1.2 数列的极限

1.2.1 数列的定义

1.2.2 数列极限的概念

1.2.3 收敛数列的性质

1.2.4 子数列的概念

2.1. 数列的极限

2.1.1. 数列的定义

1. 定义：形如 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n \ldots\ldots$ 的一列依次 (序) 排列的数

称为数列. 记为: $\{x_n\}$.

注: $\{x_n\}$ 它是整数 n 的函数.(整标函数）。

例： (1). $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$

(2). $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$

(3). $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$

(4). $a+1, a-\dfrac{1}{2}, a+\dfrac{1}{3}, \cdots, a+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}, \cdots$

2. 数列的特性

(1). 有界性 对数列 $\{x_n\}$, 若存在 M>0, 使所有的 x_n 有 $|x_n| \le M$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列 , 否则称无界数列.

若存在 M_1, 对一切 x_n, 有 $x_n \ge M_1$, 则称 $\{x_n\}$ 有下界 .M_1 为一下界

若存在 M_2, 对一切 x_n, 有 $x_n \le M_2$, , 则称 $\{x_n\}$ 有上界 ,M_2 为一上界

注：可以证明：数列有界等价与数列既有上界又有下界。

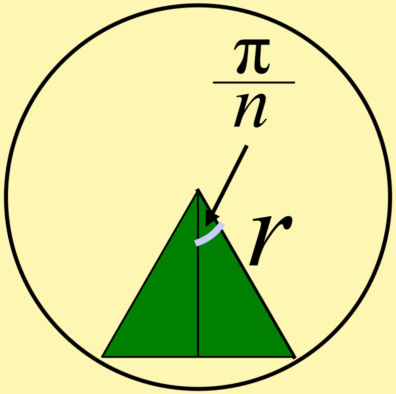
(2). 单调性 对数列 $\{x_n\}$,

若 $x_n \le x_{n+1}\ (n = 1, 2, \cdots)$ 则 $\{x_n\}$ 为 递增数列

若 $x_n \ge x_{n+1}, (n = 1, 2, \cdots)$ 则 $\{x_n\}$ 为递减数列 .

1.2.2 数列的极限

引例 . 设有半径为 r 的圆用其内接正 n 边形的面积 A_n 逼近圆面积 S .



如图所示 ， 可知正 n 边形的面积

$$A_n = nr^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$$(n = 3, 4, 5, \cdots)$$

当 n 无限增大时 A_n 无限逼近 S .

，

（刘徽割圆术）

问题：如何刻画？

$$以\{x_n\}=\{\frac{n}{n+1}\}为例, a=1为例.$$

换个说法：当 n 无限增大时，x_n 趋近于定数 a 等价于：

只要 n 充分大，x_n 就可以与 a 任意接近

（接近可用 $|x_n-a|$ 来衡量）等价于只要 n 充分大，

$|x_n-a|$ 可以任意小。（小到可以小于任意的数，条件是 n 充分大）。

$$\because \left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$$

给定0.1, 只要$n>9$, $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<0.1$,

给定0.01, 只要$n>99$, $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<0.01$,

给定0.001, 只要$n>999$, $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<0.001$,

给定$\varepsilon>0$, 只要$n>N=[\frac{1}{\varepsilon}-1]$, $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

1. 定义 $(\varepsilon - N)$

若对$\forall \varepsilon > 0$,总$\exists N > 0$,当$n > N$时就有$|x_n - a| < \varepsilon$,

则称a为数列$\{x_n\}$的极限,亦称$\{x_n\}$收敛于a,记作

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$,或$x_n \to a\ (n \to \infty)$.

若极限不存在，则称数列发散。

注：(1).ε是任意的,不等式$|x_n - a| < \varepsilon$

刻画了x_n与a的无限接近。

(2).N与ε有关,但不是函数关系($\varepsilon \to N$不唯一).

任意大于N的数都可以充当N的角色。

(3). $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ **的几何意义：对于数列** $\{x_n\}$,当 $n > N$ **时，所有的** x_n**都落在区间（** $a-\varepsilon, a+\varepsilon$）**内。**

(4) 从定义中可以看出，若要用定义证明极限存在，关键在于对

$\forall \varepsilon > 0$,找出 N，当 $n > N$时, $|x_n - a| < \varepsilon$成立。

例1. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

证：记 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\forall \varepsilon > 0$,要使 $\left|x_n - 1\right| = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$

只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, 今取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$, 则当 $n > N$时,

$\left|x_n - 1\right| = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ $\quad\quad \therefore \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

例2. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n-1}=0 \ \ (|q|<1)$.

证: $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|x_n-0|=|q|^{n-1}<\varepsilon$,

只要 $(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$ 即 $n>1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$

取 $N=\left[1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$, 则当 $n>N$ 时恒有

$$|q^{n-1}-0|<\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} q^{n-1}=0.$$

例3. 试证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$.

证：$\forall\varepsilon>0$ $\left(找N=?,使当n>N时\left|x_n-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon\right)$

先考察$\left|\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}\right|$

当$n\geq 2$时，有$5n-10\geq 0$，则

$$\left|\frac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}\right|=\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}$$

$$<\frac{5n}{9n^2}<\frac{1}{n}$$

$$\left(\text{要使}\left|x_n - a\right| < \varepsilon,\text{只要}\frac{1}{n} < \varepsilon,\text{即}n > \frac{1}{\varepsilon}\text{即可}\right)$$

$$\therefore \text{对}\forall\varepsilon > 0,\exists N = \max\left\{2,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\},\text{当}n > N\text{时恒有}$$

$$\left|\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon,$$

$$\text{即}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3}.$$

注： 用定义证明极限存在的步骤：

(1) 考察 $|x_n-a|$.

(2) 适当放大不等式，为方便有时可限定 n 大于某一数 N_1 , 解出 $n>N_2$.

（3）取 $N=max\{N_1,N_2\}$.

（4）整个叙述。

例 4 证明数列$x_n=(-1)^{n+1}$是发散的.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 由定义,对于$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$,

则$\exists N$,使得当$n>N$时,有$|x_n-a|<\dfrac{1}{2}$成立,

即当$n>N$时,$x_n\in(a-\dfrac{1}{2},a+\dfrac{1}{2})$, 区间长度为 1.

而x_n无休止地反复取$1,-1$两个数,

不可能同时位于长度为 1 的区间内 .

所以数列$x_n=(-1)^{n+1}$**是发散的**.

事实上,$\{x_n\}$是有界的,但却发散.

2.2.3. 收敛数列的性质 .

性质 1 .(唯一性) 收敛数列的极限必唯一 .

证 :(反证法) 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a \neq b$.

(不妨设 $a > b$).

则 : 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{a-b}{2}, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时,

$$\text{有} \left| x_n - a \right| < \frac{a-b}{2}.$$

$$\text{即}: \frac{a+b}{2} < x_n < \frac{3a-b}{2}.$$

$\exists N_2 > 0$,当$n > N_2$时,有$\left|x_n - b\right| < \dfrac{a-b}{2}$.

即:$\dfrac{3b-a}{2} < x_n < \dfrac{a+b}{2}$.

因此,$\exists N = \max(N_1, N_2)$,当$n > N$时,

有$\dfrac{a+b}{2} < x_n < \dfrac{a+b}{2}$,矛盾.

$\Rightarrow a = b$

性质 2. (有界性) 收敛数列 $\{x_n\}$ 必有界.

证: 对 $\varepsilon = 1, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时 $|x_n - a| < 1$

$\therefore n > N$ 时 $|x_n| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$

$\therefore \forall n, |x_n| \le M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots |x_N|, 1 + |a|\}.$

注: (1) 收敛必有界, 但有界不一定收敛. 如 $\{(-1)^n\}$

(2) 无界一定发散.

性质3.(保号性) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 且$A > 0$(或$< 0$)

则$\exists N > 0$,当$n > N$时 $x_n > 0\ (< 0)$.

证:设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > 0$,

则对$\varepsilon = \dfrac{A}{2}$,$\exists N > 0$,当$n > N$时

$$\left|x_n - A\right| < \frac{A}{2} \text{即} -\frac{A}{2} < x_n - A < \frac{A}{2}$$

$$\therefore \exists N > 0, \text{当} n > N \text{时}\ x_n > \frac{A}{2} > 0.$$

推论:若$x_n \geq 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,则$A \geq 0$;

若$x_n \leq 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,则$A \leq 0$.

证: 反证法.

1.2.4 子数列的概念

1.定义：在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列（或子列）.

例如， $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots x_n, \cdots$

$$\Downarrow$$

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

注： (1)在子数列$\{x_{n_k}\}$中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项，而 x_{n_k} 在原数列$\{x_n\}$中却是第 n_k 项，显然，$n_k \geq k$.

(2) $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k-1}\}$ 常见的子数列。

2. 数列与子数列的关系

定理 收敛数列的任一子数列也收敛．且极限相同．

注： 此定理可用来判别数列发散。只要找到 $\{x_n\}$ 的一子列发散 或两子列不收敛到同一极限，则原数列发散。

例 $\{x_n\} = \{\sin \frac{n\pi}{2}\} = 1,0,-1,0,1,0,\cdots,$

它的一个子列 $1,1,1,\cdots$ 收敛于 1,

另一子列 $0,0,0,\cdots$ 收敛于 0,

所以此数列发散．

内容小结

本节主要讨论了数列极限的概念.

本节要求理解数列极限的概念，了解数列极限的性质，会用极限定义对一些具体的数列的极限加以叙述及证明；了解子数列的概念，并会用子数列与数列极限的关系来判别极限的不存在.

作业 :1-2　　课外作业 : 书上习题 1.2