高等数学A(上)

理学院

高等数学教学中心

一、《高等数学》的性质、目的及主要内容

1．本课程的性质

本课程是工科高等教育的一门重要的通识基础课。

2．本课程的目的

本课程教育的目的是使学生从高等数学理论、方法、能力三方面得到基本训练，从而为后续课程的学习奠定必不可少的数学基础，也为学生以后从事专业技术工作奠定数学基础。

3. 主要内容

(1) 函数、极限与连续 --- 数学分析基础

(2) 微分学 $\begin{cases} \text{一元微分学} \\ \text{多元微分学} \end{cases}$

(3) 积分学 $\begin{cases} \text{一元积分学} \\ \text{多元积分学} \end{cases}$

(4) 无穷级数

(5) 常微分方程

(6) 复变函数初步

二、《高等数学》课程的特点与地位

1. 本课程的特点

（1） 内容抽象　　（2） 推理严谨及结论确定

（3） 应用广泛　　（4） 累计性强

2. 本课程的地位

(1) 是科学技术得以发展的基础。

(2) 是后续多门数学课程的学习基础。

(3) 是学习物理、电路分析、信号系统、电磁场、数字电路等课程的必须的基础。

(4) 考研必考科目。

三、学习要求、学习方法

1. 要求：

(1) 课堂纪律：上课希望大家认真听讲，并作好笔记。（每人备一个笔记本）

(2) 及时抓好预习、复习这一环节。

(3) 多交流、多讨论。

(4) 独立完成作业 (按时、保质、保量。)

(5) 注意前后沟通，作好章、节小结。

2. 方法：

提倡预习、 突出听课、强调复习，在理解概念的基础上多做题。

四、其它环节

1. 考试: 过程化管理

2. 参考书:

(1). 《高等数学同步学习指导》

（南京邮电大学高等数学教学中心编写）

(2). 《高等数学 (上) 》 同济第六版 (教材)

3. 作业与辅导答疑

作业： 《高等数学》同步练习册

辅导答疑

第 1 章　　极限与连续

1.1 函数

1.1. 函数

1.1.1. 预备知识介绍

1. 集合 $N=\{\text{全体自然数}\}$ $N^{+}=\{\text{全体正整数}\}$

$R=\{\text{全体实数}\}$ $Q=\{\text{全体有理数}\}$

$Z=\{\text{全体整数}\}$ $C=\{\text{全体复数}\}$

2. 区间与邻域

区间： $(a,b)=\{x|a<x<b\}$ $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$

类似 $(a,b]$, $[a,b)$,

$[a,+\infty)=\{x|x\ge a\}$

类似 $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$.

邻域：设 δ 是任一实数，且 $\delta > 0$,

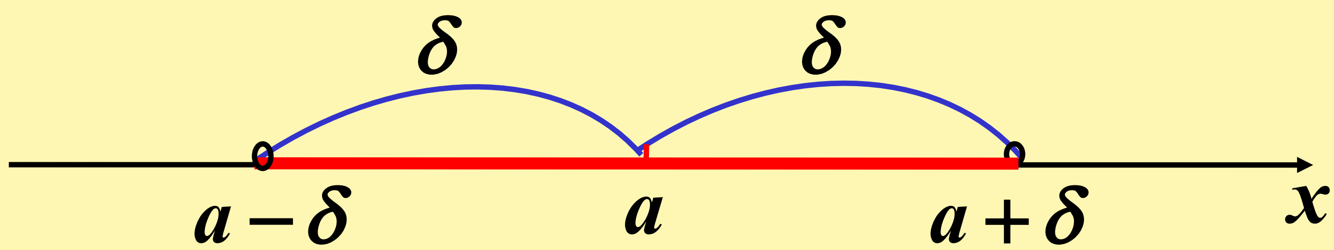
则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，

记为 $U(a,\delta)$, 点 a : 这邻域的中心

δ : 这邻域的半径

$$U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

$$= \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$



去心邻域：$U^0(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta, \delta > 0\}$

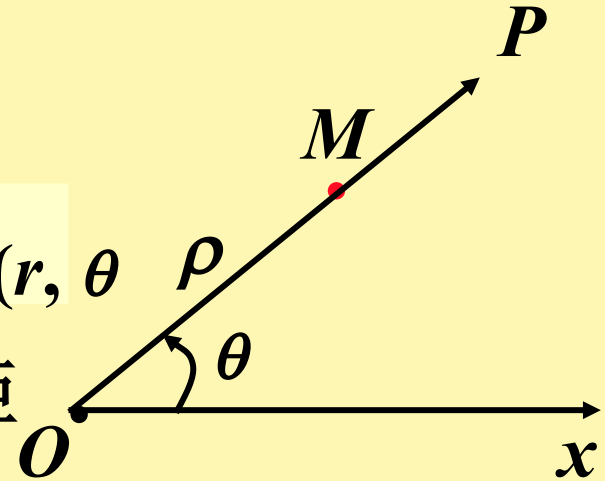
3. 极坐标系

O 称为极点　Ox 称为极轴，

M 点的极坐标记为 $M(\rho,\theta)$ 或 (r,θ)

ρ 是射线 OP 上由 O 到 M 的距离

$\rho=|OM|$，ρ称为极径。



θ 是射线 OP 绕 O 点由 Ox 位置按逆时针方向旋转

第一次转到 OM 位置时所转过的角，θ称为极角。

极坐标与直角坐标的关系：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

极坐标与直角坐标的关系: $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = a^2 \ (a > 0)$$

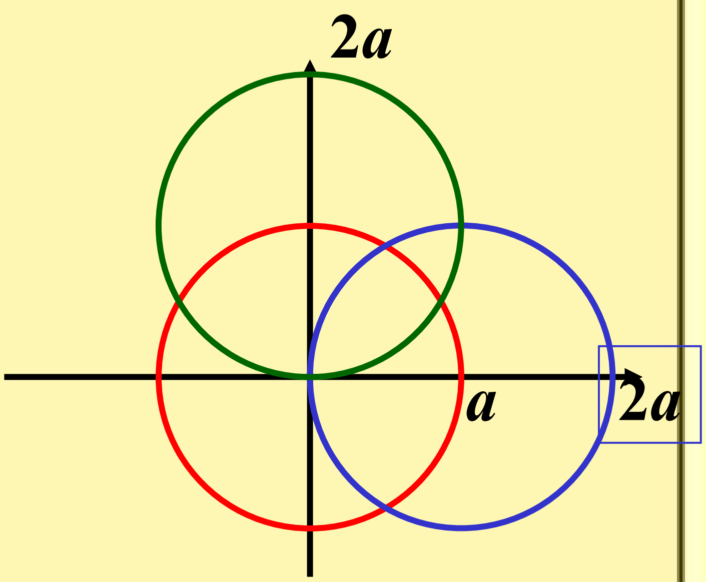
$$\rho = a \ (a > 0)$$

$$x^2 + y^2 = 2ax \ (a > 0)$$

$$\rho = 2a\cos\theta \ (a > 0), \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

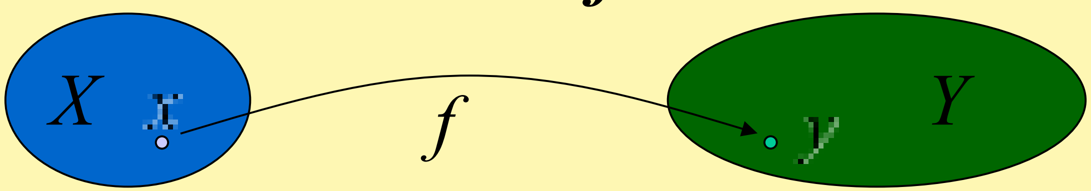
$$x^2 + y^2 = 2ay \ (a > 0)$$

$$\rho = 2a\sin\theta \ \ (a > 0), \ \ 0 \le \theta \le \pi$$



1.1.2. 映射

定义 1. 设 X, Y 是两个非空集合，若存在一个对应规则 f，使得 $\forall x \in X$，有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作 $f: X \to Y$.



元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的像，记作 $y = f(x)$.

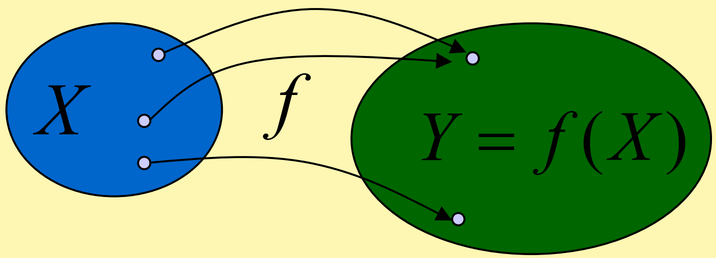
元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的原像．

集合 X 称为映射 f 的定义域；

Y 的子集 $w_f = f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ 称为 f 的值域．

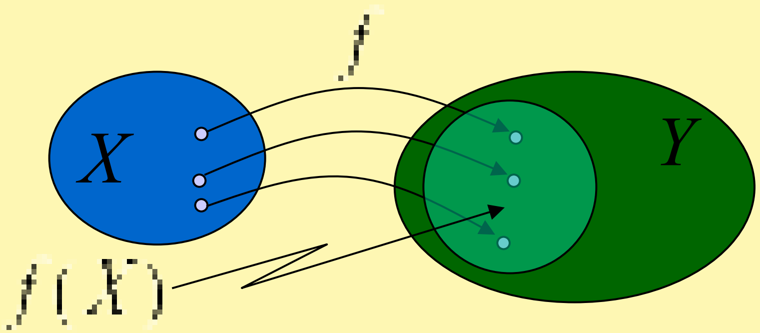
对映射 $f: X \to Y$

若 $f(X)=Y$, 则称 f 为满射;



若 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 有

$f(x_1) \neq f(x_2)$



则称 f 为单射;

若 f 既是满射又是单射,则称 f 为双射 或一一映射.

1.1.3、函数

1. 函数的概念

定义 2. 设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f : D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，记为

$$y = f(x),\ x \in D$$

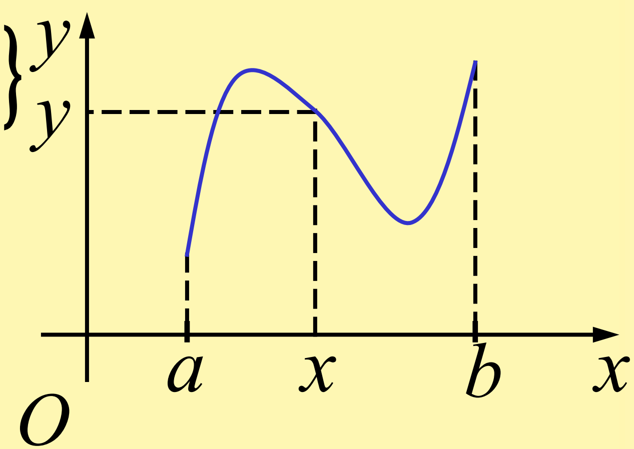
定义域

因变量

自变量

$$W_f = f(D) = \{\, y \mid y = f(x), x \in D \,\}$$

称为值域



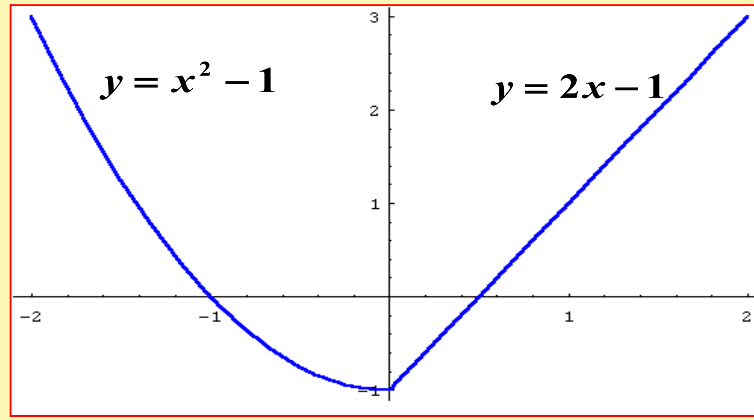
几何意义：函数 $y=f(x)$， $x \in D$

在平面直角坐标系中表示一段曲线。

2. 分段函数

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同的式子来表示的函数，称为分段函数．

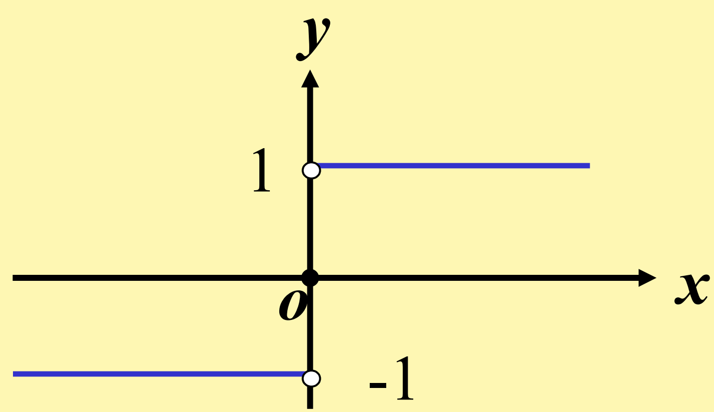
例如， $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ x^2-1, & x\le 0\end{cases}$



3. 几个特殊的分段函数

(1) 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & 当x>0\\ 0 & 当x=0\\ -1 & 当x<0\end{cases}$$



$$|x|=\operatorname{sgn} x\cdot x$$

(2) 取整函数 $y=[x]$

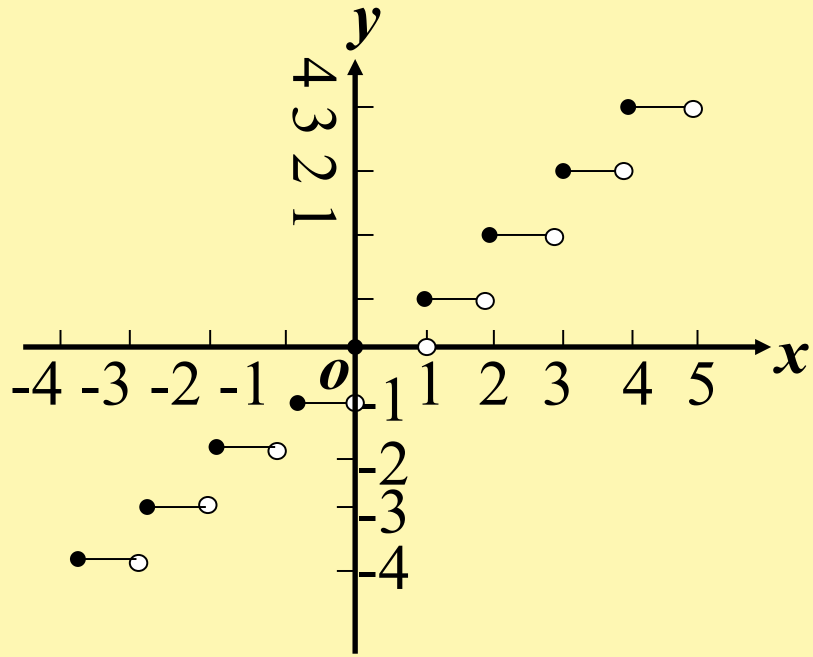
$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数

$y=[x]=n,$

$n \le x < n+1, n \in Z$

$[0.1]=0$　　$[\sqrt{2}]=1$

$[-1]=-1$　　$[-\pi]=-4$



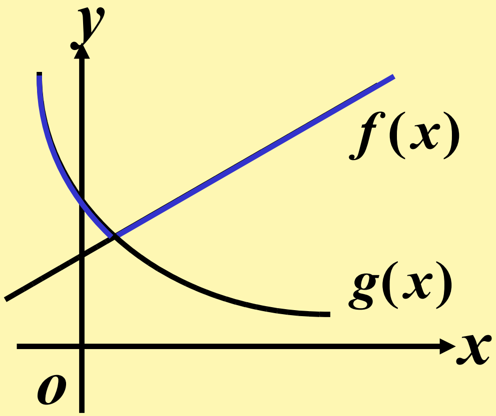
阶梯曲线

(3) 狄利克雷函数

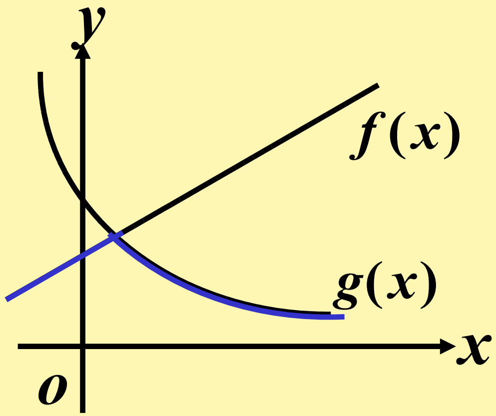
$$y=D(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x\text{是有理数时}\\ 0 & \text{当}x\text{是无理数时}\end{cases}$$

(4) 取最值函数

$y = \max\{f(x), g(x)\}$



$y = \min\{f(x), g(x)\}$



4. 函数的几种特性

(1) 有界性：　　设 X⊆D,若 $\exists M>0$, 对 $\forall x\in X$,

恒有 $|f(x)|\le M$,则称$f(x)$在X上有界。

若$\exists M_1, \forall x\in X$, 有 $f(x)\le M_1$成立,则称$f(x)$在X上有上界

若$\exists M_2, \forall x\in X$, 有 $f(x)\ge M_2$成立,则称$f(x)$在X上有下界

可以证明（课后完成）

$f(x)$ 在 X 上有界 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界

如： $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界.

例 1：试证 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界，在 $(0,1)$ 内无界.

证：(1) $\because \forall x \in (1,2)$, $\left|\dfrac{1}{x}\right| \le 1$ $\therefore y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界.

(2) （首先要明确“无界函数”含义：若对

$\forall M>0$, 总 $\exists x_{。} \in I$, 使 $|f(x_{。})| > M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界.）

$$\forall M>0, \exists x_{。}=\frac{1}{M+1} \in (0,1) \quad \left|\frac{1}{x_{。}}\right| = M+1 > M$$

$\therefore y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

注：有界性问题通常与考察的区间 I 有关，如不加说明，则是在函数的整个定义域上讨论。

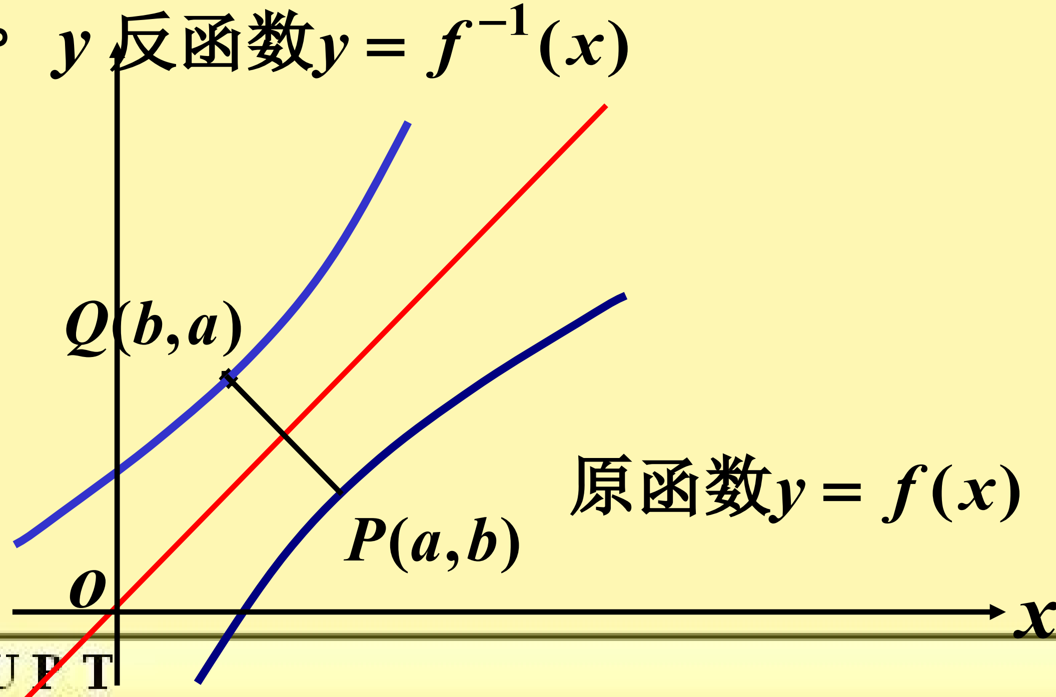
(2). 奇、偶性，单调性，周期性。

4. 反函数的概念

定义3设$y = f(x), x \in D$,**值域为**W**，若对每一个**$y \in W$,**有满足**关系式$y = f(x)$的唯一x**与之对应，这就得到了** 一个新**函数，记为**$x = f^{-1}(y)$, 称$x = f^{-1}(y)$**为**$y = f(x)$的反函数。

注：若$y = f(x)$**在**D**上单调,则反函数一定存在。**

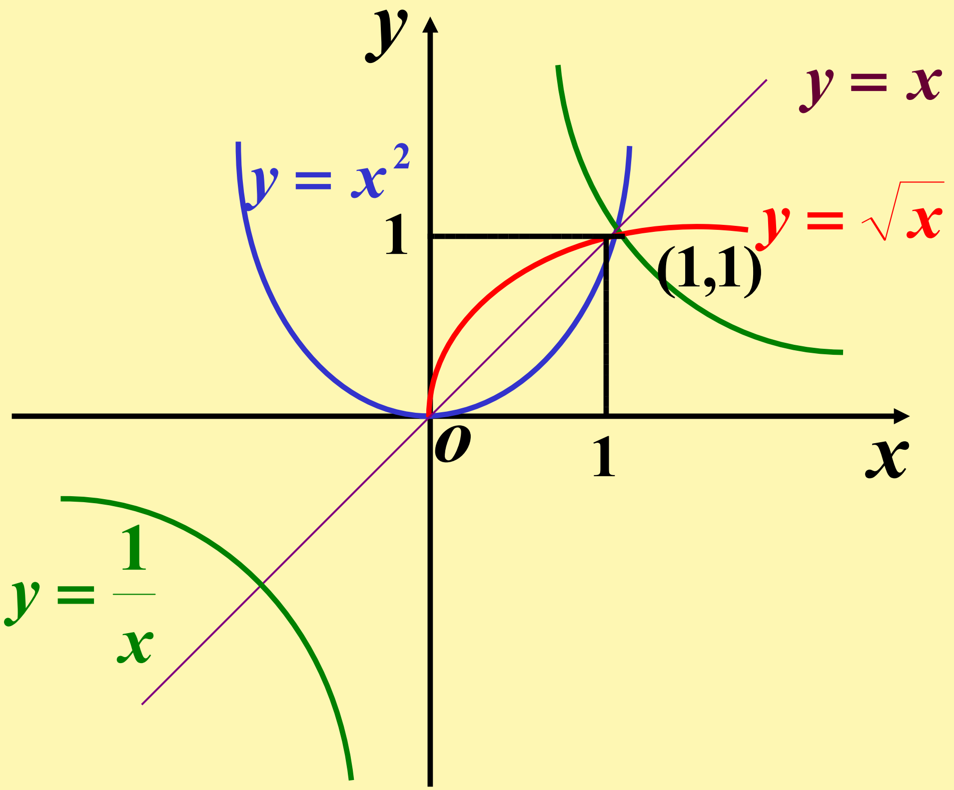
原函数与反函数的图形关于直线 x 对称。



1.1.4. 初等函数

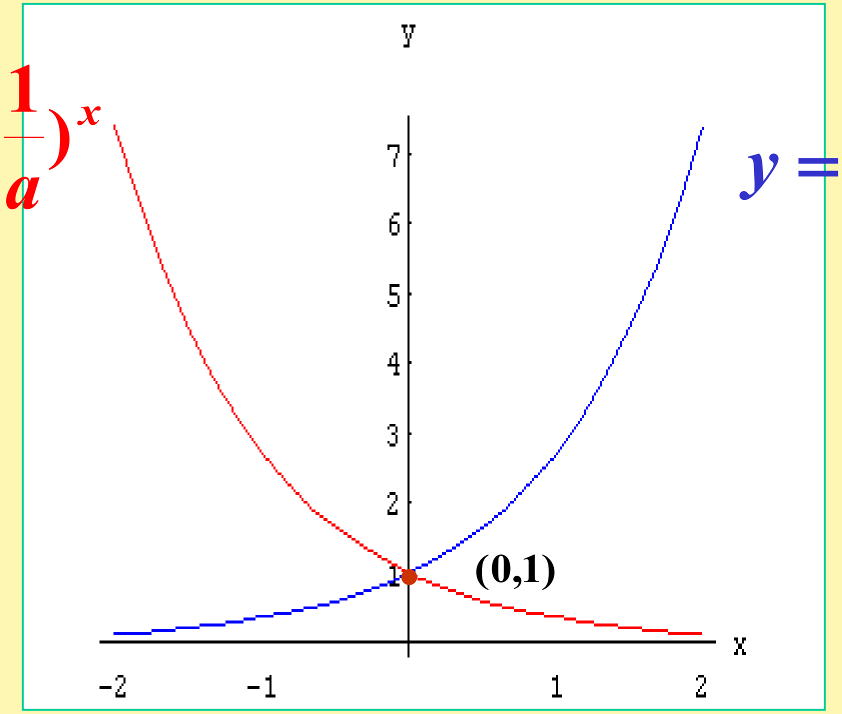
1. 基本初等函数

(1)、幂函数 $y = x^{\mu}$ (μ是常数)



(2)、指数函数 $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$ $\quad y = e^x$

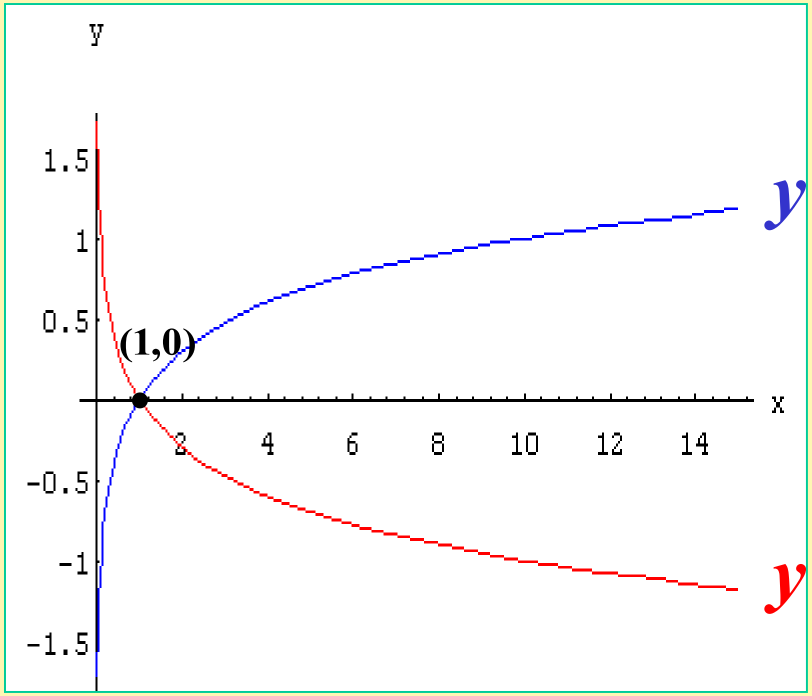
$y = (\frac{1}{a})^x$



$y = a^x$

$(a > 1)$

(3)、对数函数 $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$ $y=\ln x$



$y=\log_a x$

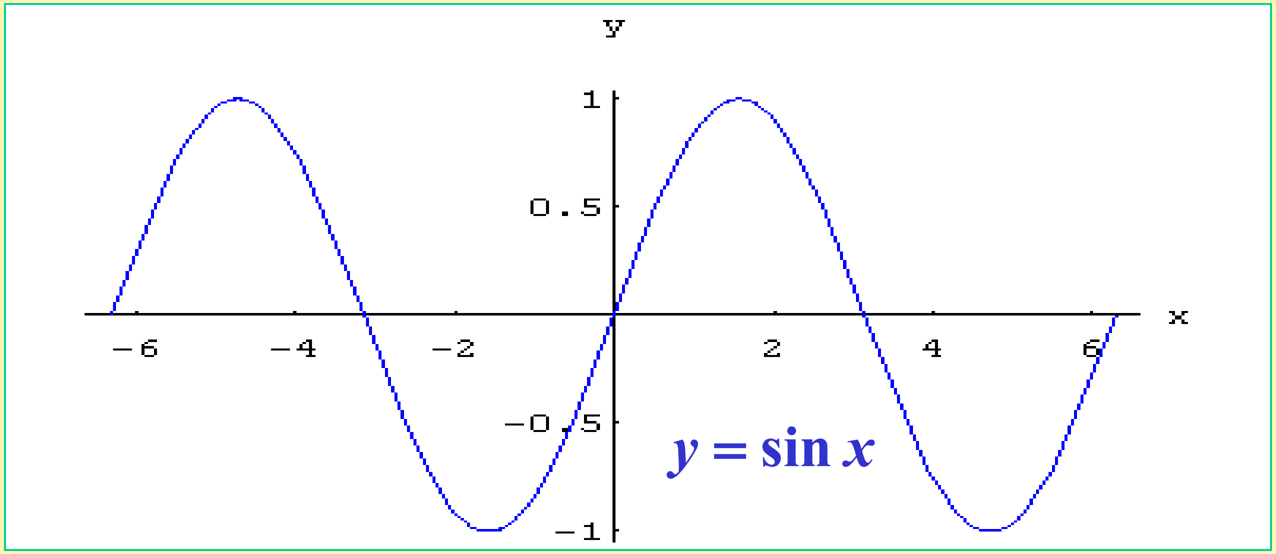
$(a>1)$

$y=\log_{\frac{1}{a}} x$

(4)、三角函数

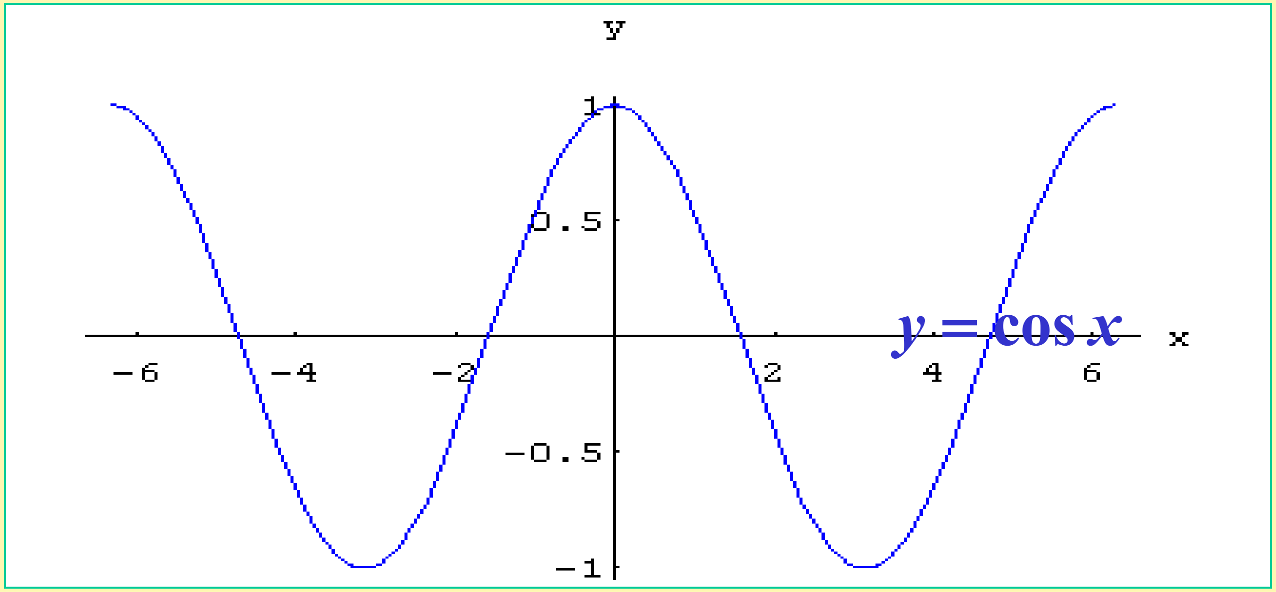
正弦函数

$y = \sin x$



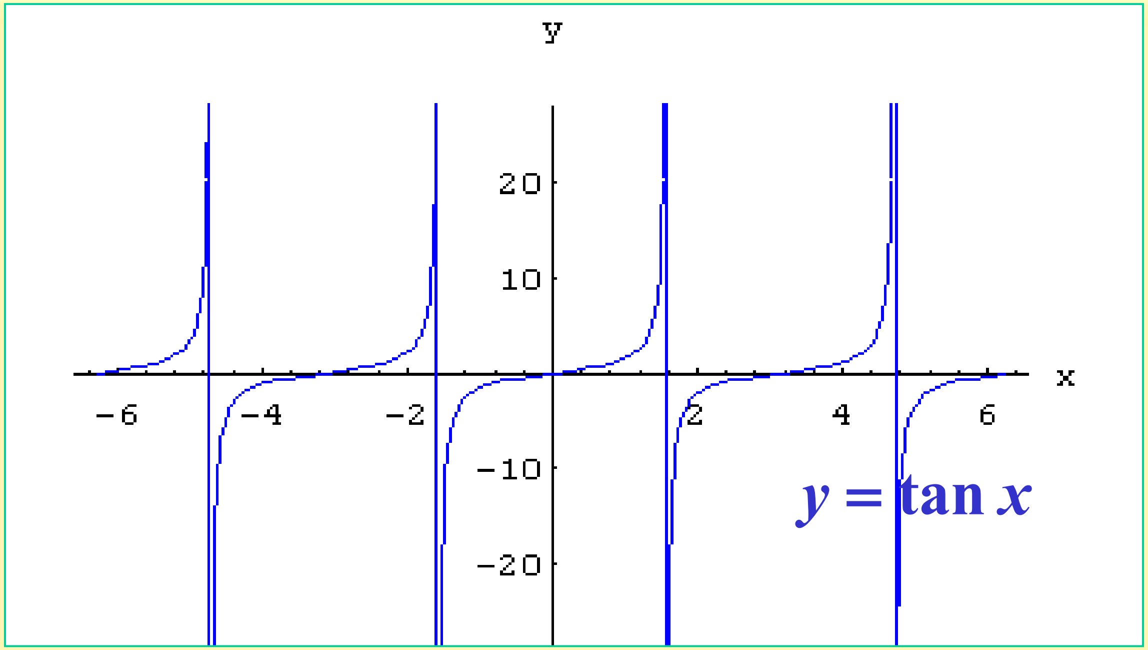
余弦函数

$y = \cos x$



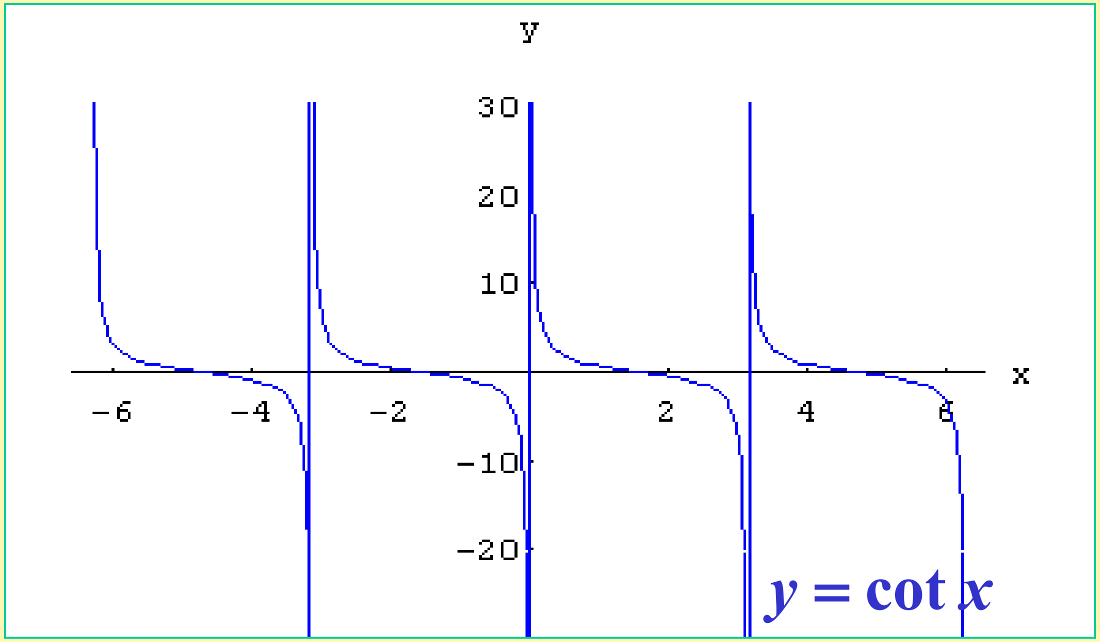
正切函数

$$y = \tan x$$



余切函数

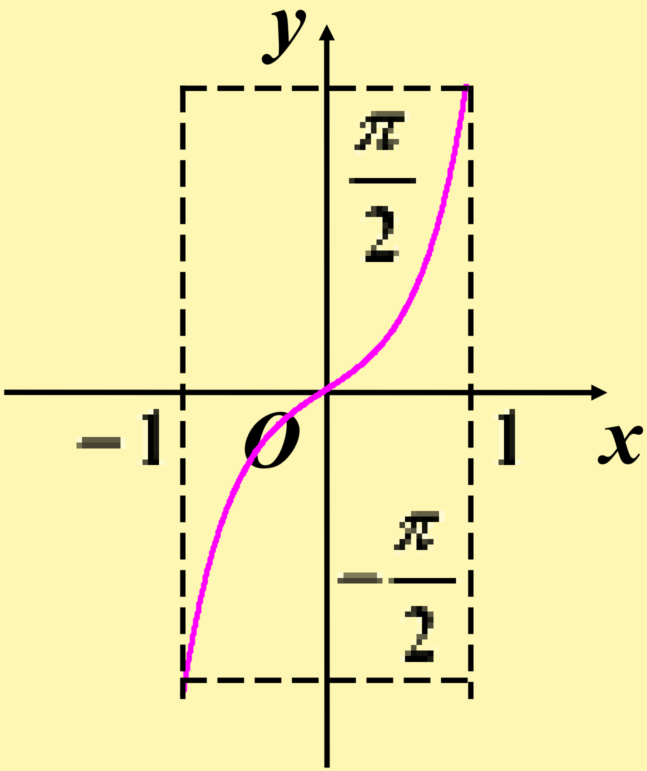
$$y = \cot x$$



(5)、反三角函数

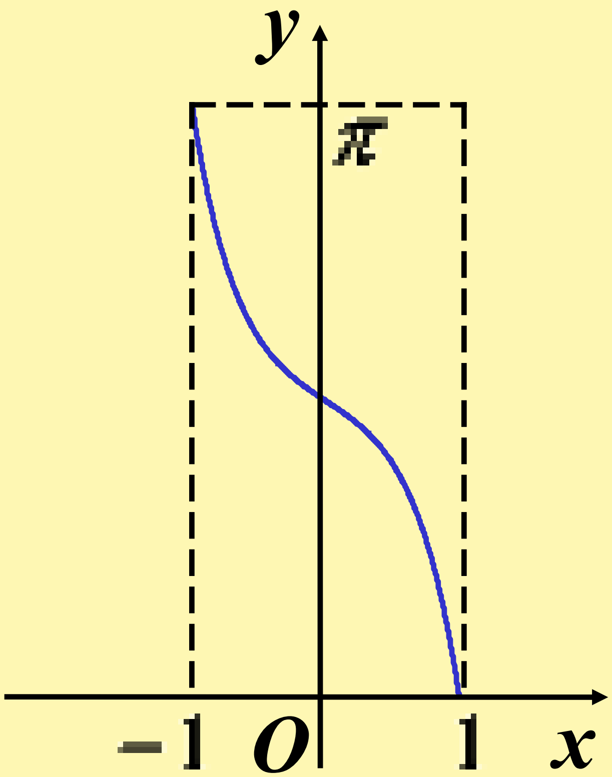
反正弦函数 $y = \arcsin x$

定义域：$x \in [-1,1]$**值域**：$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



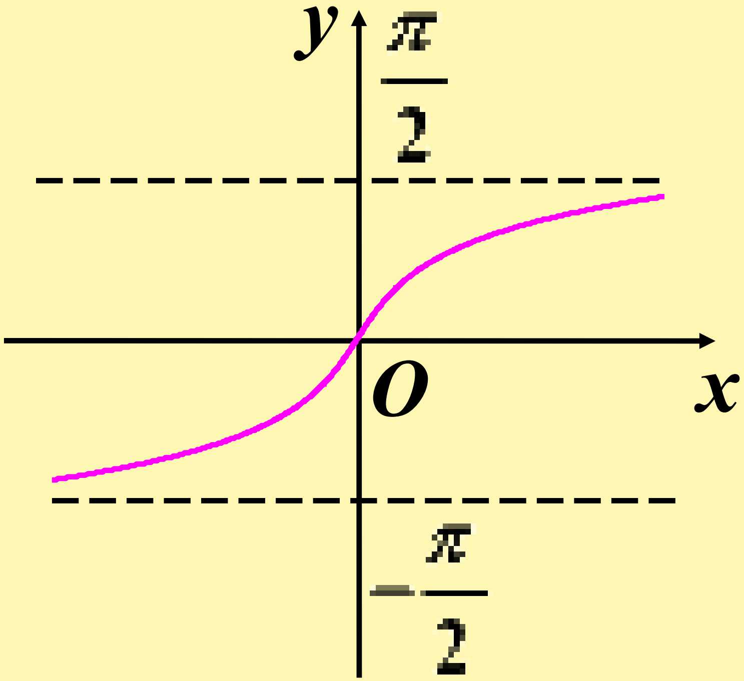
反余弦函数 $y = \arccos x$

定义域：$x \in [-1,1]$**值域**：$y \in [0, \ \pi]$



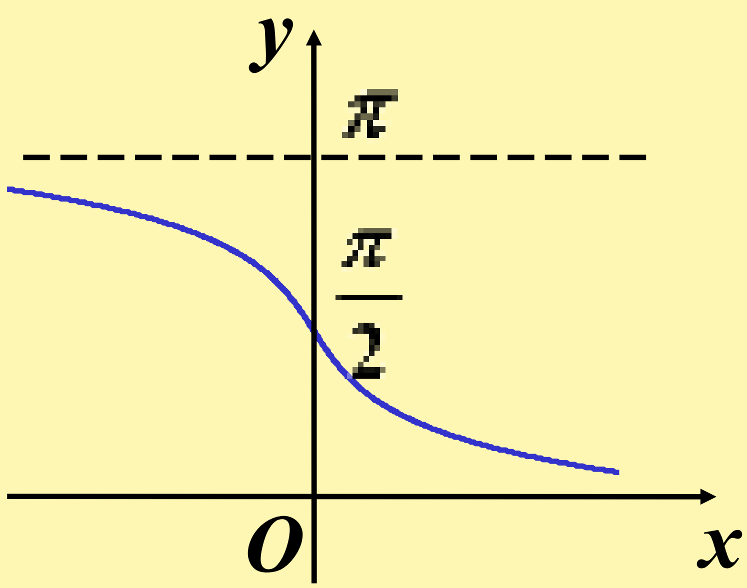
反正切函数 $y = \arctan x$

定义域：$x \in (-\infty, +\infty)$ **值域**：$y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$



反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$

定义域：$x \in (-\infty, +\infty)$ **值域**：$y \in (0, \pi)$



2. 复合函数

定义 4: 设函数$y=f(u)$, $u\in D_1$, $u=g(x)$, $x\in D$,

且$g(D)\cap D_1\neq\varnothing$, 则函数$y=f[g(x)]$

称为由$u=g(x)$和$y=f(u)$复合而成的复合函数。

x为自变量, y为因变量, u为中间变量。

注意：构成复合函数的条件$g(D)\cap D_1\neq\varnothing$不可少。

例如，函数$y=\arcsin u$与$u=2\sqrt{1-x^2}$可复合成函数

$$y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2},\ x\in D=[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{3}}{2},1]$$

而函数$y=\arcsin u$与$u=1+e^x$就不能复合成一个函数。

另外，复合函数也可以由两个以上的函数复合而成。

如：$y=\ln u$，$u=1+v$，$v=\sqrt{w}$，$w=1+x^2$复合成函数

$$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$$

其定义域与$w=1+x^2$的相同（$-\infty,+\infty$）

同时，也可把一个复合函数“拆”成几个简单函数。

例如函数$y=\lg\cos(\sqrt{1+x^2})$可以分解成：

$$y=\lg u,\quad u=\cos v,\quad v=\sqrt{w},\quad w=1+x^2$$

注：简单函数指基本初等函数或常数及几个基本初等函数的某种四则运算而成的函数

例 2　把下列函数分解成由几个简单的函数复合。

(1) $y = e^{\sin\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$

(2) $y = (\arctan\sqrt{\sin^3 x})^3$

解 (1) 由$y = e^u, u = \sin v, v = \sqrt{w}, w = \dfrac{1+x}{1-x}$复合而成

(2) $y = u^3, u = \arctan v, v = \sqrt{w}, w = t^3, t = \sin x$

复合而成.

例 3 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geq 0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}2-x & x\leq 0\\ 2+x & x>0\end{cases}$$

求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

解 : $f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x) & g(x)<0\\ -g(x) & g(x)\geq 0\end{cases},$

$$g(x)=2+|x|\geq 2, \qquad \Rightarrow g(x)\geq 0,$$

$$\Rightarrow f[g(x)]=-g(x)=-2-|x|=\begin{cases}-2+x & x\leq 0\\ -2-x & x>0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ -x & x\geq 0 \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} 2-x & x\leq 0 \\ 2+x & x>0 \end{cases}$$

$$g[f(x)]=\begin{cases} 2-f(x) & f(x)\leq 0 \\ 2+f(x) & f(x)>0 \end{cases}.$$

$$f(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\geq 0,\ f(x)>0 \Leftrightarrow x<0$$

$$g[f(x)]=\begin{cases} 2-(-x) & x\geq 0 \\ 2+x^2 & x<0 \end{cases} =\begin{cases} 2+x & x\geq 0 \\ 2+x^2 & x<0 \end{cases}.$$

3. 初等函数 由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合所构成的可用一个式子表示的函数，称为初等函数．

4. 双曲函数与反双曲函数（自学）

内容小结

1. 预备知识
2. 函数的定义
3. 函数的特性 —— 有界性，单调性，奇偶性，周期性
4. 复合函数、初等函数

作业： P1 1.1 课后作业：书上习题 1.1

预习： 数列的极限 、函数的极限