1.5 极限的运算法则

1.5.1 极限的运算法则

1.5.2 复合函数的运算法则

1.5.1、极限的运算性质：

1、无穷小的运算性质：

定理 1 在同一过程中，有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

证明： 考虑两个无穷小的和设 $\lim_{x\to x_0}\alpha=0$, $\lim_{x\to x_0}\beta=0$,

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有， $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时有， $|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时， 有

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因此 $\lim_{x\to x_0}(\alpha+\beta)=0.$

这说明当 $x\to x_0$ 时 $\alpha+\beta$ 为无穷小量.

注意　无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如, $n\to\infty$时, $\dfrac{1}{n}$是无穷小,

但n个$\dfrac{1}{n}$之和为1不是无穷小.

定理 2　（局部）有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

例:　设函数$u(x)$在$U^0(x_0,\delta_1)$内有界,

又设$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小, $(\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\alpha(x)=0$

证明: 设 $\forall x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta_1)$, $|u(x)|\le M$

又 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, 即$\forall\varepsilon>0, \exists\delta_2>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta_2$,

有$|\alpha(x)|\le\dfrac{\varepsilon}{M}$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当$0<|x-x_0|<\delta$,

$$\left|u(x)\alpha(x)\right|\le M\,|u(x)|\le M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} u(x)\alpha(x)=0$$

例如,当$x\to 0$时,$x\sin\frac{1}{x}$,$x^2\arctan\frac{1}{x}$

都是无穷小

推论 1 在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

2 极限运算法则（四则运算）

定理 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0$.

证 (1) $\because \lim f(x)=A, \quad \lim g(x)=B.$

$\therefore f(x)=A+\alpha, \quad g(x)=B+\beta.$ 其中$\alpha\to 0, \beta\to 0.$

于是 $f(x)\pm g(x)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)$

$=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta)$

由定理 1 可知$\alpha\pm\beta$ 也是无穷小，

再利用极限与无穷小的关系知定理成立

注： 1、定理中（1），（2）可推广到有限个函数的情况。

2、定理对数列的极限同样成立。

推论 1 如果 $\lim f(x)$ 存在，而 c 为常数，则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

常数因子可以提到极限记号外面．

推论 2 如果 $\lim f(x)$ 存在，而 n 是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

3、求极限方法举例

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}=\frac{7}{3}.$$

小结： 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^{\ n}+a_1x_0^{\ n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，且 $Q(x_0)\neq 0$， 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若 $Q(x_0)=0$， 则商的法则不能应用.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-3)=0,$ 商的法则不能用

又 $\because \lim\limits_{x\to1}(4x-1)=3\neq0,$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

由无穷小与无穷大的关系，得

$$\lim_{x\to1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.　($\dfrac{0}{0}$ 型)

解　$x\to 1$时,分子,分母的极限都是零.

先约去不为零的无穷小 因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例 4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

解 $x\to\infty$时, 分子,分母的极限都是无穷大.

先用x^3去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

小结： 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{当} n = m, \\ 0, \text{当} n > m, \\ \infty, \text{当} n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法： 以分子、母中自变量的最高次幂除分子，分母，以分出无穷小，然后再求极限。

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+3} = \dfrac{1}{2}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{2x^2-x+3} = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^3-x+3} = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$

例 5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right).$

解 $n\to\infty$时,是无限多个无穷小之和.

先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

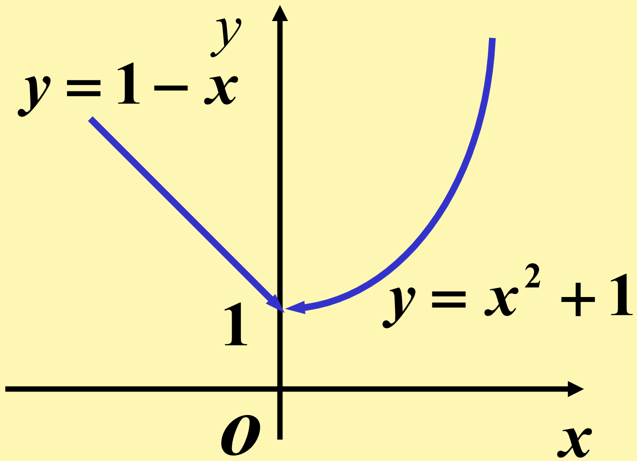
注：求 n 项数列的和的极限，先求和再求极限.

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 $x=0$是函数的分段点,两个单侧极限为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,$$



左右极限存在且相等,

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

1.5.2 、复合函数的极限运算法则

定理 **设函数** $y=f(\varphi(x))$由$y=f(u), u=\varphi(x)$ 复合而成，

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且在点 x_0 **的某去心邻域内** $\varphi(x)\neq a$，

又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$ **，则** $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A.$

意义： $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]}\xrightarrow[a=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]{\text{令 } u=\varphi(x)}\boxed{\lim\limits_{u\to a}f(u)}$

注：定理中 x_0, a**可以为**∞，例

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty, \lim_{u\to\infty}f(u)=A, \text{则} \lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim_{u\to\infty}f(u)=A$$

例7 $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}}$

解 $f(u)=\sqrt{u},\ u=\varphi(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$

$$\because \lim_{x \to 1} \frac{2(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} 2(x+1) = 4$$

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{2(x^2-1)}{x-1}} = \lim_{u \to 4} \sqrt{u} = 2$$

例8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$　　$(\dfrac{0}{0}$型$)$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{3}{2}.$$

例9 $\lim\limits_{x\to -1}(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1})$　　$(\infty-\infty$型$)$

$$原式=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}$$ (化为$\dfrac{0}{0}$型。)

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=-1.$$

例10.求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$ $(\infty-\infty$型$)$

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}\quad (\frac{\infty}{\infty}\text{型})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)+\frac{ab}{x}}{\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})}+1}=\frac{a+b}{2}.$$

(化为$\frac{\infty}{\infty}$,型。)

例11　1).已知 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=l$, 求$a, l$.

解　　　a=4,

$$l=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)(x-4)}{x+1}=10.$$

2). 求a, b, 使之满足 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b)=0$.

解: $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b)$　　$(\infty-\infty)$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{(1-a^2)x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+ax}-b\right)=0 \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$\Rightarrow a^2=1$, 但$a\neq -1$, 否则此极限为∞，不能等于常数b

$$\therefore a=1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1-a^2)x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+ax}-b\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}-b\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+1}-b\right)=\frac{1}{2}-b=0.$$

所以，$b=\dfrac{1}{2}.$

内容小结

1、掌握极限的运算法则

2、会求函数、数列的极限

注：对于不定型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty$型

利用代数变形，

(1). 消去零因子法求极限；(因式分解，分母、分子有理化)

(2). 无穷小因子分出法求极限；

(3). $\infty-\infty, (0\cdot\infty)$**型化为** $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$。　　习题 1-5

练　习　题

1、求极限：

注：对于不定型$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$型

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}$

(3) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{e^{x}+e^{-x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1})$

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$

2.判别极限是否存在

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$,其中$f(x)=\begin{cases} x-1 & -1\le x<0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0\le x\le 1 \end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$.

3、求a,b,使之满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$,

1、求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+(-2)^n}{5^{n+1}+(-2)^{n+1}}$；　解 :原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-\frac{2}{5})^n}{5-2(-\frac{2}{5})^n}=\dfrac{1}{5}$.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, & x=-1\\ 0, & x=1\\ \dfrac{1}{2}, & |x|<1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}(\frac{1}{x^{2n+1}}-1)}{x^{2n}(\frac{2}{x^{2n}}+1)}=-x, & |x|>1.\end{cases}$$

$$(3)\ \lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-8}\frac{(1-x-9)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}=-2.$$

$$(4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}\ =0$$

$$(5)\ \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+4x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{1}{-x}-4}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}}=-2.$$

$$(6)\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0.$$

$$(7)\quad \lim_{n\to+\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$$

2.判别极限是否存在

(1) $\lim_{x\to 0} f(x)$,其中$f(x)=\begin{cases} x-1 & -1\le x<0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0\le x\le 1 \end{cases}$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$.

解 (1).

$\lim_{x\to +0} f(x)=1,\lim_{x\to -0} f(x)=-1,$所以$\lim_{x\to 0} f(x)$不存在.

(2). $\lim_{x\to +0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=0,\ \lim_{x\to -0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=1,$

所以极限不存在。

3、由极限值确定参数

求a,b,**使之满足** $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$,

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\dfrac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}}}=2,$$

$$\begin{cases}25-a=0\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2\end{cases},\quad \text{解得}a=25,\quad b=20.$$