1.3　函数的极限

1.3.1　函数极限的概念

1.3.2　函数极限的性质

1.3.1　函数极限的概念

在上节中，讨论了数列的极限，实际上数列 $\{x_n\}$ 可以看成是一特殊函数 $x_n=f(n)$, 它的自变量 n 的变化过程只能离散地取一切自然数而无限增大。而对于一般的函数 $y=f(x)$, 它的变化过程一共有四种：

一
$$\begin{cases} 1.\ \text{取一切正实数而无限增大,记作}: x \to +\infty. \\ 2.\ \text{取一切负实数而绝对值无限增大,记作}: \\ \quad x \to -\infty. \\ 3.\ \text{既取正实数又取负实数而绝对值无限增大,} \\ \quad \text{记作}: x \to \infty. \end{cases}$$

贰　取靠近某一定数 a 的所有实数而无限接近，

记作：$x \to a$.

一、 $x \to \infty$时函数的极限

1. 第一种 情形 : $x \to +\infty$，$f(x)$以A为极限。

定义 1 . 设函数$f(x)$当x 大于某一正数时有定义 ,若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当$x > X$时, 有$|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称常数$A$为函数$f(x)$当$x \to +\infty$的极限，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (\text{当} x \to +\infty)$$

$\boxed{"\varepsilon - X"\text{定义}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当$x > X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

2、另两种情形：

$1^0. x \to -\infty$ 情形： $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

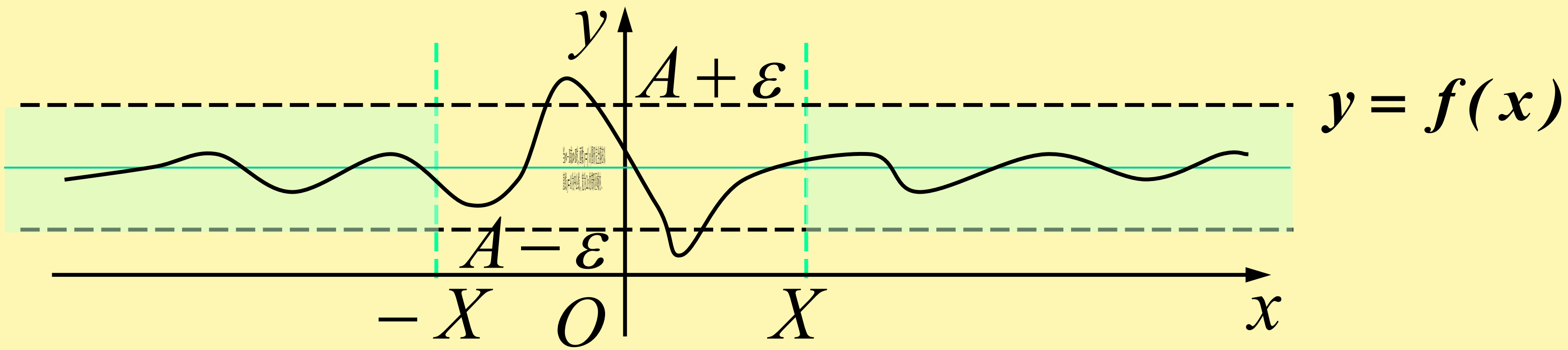
$2^0. x \to \infty$ 情形： $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

定理 : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

3、几何解释：



当$x < -X$或$x > X$时，函数 $y = f(x)$图形完全落在以直线$y = A$为中心线，宽为2ε的带形区域内.

例 1　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

证 $\because \left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|<\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0,$ 则当 $|x|>X$ 时恒有 则当 $|x|>X$ 时恒有

$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$　故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

定义：如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，则直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.

二、 $x \to x_0$时函数的极限

1、定义

定义 2 设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义，若对

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$

则称常数 A 为函数 $f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (当 x \to x_0)$$

$\boxed{"\varepsilon - \delta"定义}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 当 0 < |x - x_0| < \delta 时,$$

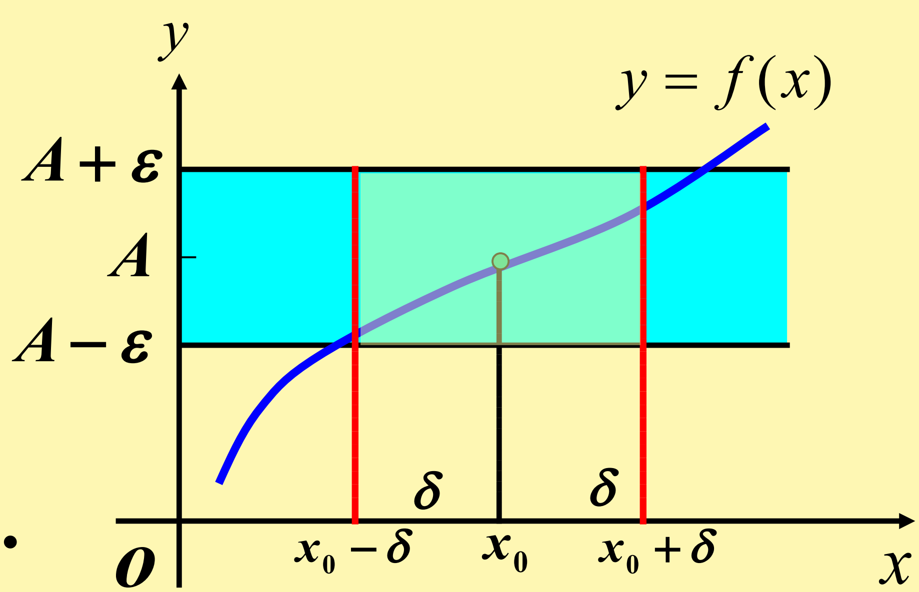
$$恒有 |f(x) - A| < \varepsilon.$$

注意: 1.函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关;

2.δ与任意给定的正数ε有关.

2、几何解释:

当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y = f(x)$图形完全落在以直线$y = A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



例 2 证明 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$

证明 函数在点 $x=1$ 处没有定义.

$\because \left|f(x)-A\right|=\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|x-1\right|$ 任给 $\varepsilon>0,$

要使 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$ 只要取 $\delta=\varepsilon,$

当 $0<\left|x-1\right|<\delta$ 时, 就有 $\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon,$

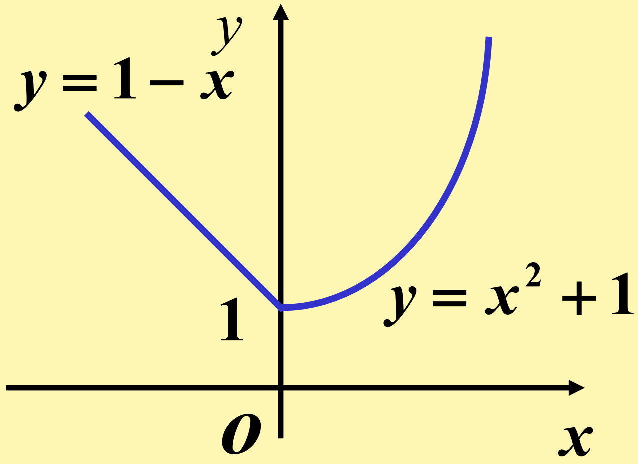
$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$

3. 单侧极限：

例如，

设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论

x 从左侧无限趋近 x_0，记作 $x\to x_0-0$; $(x\to x_0^-)$

x 从右侧无限趋近 x_0，记作 $x\to x_0+0$; $(x\to x_0^+)$

左极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

记作 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A.$

右极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

记作 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ (x \to x_0^+)}} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A.$

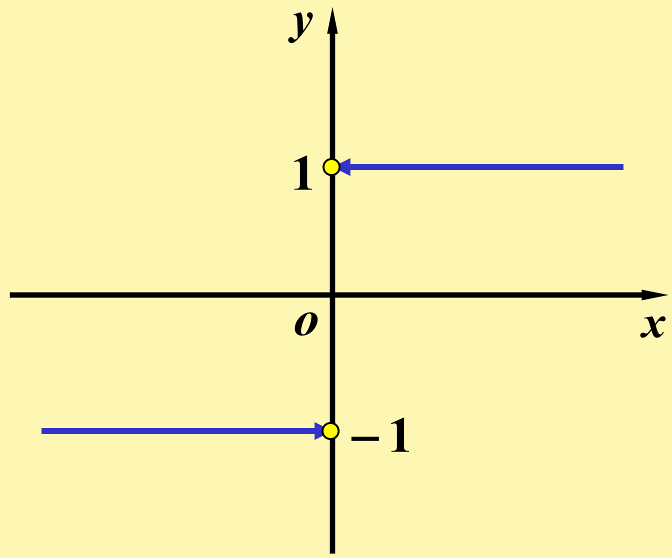
定理 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

证明 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$



左右极限存在但不相等, $\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

1.3.2 、函数极限的性质

1. 唯一性

定理 若 $f(x)$ 存在极限，则极限唯一

2. （局部）有界性

定理 若在某个过程下，$f(x)$ 有极限，则存在过程的一个时刻，在此时刻以后 $f(x)$ 有界

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则$f(x)$在$x_0$的某去心邻域内有界

即则$\exists M,\delta > 0,$当$x \in U^0(x_0,\delta),|f(x)| \le M$

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 则$\exists M, X > 0,$当$|x| > X, |f(x)| \le M$

3. 保号性

定理（局部保号性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,且$A > 0$(或$A < 0$),

则$\exists\delta > 0$,当$x \in U^0(x_0,\delta)$时,$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$).

推论 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,且$\exists\delta > 0$,当$x \in U^0(x_0,\delta)$时,

$f(x) \geq 0$(或$f(x) \leq 0$),则$A \geq 0$(或$A \leq 0$).

4. 保序性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,若$A > B$,

则$\exists\delta > 0$,当$x \in U^0(x_0,\delta)$**时**,$f(x) > g(x)$

4. 函数极限与数列极限的关系

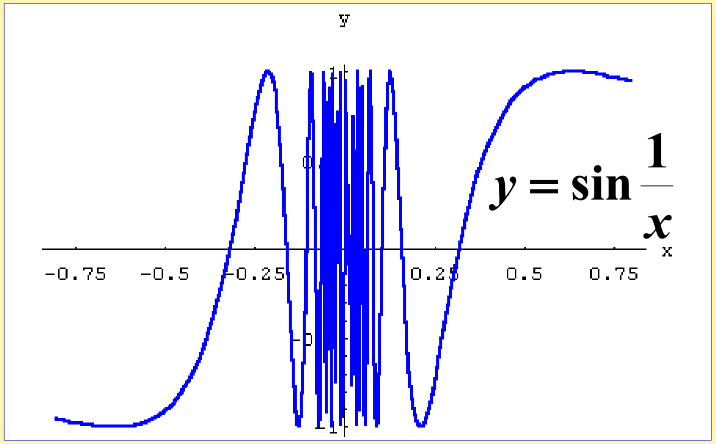
定理 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\{x_n\}$**为函数**$f(x)$**的定义域内任一收敛于**a**的数列，且满足**$x_n\neq a(n\in N^+)$, 那么相应地函数值数列$\{f(x_n)\}$**必收敛，且** $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

例如， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n}=1,$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}=1,$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n+1}\sin\dfrac{n+1}{n^2}=1$

注：此性质可以用来判别函数极限不存在。

例 4　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.



证明　取 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,　且 $x_n \neq 0$;

取 $\{x_n'\}=\left\{\dfrac{1}{\frac{4n+1}{2}\pi}\right\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0$,　且 $x_n' \neq 0$;

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi = 0$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n'} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{4n+1}{2}\pi = \lim\limits_{n\to\infty}1 = 1$,

二者不相等，　故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

内容小结

本节主要讨论了函数极限的概念.

本节要求理解函数极限的概念，了解函数极限的性质，会用极限定义对一些具体的函数的极限加以叙述及证明 .

作业 :1-3　　课外作业：教材 1.3

1.4　无穷小与无穷大

1.4.1　无穷小量

1.4.2　无穷大量

1.4.3　无穷小与无穷大的关系

1.4 无穷小与无穷大

1.4.1、无穷小

1、定义 如果函数 $f(x)$当$x \to x_0$,(或$x \to \infty$)

1:时的极限为0，那么称函数$f(x)$为当$x \to x_0$,

(或$x \to \infty$)时的无穷小。

例如， 函数$\sin x$是当$x \to 0$时的无穷小.

函数$\frac{1}{x}$是当$x \to \infty$时的无穷小.

数列$\{\frac{(-1)^n}{n}\}$是当$n \to \infty$时的无穷小.

注意（1）无穷小是一变化过程，与变化过程密切相关。

例　函数$\frac{1}{x}$是当$x \to \infty$时的无穷小，

当$x \to 0$时不是无穷小。

（2）无穷小是一变量，不能与很小的数混淆
;
（3）零是可以作为无穷小的唯一的数.

2、无穷小与函数极限的关系：

定理1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

意义 （1）将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小);

（2）给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x)\approx A$, 误差为$\alpha(x)$.

二、 无穷大

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义 2 若任给 $M>0$ 总存在 $\delta>0$ (正数 X) 使对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ $(|x|>X)$ 的 x, 总有

$|f(x)|>M$ 则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ $(x\to\infty)$

时为无穷大, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty)$.

特殊情形：正无穷大，负无穷大.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0, \text{当} 0<|x-x_0|<0$$

$(\exists X>0,$ 当 $|x|>X)$ 时，有 $f(x)>M$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{当} 0 < |x - x_0| < 0$$

$$(\exists X > 0, \text{当} |x| > X)\text{时，有} f(x) < -M.$$

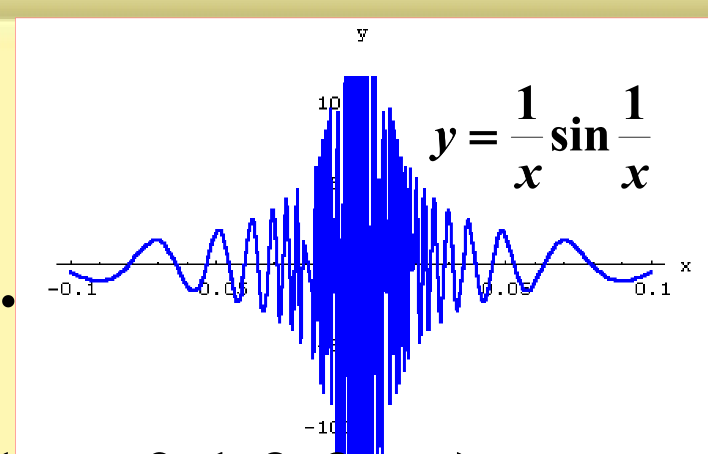
注 （1）无穷大是变量，不能与很大的数混淆；

（2）切勿将 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 认为极限存在.

（3）无穷大是一种特殊的无界变量，但是无界变量未必是无穷大.

例1：当$x \to 0$时，$y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

是一个无界变量，但不是无穷大.



(1)　取 $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$　　$(n = 0,1,2,3,\cdots)$

$y(x_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$，

当n**充分大时**，$y(x_n) = (2n\pi + \frac{\pi}{2})\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \to \infty$

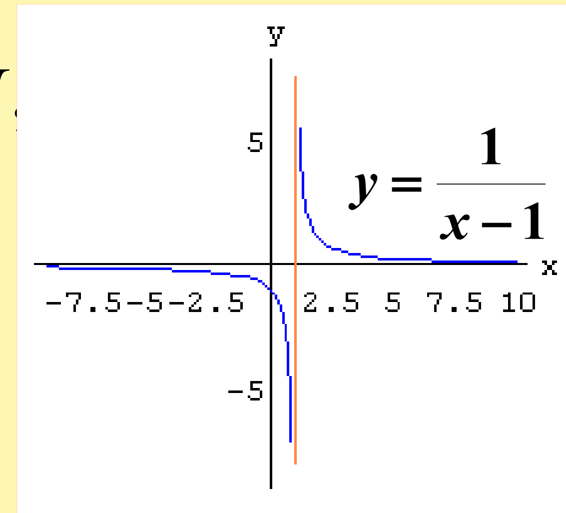
无界

(2)　取 $x_n' = \dfrac{1}{2n\pi}$　　当 n **充分大时**，

但 $y(x_n') = 2n\pi\sin 2n\pi = 0 < M$. 不是无穷大.

例2　**证明** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

证明 $\forall M>0.$ 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M,$



只要 $|x-1|<\dfrac{1}{M},$ 取 $\delta=\dfrac{1}{M},$

当 $0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$ 时,

就有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M.$ $\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

定义：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

1.4.3 、无穷小与无穷大的关系

定理 4 在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

意义 关于无穷大的讨论，都可归结为关于无穷小的讨论.

内容小结

本节主要讨论了无穷小量、无穷大量的概念.

本节要求理解无穷小量、无穷大量的概念及相互关系.

作业 :1-4 课后：书上习题 1.4 5

作业中存在的问题.

1.设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

证明 $\because \{x_n\}$有界，则$\exists M > 0$, 有$|x_n| \le M$.

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 则对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 > 0$, 当$n > N_1$时，

有$|y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. 又$\because |x_n y_n| \le M |y_n|$.

所以对$\forall \varepsilon > 0$，

取$N = N_1$, 当$n > N$时，有$|x_n y_n| < M |y_n| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

2.对于数列$\{x_n\}$, 若$x_{2k-1} \to a(k \to \infty), x_{2k} \to a(k \to \infty)$,
证明: $x_n \to a(n \to \infty)$.

证明 $\because \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = a$,则对$\forall \varepsilon > 0, \exists K_1 > 0$,当$k > K_1$时,

有$|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$.

$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = a$,则对$\forall \varepsilon > 0, \exists K_2 > 0$,当$k > K_2$时,

有$|x_{2k} - a| < \varepsilon$.

$\therefore$ 对$\forall \varepsilon > 0$, 取$N = Max(2K_1 - 1, 2K_2)$,当$n > N$时,

有$|x_n - a| < \varepsilon$.

即 :$\lim_{n\to\infty} x_n = a$.