计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\,\mathrm{d}x$ $= \frac{4}{5}$

例4. 求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x$

解: 令 $e^{-x}=\sin t$, 则 $x=-\ln\sin t, \mathrm{d}x=-\dfrac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$,

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc t-\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\left[\ln\left|\csc t-\cot t\right|+\cos t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例5. 计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{2x+1}$,则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x=0$ 时, $t=1$; $x=4$ 时, $t=3$.

$$\therefore \quad 原式 = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\,t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Bigg|_1^3 = \frac{22}{3}$$

例6. 设$f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1\le x<0 \end{cases}$ 计算$\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=x-2$, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, 且

当 $x=1$时, $t=-1$; $x=4$时, $t=2$.

$$\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t+\int_0^2 te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^0\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}(-t^2)$$

$$=[\tan\frac{t}{2}]_{-1}^0-[\frac{1}{2}e^{-t^2}]_0^2\quad=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$$

例7. 设 $f(x)\in C[-a,a]$,

偶倍奇零

(1) 若 $f(-x)=f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$

证: $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\underline{\int_{-a}^{0}f(x)\,dx}+\int_{0}^{a}f(x)\,dx$

令 $x=-t$

$$=\int_{0}^{a}f(-t)\,dt+\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]\,dx$$

$$=\begin{cases}2\int_{0}^{a}f(x)\,dx, & f(-x)=f(x)\text{时}\\ 0, & f(-x)=-f(x)\text{时}\end{cases}$$

例8. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}(1-x^{2015})\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{2}$

例9. 计算 $\int_{-\pi}^{\pi}(\sqrt{1+\cos 2x}+|x|\sin x)\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sqrt{1+\cos 2x}}_{\text{偶函数}}\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{|x|\sin x}_{\text{奇函数}}\mathrm{d}x$

$$=2\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\pi}\sqrt{2}\,|\cos x|\,\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$=4\sqrt{2}$$

例10. 设$f(x)$是连续的以$T(>0)$为周期的周期函数，

(1)证明:对任何实数a，有 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) 计算 $\int_0^{100\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = 200\sqrt{2}$

证明: (1) 令 $F(a) = \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$

则 $F'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$

说明 $F(a)$是常数，所以 $F(a) = F(0)$

即 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$

例11. 设 $f(x)$是连续函数,证明:

$$(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

证明:(1) 令$x = \dfrac{\pi}{2} - t \quad \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t,$

$$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f[\sin(\frac{\pi}{2} - t)]\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$\bigstar \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

证明：(2) 令$x = \pi - t \quad \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t,$

$$x = 0 \Rightarrow t = \pi, \qquad x = \pi \Rightarrow t = 0,$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0}(\pi - t)f[\sin(\pi - t)]\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi}(\pi - t)f(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} tf(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

用此结论可简化 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

例12. 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

解：利用 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=2I$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

二、定积分的分部积分法

定理2. 设 $u(x), v(x) \in C^1[a, b]$，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

例13. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$

解：原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{d}(\tan x)$

$$= \frac{1}{2}\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$$

例14. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x$。

解: $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,f'(2x)$

$$= \frac{1}{2}\left[xf'(2x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \underline{f'(2x)\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}\left[f(2x)\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\left[f(2) - f(0)\right] = 2$$

例15. 证明 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{ 为奇数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

证明: 令 $u=\sin^{n-1}x,\quad v'=\sin x,$

则 $u'=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x,\quad v=-\cos x$

$$\therefore\quad I_n=\underbrace{\left[-\cos x\cdot\sin^{n-1}x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$$

$$I_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$\boxed{I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x}$$

由此得递推公式 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

于是 $$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1$$

而 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$, $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=1$

故所证结论成立.

例16. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx$　(2) $\int_0^{\pi} \sin^5 x \, dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx$　(4) $\int_0^{\pi} \cos^5 x \, dx$

(5) $\int_0^{\pi} \sin^6 x \, dx$　(6) $\int_0^{\pi} \cos^6 x \, dx$

例17. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} \, dx = 2(e^2 + 1)$

第五节 广义积分

一、无穷区间上的广义积分

二、无界函数的广义积分

前面所讲的定积分称为常义积分 $\begin{cases} \text{积分限有限} \\ \text{被积函数有界} \end{cases}$

$\Downarrow$ 推广

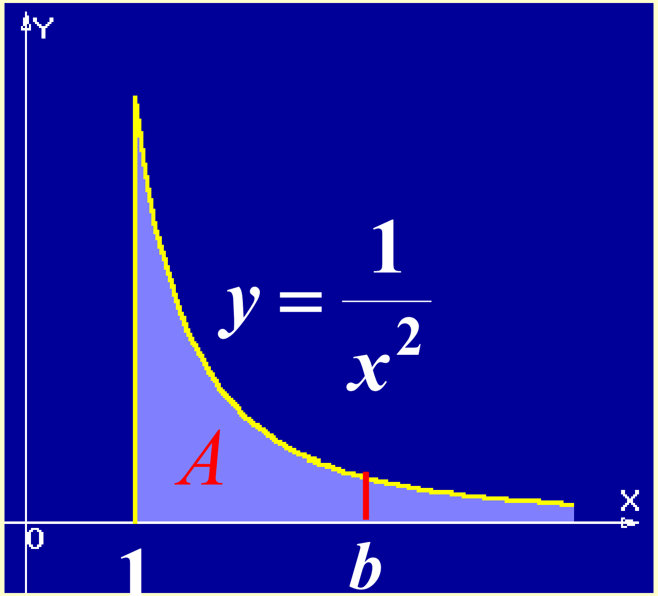
广义积分 $\begin{cases} \text{积分区间为无穷区间} \\ \text{被积函数无界} \end{cases}$

一、无穷区间上的广义积分

引例 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的开口

曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

定义1 设$f(x)\in C[a,+\infty)$，对$\forall t>a$，

若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在,

则称此 极限 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的 广义积分，记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

这时称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

如果上述极限 不存在，就称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 。

类似地，若 $f(x)\in C(-\infty,b]$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

只要有一个发散, 就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

说明: 一般来说 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \neq \lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

例如 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$, 由于 $\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{d}x = +\infty$发散, 故 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 发散。

但$\int_{-a}^{a} x\mathrm{d}x = 0$, $\quad \lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} x\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to+\infty} 0 = 0$

★无穷区间上的广义积分的计算

若 $F(x)$是 $f(x)$的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则有类似于牛顿—莱布尼兹公式的计算表达式:

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(-\infty)=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(-\infty)=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

例1. $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

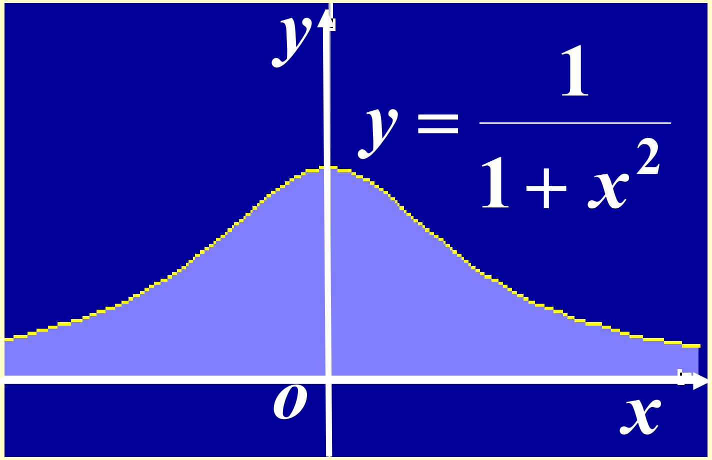
$$=-\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}(\frac{1}{x})$$

$$=\left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}$$

$$=1$$

例2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$$=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}=\pi$$



思考: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\cancel{=}0$ 对吗?

分析: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散!

注意: 对广义积分, 只有在 收敛的条件下 才有

“偶倍奇零” 的性质。

★ 例3. 证明广义积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x (a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛;

$P \le 1$ 时发散.

证明: 当 $p=1$ 时

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \left[\ln|x| \right]_a^{+\infty} = +\infty$$

当 $p \ne 1$ 时

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p<1 \\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1 \end{cases}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 广义积分收敛, 其值为 $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$;

当 $p \le 1$ 时, 广义积分发散.

二、无界函数的广义积分(瑕积分)

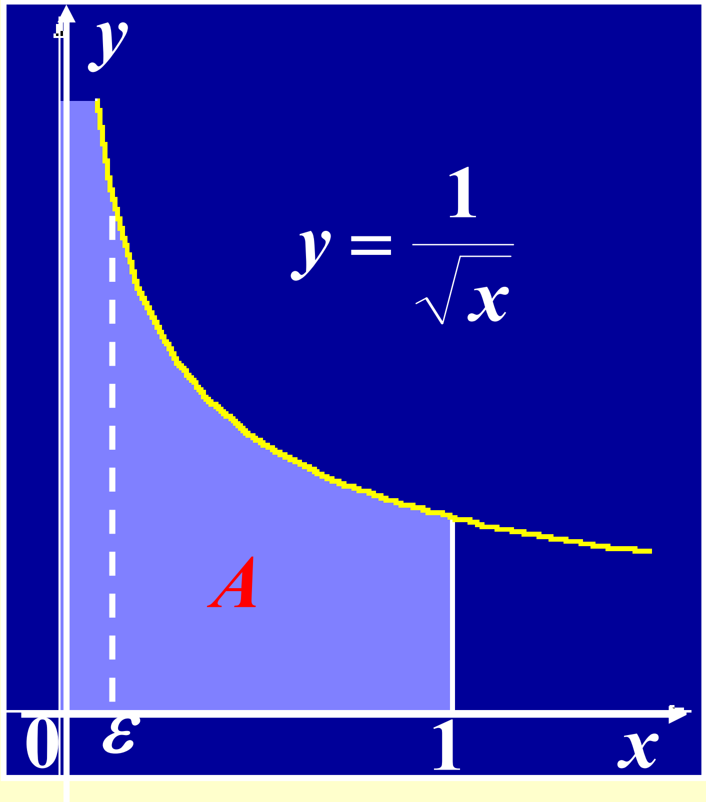
引例　曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积 可记作

$$A=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$



如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界,
则点 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点。

定义2 设 $f(x)\in C(a,b]$，点 a 为 $f(x)$ 的 瑕点，

取 $t>a$，若极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，

则称此 极限 为函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的 广义积分，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限 不存在，

就称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散 。

类似地，若 $f(x)\in C[a,b)$，点 b 为 $f(x)$ 的 瑕点，

则定义 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c\,(a<c<b)$ 外连续，

点 c 为 $f(x)$ 瑕点， 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

瑕积分的计算

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，

若 a 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若 b 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

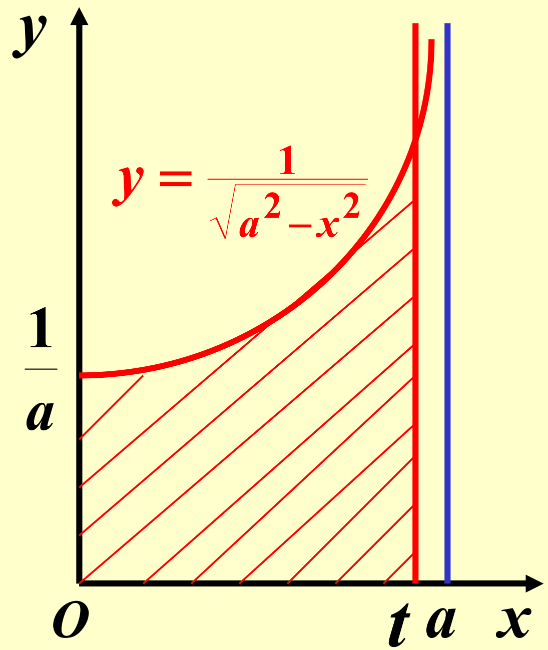
例4. 计算 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0)$

解： $x=a$ 为瑕点

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a^-}$$

$$=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$



例5. 计算 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

解：$x=1$ 为瑕点。$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{2/3}} + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{2/3}}$

$$= [3(x-1)^{1/3}]_0^{1^-} + [3(x-1)^{1/3}]_{1^+}^2 = 3(0+1)+3(1-0)=6$$

说明：如果有人这样做：

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} = [3(x-1)^{1/3}]_0^2 = 3[1-(-1)] = 6$$

结果虽然对，但方法不对。

例如：$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = [-\frac{1}{x}]_{-1}^1 = -2$ 事实上，$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散

例6. 证明广义积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛;

$q \geq 1$ 时发散.

证明: $x=a$为瑕点

当$q=1$时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln|x-a|\right]_{a^+}^{b} = +\infty$

当 $q\neq1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a^+}^{b} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

★ 特例 $\int_0^1 \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 当 $q<1$ 时收敛, $q \geq 1$ 时发散.

当同时含两类广义积分时， 需 划分积分区间,

分别讨论相应的广义积分的敛散性。

例7. 讨论 $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}}\mathrm{d}x$ 的敛散性

第六节 定积分的几何应用

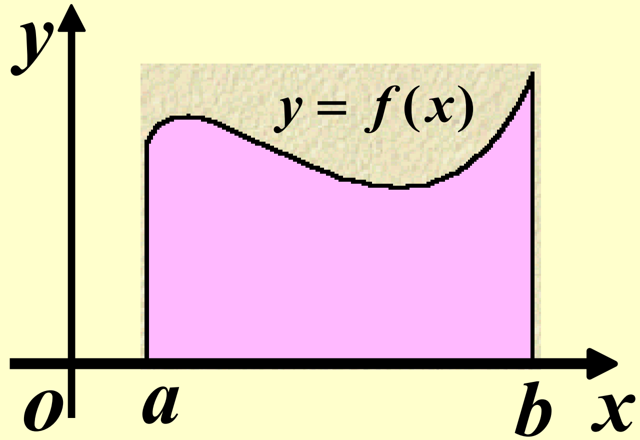
一、元素法(微元法)

二、平面图形的面积

三、体积

四、平面曲线的弧长

一、元素法(微元法)



回顾曲边梯形的面积问题

具体步骤 “四步曲”

（1）分割 把原曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形，

第 i 个窄曲边梯形的面积记为 ΔA_i，于是 $A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$

（2）代替 $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

（3）求和 $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

（4）取极限 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \xlongequal{\text{记作}} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Back

所求量 (即面积A)

(1) **A** 与变量 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关；

(2) **A** 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性，即如果把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间，则所求量 **A** 相应地分成许多部分量，而 **A** 等于所有部分量之和；

(3) 部分量 ΔA_i 与其近似值 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 只相差一个比 Δx_i 高阶的无穷小

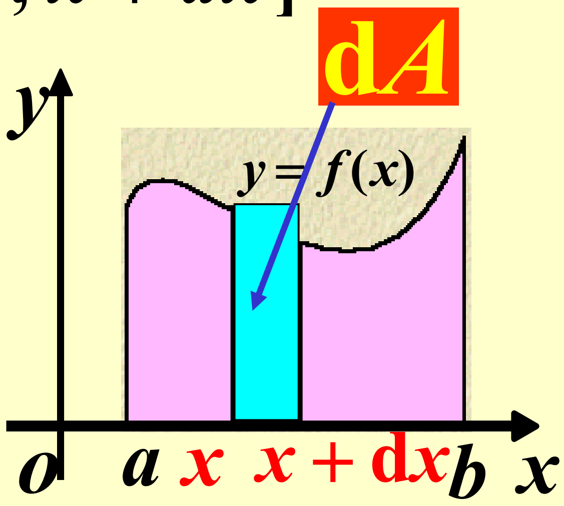
这样，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限就是 **A** 的精确值，

从而 **A** 可以表示为定积分 $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

四步 中，求部分量的近似值是关键的一步，可简化如下：

省略下标 i，用 ΔA 表示任一小区间 $[x, x+dx]$

上的窄曲边梯形的面积.



这样，$A = \sum \Delta A$

$$\Delta A \approx f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}A$$

称 $dA = f(x)dx$为面积元素。

于是，$A \approx \sum f(x)\mathrm{d}x$

因此，$A = \lim \sum f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

一般地，如果某一问题的所求量 U 符合下列条件：

(1) U 与一个变量 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关；

(2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性，即如果把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间，则 U 相应地分成许多部分量，而 U 等于所有部分量之和；

(3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示成 $f(\xi_i)\Delta x_i$.

那么就可考虑用定积分来表达这个量 U.

通常写出这个量 U 的积分表达式的步骤是:

(1) 根据具体问题，选取一个变量例如 x 为积分变量，

并确定它的变化区间 $[a, b]$;

(2) 在 $[a, b]$ 上，任取一小区间并记作 $[x, x+\mathrm{d}x]$;

求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值.

如果 $\Delta U \approx f(x)\mathrm{d}x$ 则称 $f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}U$

为量 U 的 元素.

(3) 所求量 $U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

这就是所说的 元素法(微元法)。

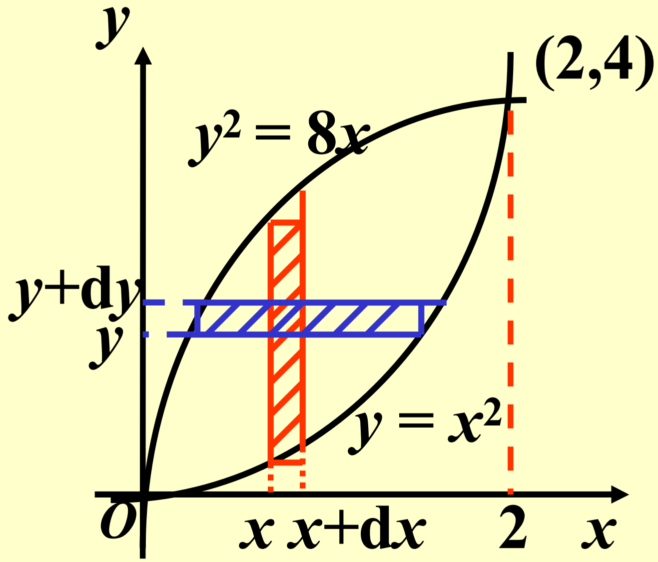
Back

二、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

例1. 计算两条抛物线 $y = x^2$，$y^2 = 8x$ 所围图形的面积。

解： 由 $\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = x^2 \end{cases}$ 得交点 $(0,0),(2,4)$



取 x 为积分变量, 变化范围为 $[0,2]$

得面积元素

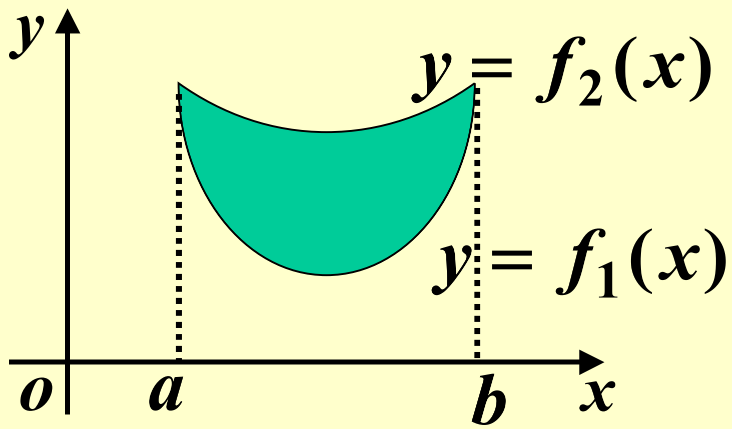
$$\mathrm{d}A = (\sqrt{8x} - x^2)\mathrm{d}x$$

于是 $A = \int_0^2 (\sqrt{8x} - x^2)\mathrm{d}x = [\frac{2\sqrt{8}}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3]_0^2$

$$= \frac{8}{3}$$

元素法

一般地，



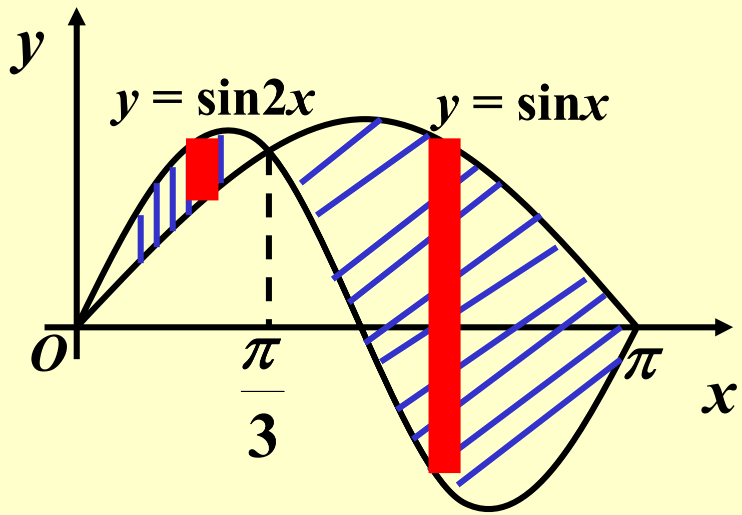
$$\mathrm{d}A=[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$$

面积 $A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$

例2. 求 $y = \sin x, y = \sin 2x\ (0 \le x \le \pi)$ 所围图形的面积。

解: 由 $\begin{cases} y = \sin x \\ y = \sin 2x \end{cases}$ 得交点 $(0, 0), (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\pi, 0)$

选 x 作积分变量，则 x 的取值范围是 $[0, \pi]$



在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上,

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\mathrm{d}x$$

在 $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ 上,

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\mathrm{d}x$$

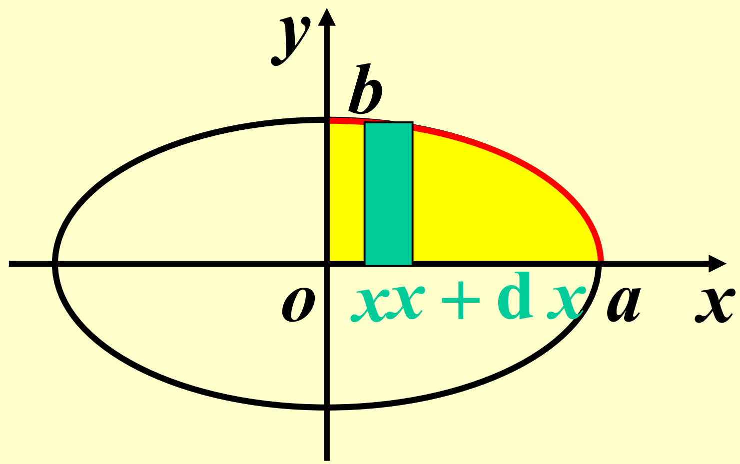
则 $A = A_1 + A_2 = \frac{5}{2}$

元素法

例3. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积 .

元素法

解: $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x = b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$



由对称性有

$$A = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$

令 $x = a\sin t$

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab$$

当 $a=b$ 时得圆面积公式

元素法

2. 极坐标情形

设曲线的极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$, $\rho(\theta) \in C[\alpha, \beta]$,

$\rho(\theta) \geq 0$, 求由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$

围成的曲边扇形的面积 .

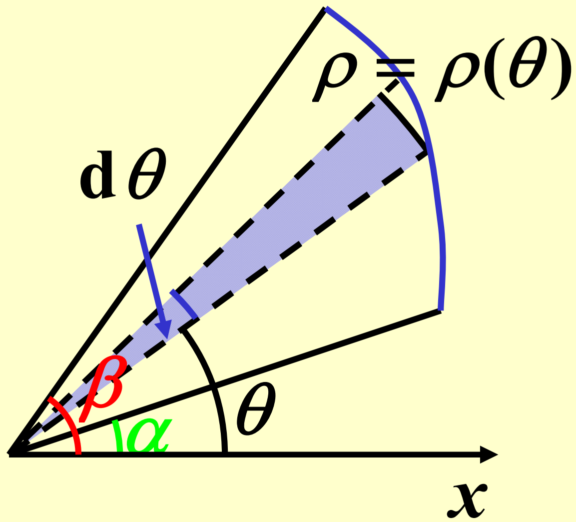
在区间 $[\alpha, \beta]$ 上任取小区间 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$

则对应该小区间的窄曲边扇形面积的近似值为

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 \,\mathrm{d}\theta$$

故所求曲边扇形的面积为

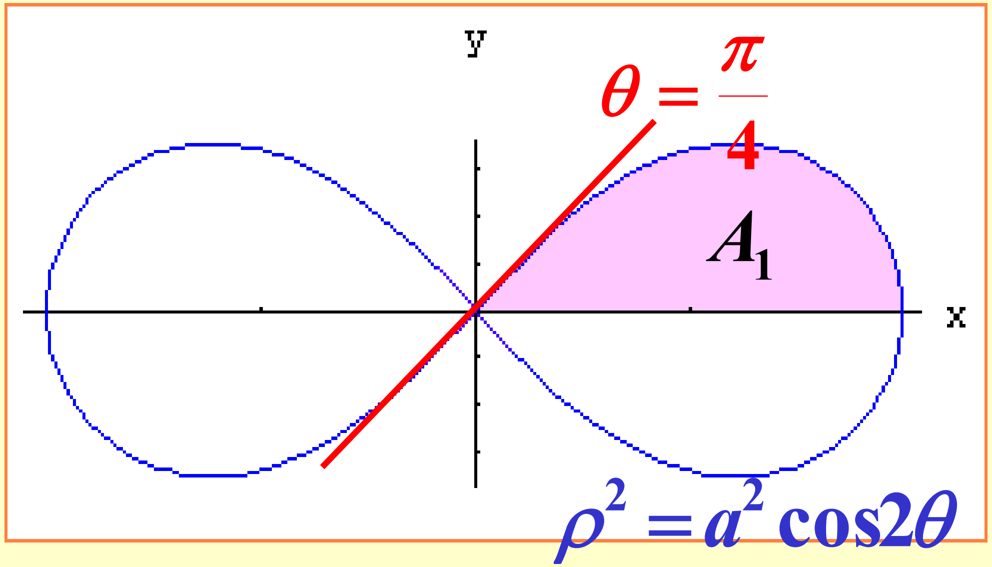
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [\rho(\theta)]^2 \,\mathrm{d}\theta$$



例4. 求双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围图形的面积 .

解: 由对称性知总面积=4倍第一象限部分面积

$$A = 4A_1 = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta = a^2$$



例5. 求心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)\ \ (a>0)$ 所围图形的面积

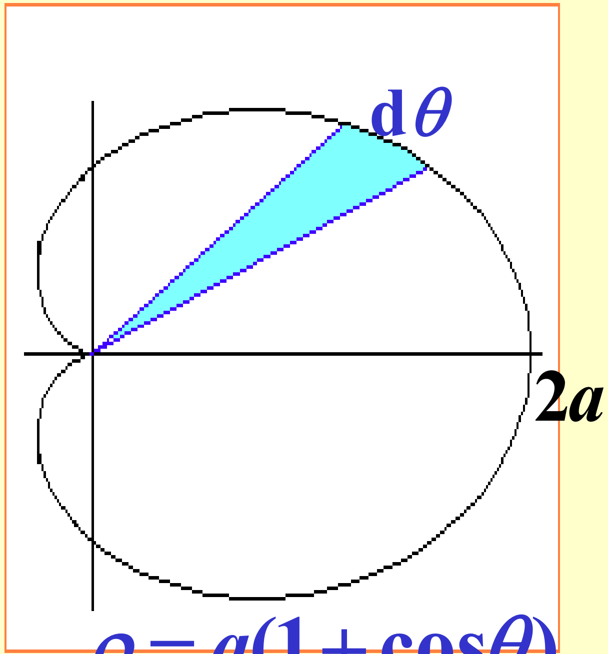
解: 利用对称性,

$$A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} 4\cos^4\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

令 $t = \dfrac{\theta}{2}$

$$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,\mathrm{d}t = 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$$



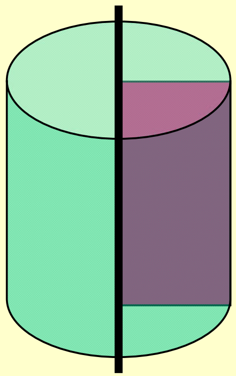
$\rho = a(1+\cos\theta)$

Back

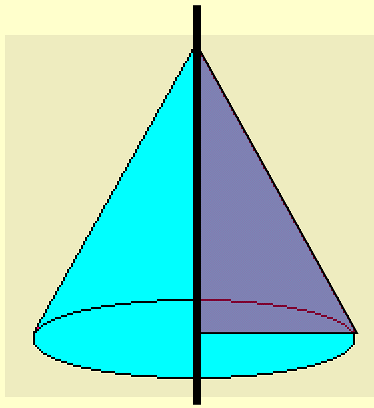
三、体积

1. 旋转体的体积

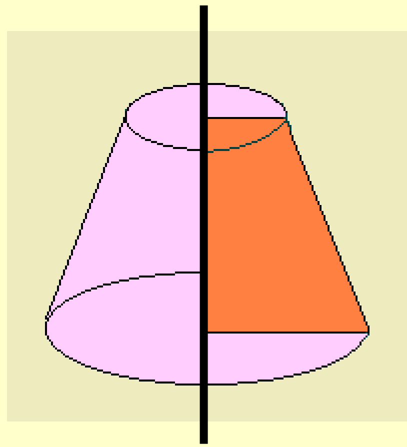
旋转体 就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体。该直线叫做 旋转轴。



圆柱



圆锥



圆台

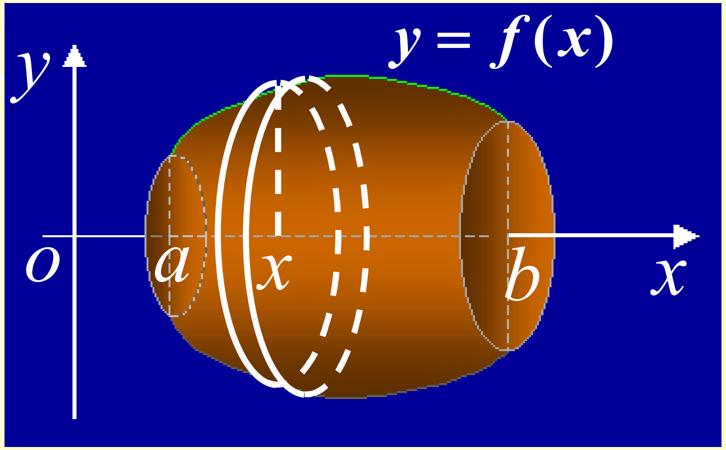
考虑以曲线段 $y=f(x)(a\le x\le b)$ 为曲边的曲边梯形

绕 x 轴旋转一周而成的立体体积，

取 x 作积分变量，$x\in[a,b]$

在 $[a, b]$ 上任取小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$

体积元素为



$$\mathrm{d}V=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

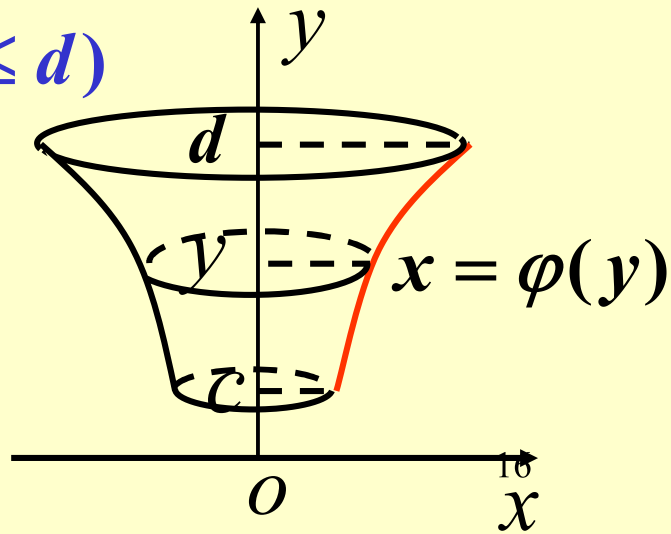
故旋转体的体积为 $V=\int_a^b\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$

当考虑连续曲线段 $x=\varphi(y)\ (c\le y\le d)$

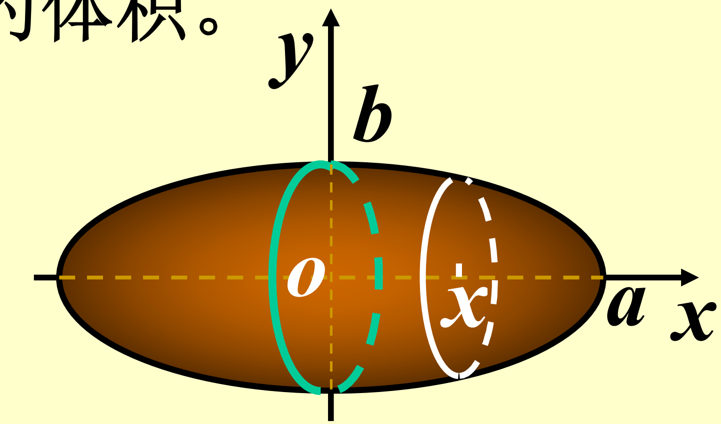
绕 y 轴旋转一周而成的立体体积时，

有 $V=\int_c^d\pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$

元素法



例6. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形分别绕 x 轴、y 轴旋转一周而成的立体的体积。



解: 绕 x 轴旋转时,

$$V_x = 2\int_0^a \pi\, y^2\, \mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^a \pi\, b^2 \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \mathrm{d}x \qquad \text{(利用对称性)}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\, ab^2$$

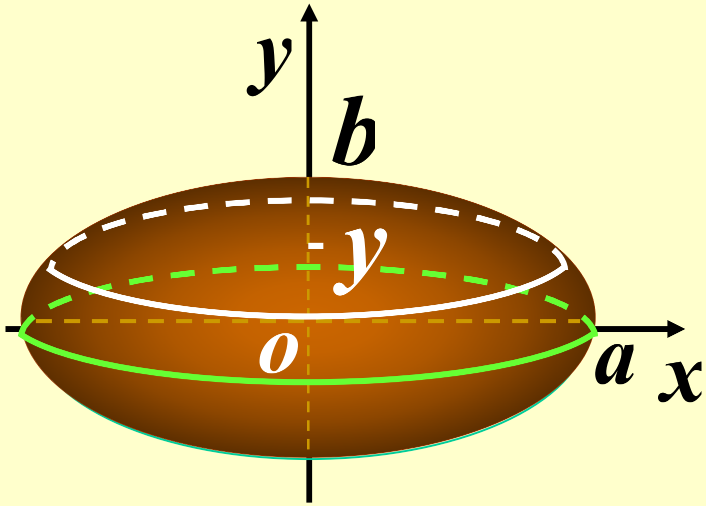
当 $a=b$ 时, 就得半径为 a 的球体的体积 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

绕 y 轴旋转时,

$$V_y = 2\int_0^b \pi x^2 \,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^b \pi\ a^2 (1 - \frac{y^2}{b^2}) \mathrm{d}y$$

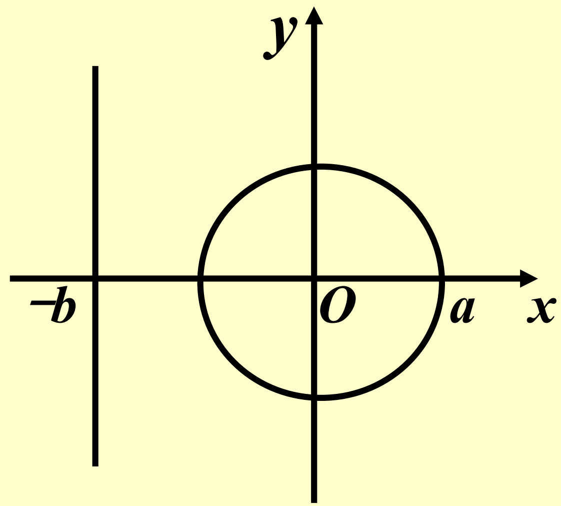
$$= \frac{4}{3}\pi a^2 b$$



(利用对称性)

例7. 圆 $x^2+y^2\le a^2$ 绕 $x=-b$ $(0<a<b)$ 旋转一周而成的立体(环体)的体积。

解： 选 y 为积分变量，



体积元素为

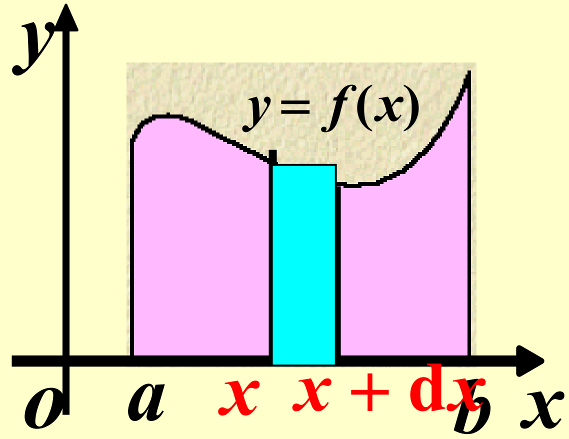
$$dV=\pi(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\,\mathrm{d}y$$

$$-\pi(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\,\mathrm{d}y=4\pi b\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\therefore V=\pi\int_{-a}^{a}4b\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y=2\pi^2a^2b$$

例8. 证明 由平面图形 $0 \le a \le x \le b$，$0 \le y \le f(x)$ 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$



证明:

体积元素 $\mathrm{d}V = 2\pi x f(x)\mathrm{d}x$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$

元素法

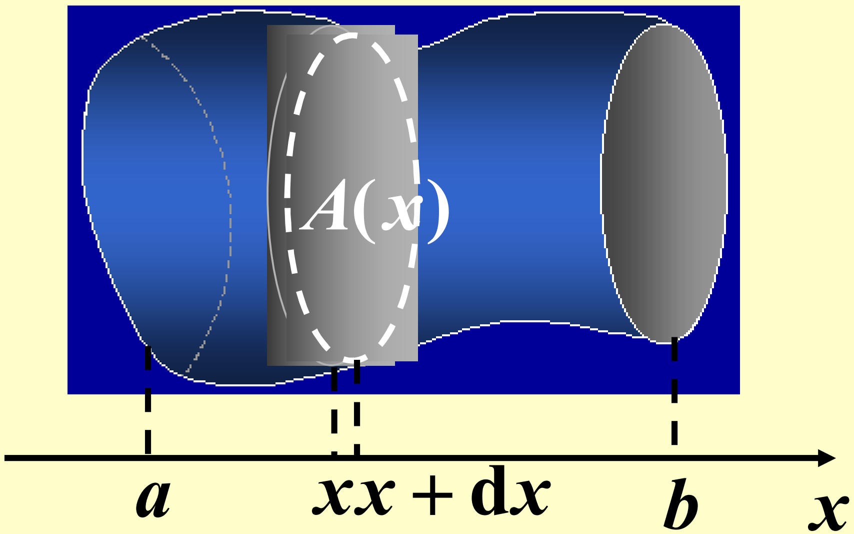
2. 平行截面面积为已知的立体的体积

设所给立体垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$, $A(x)$在$[a,b]$上连续, 则对应于小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的体积的近似值为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

因此所求立体的体积为

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

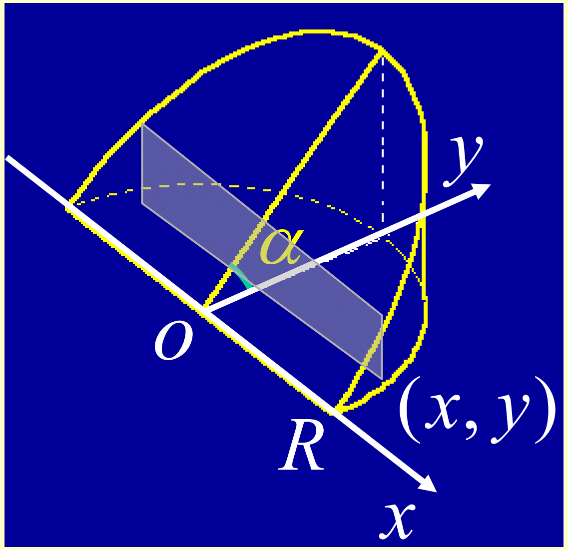


元素法

例9. 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，并与底面交成 α 角，计算该平面截圆柱体所得立体的体积.

解: 如图所示建立坐标系，则圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$

选择 y 作积分变量



垂直于 y 轴 的截面是矩形，其面积为

$$A(y) = 2x\cdot y\tan\alpha$$

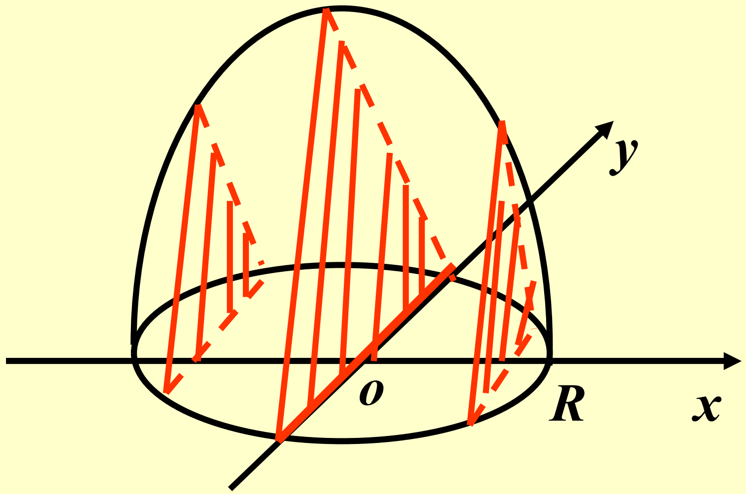
$$= 2\tan\alpha\cdot y\sqrt{R^2-y^2} \quad (0\le y\le R)$$

$$V = 2\tan\alpha\cdot\int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

例10. 计算底面是半径为 R 的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体的体积。

解： 底圆方程为 $x^2 + y^2 = R^2$

截面是等边三角形



从而边长为 $2\sqrt{R^2 - x^2}$,

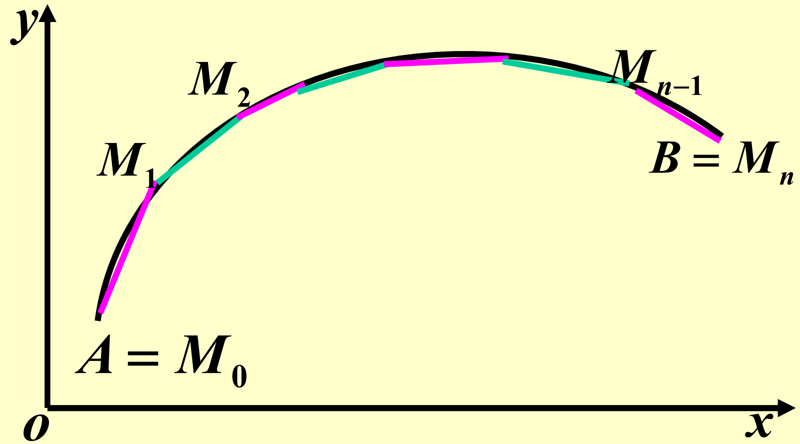
截面面积为

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{R^2 - x^2})^2 = \sqrt{3}(R^2 - x^2)$$

于是 $V = 2\int_0^R \sqrt{3}(R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\sqrt{3}R^3$

四、平面曲线的弧长

定义: 若在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意作内接折线，当折线段的最大边长 $\lambda\to 0$ 时, 折线的总长度趋向于一个确定的极限, 称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长,



即 $$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|M_{i-1}M_i\right|$$

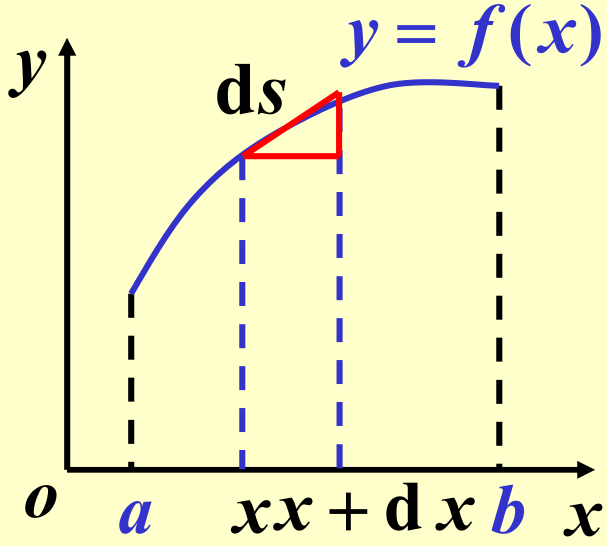
并称此曲线弧为可求长的。

定理: 光滑曲线弧是可求长的。

(具有连续导数)

利用元素法来讨论平面光滑曲线弧长的计算公式

1.直角坐标方程的曲线弧长公式



曲线弧方程 $y = f(x)$（$a \le x \le b$）

得弧长元素：$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$

$$= \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

得弧长公式 $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$

2.参数方程的曲线弧长公式

曲线弧方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ （$\alpha \le t \le \beta$）

得弧长元素： $\mathrm{d}s = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

得弧长公式 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

元素法

3.极坐标方程的曲线弧长公式

曲线弧方程 $\rho=\rho(\theta)$ （$\alpha\le\theta\le\beta$）

直角坐标与极坐标关系

$$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha\le\theta\le\beta)$$

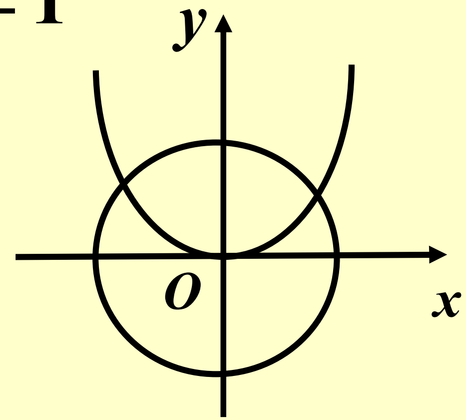
得弧长元素： $\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

得弧长公式 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

注意：求弧长时积分上下限必须 上大下小。

例11. 求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所截下的那部分的弧长。

解: 由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=\sqrt{2} \\ y_1=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=-\sqrt{2} \\ y_2=1 \end{cases}$



由对称性知 $s=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=[x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

例12. 求 心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 的长度.

解: $\rho = a(1+\cos\theta),\ \rho'(\theta) = -a\sin\theta$

$$s = 2\int_0^{\pi} a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 8a$$

通常写出这个量 U 的积分表达式的步骤是：

(1) 根据具体问题，选取一个变量例如 x 为积分变量，

并确定它的变化区间 $[a, b]$；

(2) 在 $[a, b]$ 上，任取一小区间并记作 $[x, x+\mathrm{d}x]$；

求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值.

如果 $\Delta U \approx f(x)\mathrm{d}x$ 则称 $f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}U$

为量 U 的 元素.

(3) 所求量 $U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

这就是所说的 元素法(微元法)。

Back

第七节　定积分的物理应用

一、变力沿直线所作的功

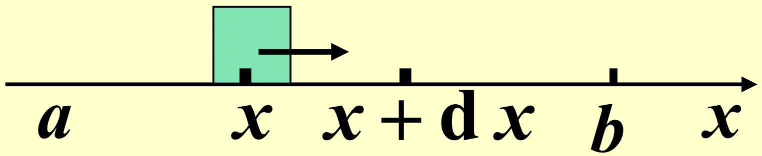
二、液体对薄板的侧压力

一、变力沿直线所作的功

设物体在连续变力 $F(x)$ 作用下沿 x 轴从 $x=a$ 移动到 $x=b$，力的方向与运动方向平行，求变力所做的功。

在 $[a,b]$ 上任取子区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$，在其上所作的功元素为

$$\mathrm{d}W = F(x)\,\mathrm{d}x$$



因此变力 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上所作的功为

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

元素法

例1. 由实验知道，弹簧在拉伸过程中， 需要的力 F(单位：N)与弹簧的伸长量 x(单位:cm) 成正比，即 $F=kx$ (k 是比例常数)

如果把弹簧由原长拉伸 bcm，计算所做的功。

解: 当弹簧拉伸 $x$cm 时, $F=kx$

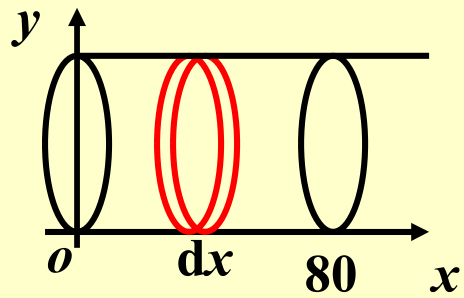
于是外力做功元素 $\mathrm{d}W= kx\mathrm{d}x$

而弹簧拉伸 bcm，

从而 $$W=\int_0^b kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}kb^2(N\cdot cm)$$

例2.直径为 20cm、高为 80cm 的圆柱体内充满压强为 10N/cm² 的蒸汽。设温度保持不变，要使蒸汽体积缩小一半，问需要做多少功?

解：建立坐标系如图所示。



$$k = PV = 10\cdot\pi 10^2 80 = 80000\pi$$

当蒸汽的高为 $x$cm 时的压强为

$$P(x) = \frac{k}{V} = \frac{80000\pi}{\pi\cdot 10^2\cdot x} = \frac{800}{x}$$

于是 $F(x) = P(x)S = \dfrac{800}{x}\cdot\pi\cdot 10^2$

则 $W = \displaystyle\int_{80}^{40}\frac{800}{x}\cdot\pi\cdot 10^2\,\mathrm{d}x$

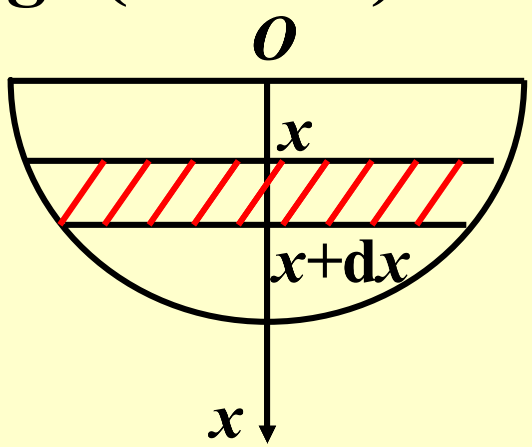
$$= -80000\pi\ln 2(N\cdot cm) = -800\pi\ln 2(J)$$

例3. 有一半径为 4 米开口向上的半球形容器, 容器内盛满了水,试问要将容器内的水全部吸出需作多少功 ?

解: 取坐标原点在球心, x 轴垂直向下建立坐标系,

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\pi(4^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}W=\rho\cdot\pi(4^2-x^2)\mathrm{d}x\cdot g\cdot x=\pi\rho gx(4^2-x^2)\mathrm{d}x$$



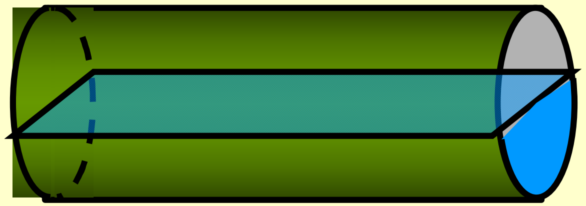
$$W=\int_0^4\pi\rho gx(4^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=64\pi\rho g$$

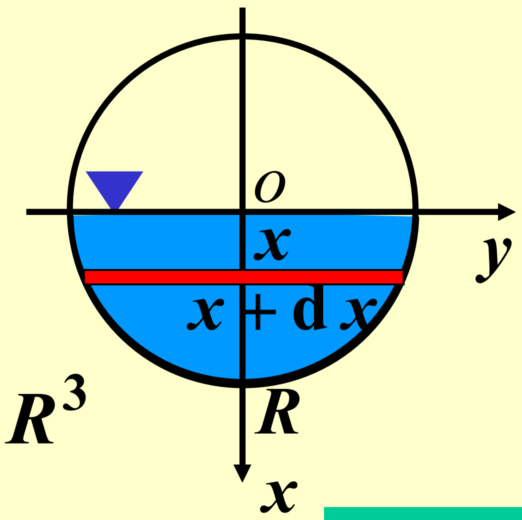
二、液体对薄板的侧压力

压力=压强×受力面积 $=\rho g h\times$受力面积

例4. 一水平横放的半径为 R 的圆桶,内盛半桶密度为 ρ 的液体，求桶的一个端面所受的侧压力。



解: 建立坐标系如图. 所论半圆的方程为 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}\ (0\le x\le R)$



侧压力元素

$$\mathrm{d}F = g\rho x\, 2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

端面所受侧压力为

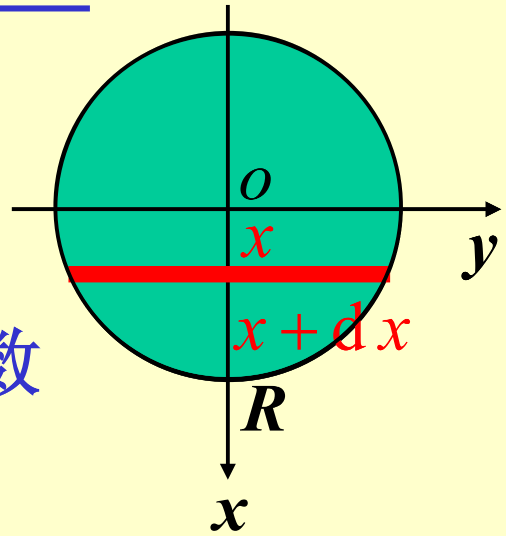
$$F=\int_0^R 2g\rho\, x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2g\rho}{3}R^3$$

元素法

说明: 当桶内充满液体时,小窄条上的压强为 $g\rho(R+x)$,

侧压力元素 $\mathrm{d}F = g\rho(R+x)\,\underline{2\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

故端面所受侧压力为



$$F = \int_{-R}^{R} 2g\,\rho(R+\underline{x})\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

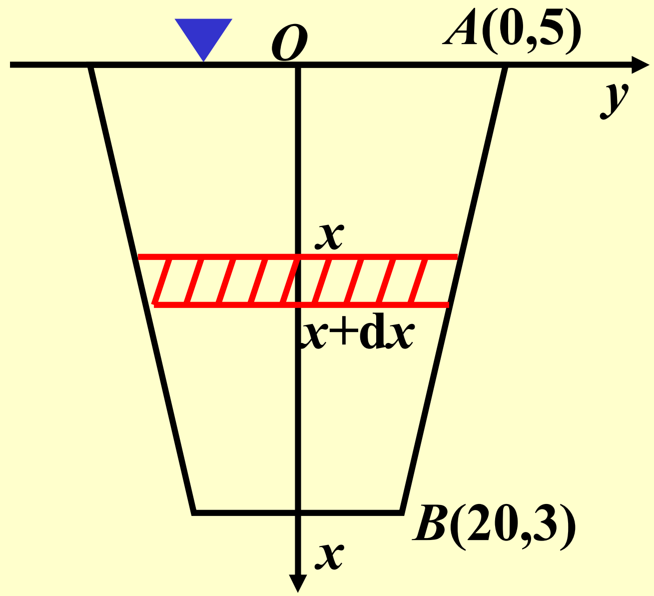
奇函数

$$= 4Rg\rho\underbrace{\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x}_{\frac{1}{4}R^2\pi}$$

$$= \pi g\rho R^3$$

例5. 有等腰梯形水闸, 上底长 10m, 下底 6m, 高 20m。试求当水面与上底相齐时, 闸门一侧所受的水压力。

解: 建立坐标系如图所示。



直线 AB 的方程为 $y = -\dfrac{x}{10} + 5$

闸门上对应于区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$

窄条形所受的压力约为

$$\mathrm{d}F = \rho g x \cdot 2\left(-\frac{x}{10} + 5\right)\mathrm{d}x$$

$$F = 2 \cdot \rho g \int_0^{20} x\left(-\frac{x}{10} + 5\right)\mathrm{d}x$$