# 1.6 极限存在准则，两个重要极限

1.6.1 夹逼 ( 两边夹挤 ) 准则

1.6.2 单调有界收敛准则

1.6.3 两个重要极限

## 1.6.1　夹逼准则

## 1. 夹逼准则

**准则 I**　如果数列$x_n, y_n$及$z_n$满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1,2,3\cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$

那末数列$x_n$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

**证明**　$\because y_n \to a, \quad z_n \to a,$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0,$ 使得

当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \varepsilon$,

当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \varepsilon$,

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 上两式同时成立,

即 $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$,

当 $n > N$ 时，恒有 $a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$,

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立, $\quad \therefore \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a.$

上述数列极限存在的准则可以推广到函数的极限

准则 I′ 如果当 $x \in \mathring{U}(x_0)$ (或 $|x| > X$) 时，有

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

那末 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在，且等于 $A$.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则.

注意：利用夹逼准则求极限关键是构造出 $y_n$ 与 $z_n$，并且 $y_n$ 与 $z_n$ 的极限是容易求的.

**例 1** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$

**解** $\because \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}},$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1,$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1,$ 由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例2 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

解 $\because 3^n < 1+2^n+3^n < 3\cdot 3^n$

$$\therefore \quad 3 < x_n < 3\cdot 3^{\frac{1}{n}},$$

$$又 \lim_{n\to\infty} 3\cdot 3^{\frac{1}{n}} = 3,$$

根据夹逼定理知：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3.$

注：设 $a_i > 0, (i = 1,2,\cdots m.)$,

求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^{\ n} + a_2^{\ n} \cdots + a_m^{\ n}}$

$= Max(a_1, a_2 \cdots a_m)$

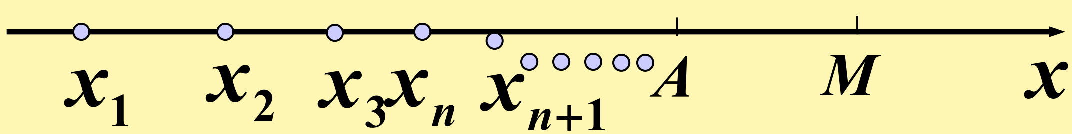
# 1.6.2. 单调有界准则

**准则 II　单调有界数列必有极限.**

注 1　收敛数列必有界，反之不成立

注 2　单调递增有上界则必有极限，单调递减有下界则必有极限　。

注 3　几何说明




注 4　此准则可以用来求通项为递推公式的数列的极限 .

方法：(1) 先判定极限存在 .

(2) 根据递推公式两边求极限。

例 3 设数列$\{x_n\}$由下式给出$x_1 = \frac{a}{2}(0 < a < 1)$,

$$x_n = \frac{a}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2}, (n = 2,3,\cdots), \text{求} \lim_{n\to\infty} x_n.$$

解 $x_2 = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{8} > x_1$,猜想：$x_n > x_{n-1}$.

用归纳法证明之.

设$n = k$,有$x_k > x_{k-1}$,则当$n = k + 1$时,

$$x_{k+1} - x_k = \frac{a}{2} + \frac{x_k^2}{2} - \left(\frac{a}{2} + \frac{x_{k-1}^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x_k^2 - x_{k-1}^2) > 0.$$

这说明 $\{x_n\}$ 递增 .

又由$x_1 < 1$,设$x_k < 1$,

$$则x_{k+1} = \frac{a}{2} + \frac{x_k^2}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

知$\{x_n\}$递增有上界,

故$\{x_n\}$的极限存在，设为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 于是有:

$$A = \frac{a}{2} + \frac{A^2}{2}.$$

注意到$A < 1$,解得：$A = 1 - \sqrt{1-a}$

即：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 - \sqrt{1-a}$.

**例 4** 证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ ($n$重根式)的极限存在.

**证明** 显然 $x_2=\sqrt{3+x_1}>x_1=\sqrt{3}$, 设$x_k>x_{k-1}$,

则$x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}>\sqrt{3+x_{k-1}}=x_k$, $\therefore \{x_n\}$是单调递增的;

又 $\because x_1=\sqrt{3}<3$,假定 $x_k<3$,$x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}$ $<\sqrt{3+3}<3$,

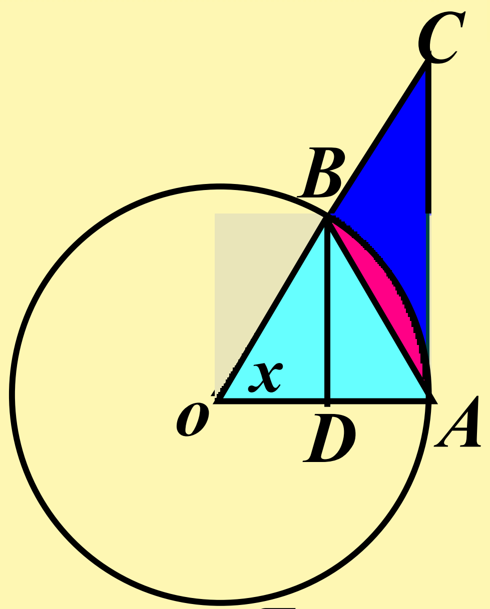
$\therefore \{x_n\}$是有界的; $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

$\because x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$, $x_{n+1}^2=3+x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$,

$A^2=3+A$, 解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

## 1.6.3 、两个重要极限




**1.** $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ $\quad (\frac{0}{0})$

设单位圆 $O$, 圆心角$\angle AOB = x$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得$\Delta ACO$.

扇形$OAB$的圆心角为$x$， $\Delta OAB$的高为$BD$,

于是有 $\sin x = BD$, $\quad x =$ 弧 $AB$, $\quad \tan x = AC$,

$$\therefore \sin x < x < \tan x,$$

即 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1,$

上式对于 $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立.

当 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时, $\because \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1,$

又 $\because \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1,$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

注 1：又一形式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

一般形式 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1.$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{5x}=5.$

注 2：与之有关的几个极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{(\dfrac{x}{2})^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1.$

(令$t=\arcsin x$, $x=\sin t$, 当$x\to 0$,时，$t\to 0$)

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1.$

# 利用此重要极限及与之有关的公式计算

例5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{6x}\cdot\dfrac{5x}{\tan 5x}\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{6}{5}.$

例6 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{2}.$

例7 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a\big/2}=\cos a.$

**2** $$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$$ $(1^\infty)$

证明: (1) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$ 方法:证明单调递增有上界.

(2). 利用夹逼定理可以证明: $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$

(3). 利用变量替换: $x=-(t+1)$ 可以证明:

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t+1})^{-(t+1)}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t+1})^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^{t+1} = e.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

注 (1). 又一形式：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

(2). 一般形式：$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e.$

例 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}=e.$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=e.$

(3). 与之有关的三个重要极限：

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$

2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\ln(1+u)}=1.$(令：$u=e^x-1$)

3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a.$

**例 8** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$.

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}}=\frac{1}{e}$.

**例 9** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{2+x})^{2x}$.

**解** 原式 $=\{\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}]\}^{\frac{2x}{x+2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}]^{2}(1+\frac{1}{x+2})^{-4}=e^{2}.$$

**例 10** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{e^{x}-1}$

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{x}{e^{x}-1}\cdot 2=2$

# 内容小结

## 1、两个准则

夹逼准则；单调有界准则．

## 2、两个重要极限

设 $u$为某过程中的无穷小，

$$1^0 \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1; \qquad 2^0 \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e.$$

习题 1.6