1.8　函数的连续性与间断点

1.8.1　函数的连续性

1.8.2　初等函数的连续性

1.8.3　函数的间断点

1.8.1　函数的连续性

1. 函数的增量

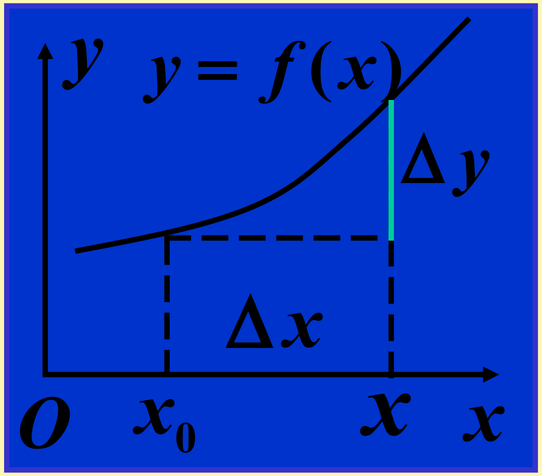
$f(x)$在$U(x_0,\delta)$ **内有定义**，　$\forall\ x\in U(x_0,\delta)$,

$\Delta x = x - x_0$： **自变量在点** x_0的增量

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$

$= f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$：

$f(x)$**相应于**Δx的增量



2. 连续的定义

定义 1 $f(x)$在$U(x_0,\delta)$ 内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 连续，

x_0称为 $f(x)$的连续点.

设 $x=x_0+\Delta x$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$,

$\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$,

$\Delta y\to 0$ 就是 $f(x)\to f(x_0)$.

定义 2 $f(x)$在$U(x_0,\delta)$ **内有定义**， 若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 **连续**.

定义 3 "$\varepsilon-\delta$"定义：

$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0,$ 使当$|x-x_0|<\delta$时,

恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 **连续**.

例 1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$处连续.

证明 $f(x)$在$x=0$的邻域内有定义

$$\because \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0,$$

又 $f(0)=0,\quad \lim_{x\to 0} f(x)=f(0),$

由定义 2 知

函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

3. 单侧连续

若函数$f(x)$在$(a, x_0]$**内有定义**，且 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 **处左连续；**

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$**内有定义**，且 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 **处右连续．**

定理

函数 $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 是函数 $f(x)$在 x_0 处既左连续又右连续．

例 2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0),$$

右连续但不左连续 ，

故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

例 3 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ a, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+b & x>0\end{cases}$

(1).a,b为何值时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在？

(2).a,b为何值时，$f(x)$在$x=0$处连续？

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(b+x\sin\dfrac{1}{x})=b$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在 $\Leftrightarrow b=1, a$任意

$f(x)$在$x=0$处连续 $\Leftrightarrow$ $a=b=1$

4. 连续函数与连续区间

在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间 (a,b)内连续，并且在左端点 $x=a$处右连续， 在右端点 $x=b$处左连续，则称函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续.

记为 $f(x)\in C_{[a,b]}$

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

1.8.2 初等函数的连续性

一 连续函数的运算

1、连续函数的四则运算

定理1 若函数 $f(x)$, $g(x)$在点 x_0处连续,

则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$

在点 x_0处也连续.

例如， $\sin x, \cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

故 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域内连续.

2、反函数与复合函数的连续性

定理 2　严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数.

例如，$y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加且连续,

故 $y = \arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = arc\cot x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调且连续.

反三角函数在其定义域内皆连续.

定理 3 **设函数** $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ **连续**，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ **连续**，**则复合函数** $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ **也连续**.

例如，讨论$y=\sin\dfrac{1}{x}$的连续性.

$$\because u=\frac{1}{x}\text{ 在}(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\text{内连续},$$

$$y=\sin u\text{ 在}(-\infty,+\infty)\text{内连续},$$

$$\therefore y=\sin\frac{1}{x}\text{ 在}(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\text{内连续}.$$

二　初等函数的连续性

★ 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

★ 指数函数 $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(-\infty,+\infty)$内单调且连续;

★ 对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(0,+\infty)$内单调且连续;

★ $y = x^{\mu} = a^{\mu \log_a x} \longrightarrow y = a^u, \quad u = \mu \log_a x.$

在$(0, +\infty)$内连续， 讨论μ不同值，

(均在其定义域内连续)

定理 4　基本初等函数在定义域内是连续的.

定理 5　一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

注意 1. 初等函数仅在其定义区间内连续， 在其定义域内不一定连续；

例如， $y=\sqrt{\cos x-1}$, $D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$

这些孤立点的邻域内没有定义，故都不连续

$y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$, $D: x=0$, 及$x\geq 1$,

在 0 点的邻域内没有定义，在 $x=0$ 处不连续

函数在区间$[1,+\infty)$上连续.

2. 初等函数求极限的方法代入法.

若x_0是初等函数$f(x)$定义区间内一点,

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

如 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\ln(2-x)}{\arctan x}$ 　　**函数定义区间**$:(-\infty,0).(0,2)$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+\ln(2-x)}{\arctan x}=\frac{4}{\pi}$$

例 1 　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x}{x^2+1}\right)^{\frac{3x-1}{x+1}}$ 　　(**幂指函数**)

解 　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{3x-1}{x+1}\ln\frac{2x^2-x}{x^2+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\cdots}=e^{3\ln 2}=8$

注: 　**对于幂指函数**$u(x)^{v(x)}\,(u(x)>0)$的极限：

(1) 若 ：$u(x)\to a, v(x)\to b,$

$$\because u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)} \to e^{b\ln a} = a^b,$$

$$\therefore u(x)^{v(x)} \to a^b.$$

(2)若：$u(x) \to 1, v(x) \to \infty, (1^\infty)$

$$\because \lim u(x)^{v(x)} = \lim \left[(1 + u(x) - 1)^{\frac{1}{u(x)-1}} \right]^{[u(x)-1]v(x)}$$

$$\text{又} \because \lim[1 + u(x) - 1]^{\frac{1}{u(x)-1}} = e,$$

$$\text{则} \lim u(x)^{v(x)} = e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$$

$$= \begin{cases} e^A & \lim v(x)[u(x)-1] = A(\text{常数}), \\ +\infty & \lim v(x)[u(x)-1] = +\infty, \\ 0 & \qquad\qquad\qquad = -\infty. \end{cases}$$

例 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\left(\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x+1}}=e$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

或原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

1.8.3 函数的间断点

函数 $f(x)$在点 x_0处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述三个条件中只 要有一个不满足，则称函数 $f(x)$在点 x_0处不连续 (或间断)，并称点 x_0为 $f(x)$的不连续点(或间断点).

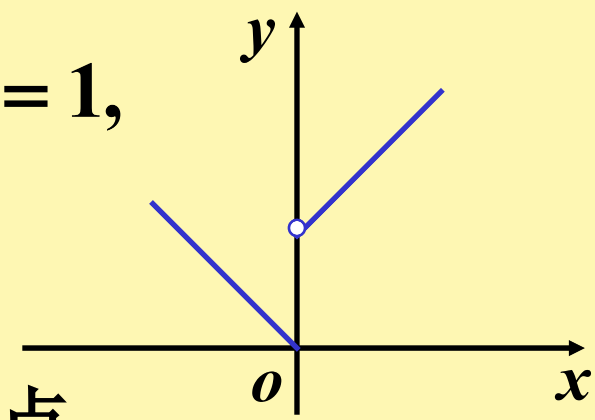
间断点分类:

1. 跳跃间断点　如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左，右极限都存在，但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例 4 讨论 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　$f(0-0)=0,\qquad f(0+0)=1,$

$\because\ f(0-0)\neq f(0+0),$



$\therefore\ x=0$ 为函数的跳跃间断点.

2. 可去间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，

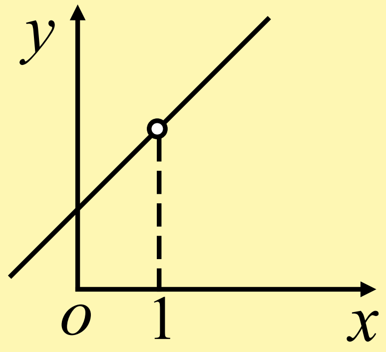
但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$

的可去间断点 .

例 5 **讨论** $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ **点的连续性.**

解. 函数在 $x=1$ 没定义，故不连续 .

但 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$，**若补充定义** $y\big|_{x=1} = 2$



则 $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ **点连续**,

故 $x=1$ **称为原来函数的可去间** 断点.

注意 可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义，则可使其变为连续点 .

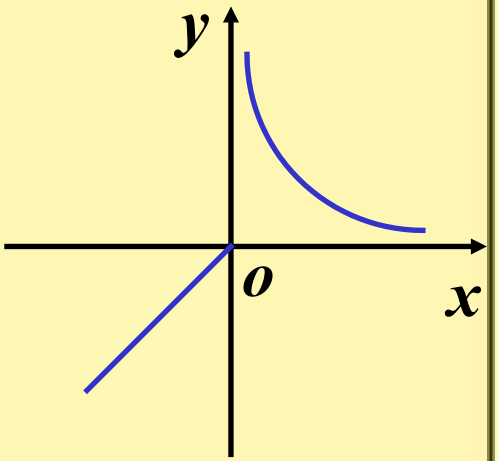
跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点 .

特点 函数在点 x_0 处的左、右极限都存在 .

3. 第二类间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=+\infty,$



$\therefore x=1$为函数的第二类间断点.

这种情况称为无穷间断点.

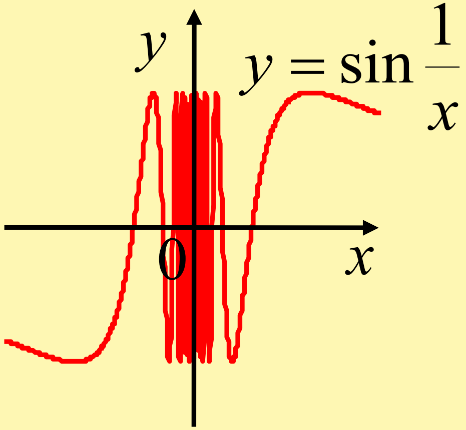
即至少有一单侧极限为∞。

例 7 讨论函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义,

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore x=0$ 为第二类间断点.



这种情况称为的振荡间 断点.

例 8 (1)讨论函数$f(x)=\dfrac{2}{2-\dfrac{2}{x}}$的间断点.

解 观察知 $x=0.x=1$ 时$f\left(x\right)$无定义,

$\therefore\ x=0.x=1$为$f\left(x\right)$的间断点.

对$x=0$:$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{2x-2}=0$

$\therefore\ x=0$为$f(x)$的可去间断点.

对$x=1$:$\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{2x-2}=\infty$,

$\therefore\ x=1$为$f(x)$的无穷间断点.

注.找间断点时,不可先将函数表达式变形,

否则失去$x=0$为间断点.

(2)设$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & x>0 \\ \ln(1+x) & -1<x\le 0 \end{cases}$,讨论间断点及类型.

解 间断点$x=1$,可能间断点:$x=0$,

当$x=0$时,$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0$,

$x=0$为跳跃间段点。

当$x=1$时,$\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$,$(\frac{1}{x-1}\to+\infty, e^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0$,$(\frac{1}{x-1}\to-\infty, e^{\frac{1}{x-1}}\to 0)$

$x=1$为无穷间段点。

(3).讨论函数$f(x)=\dfrac{x^2-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$的间断点.

解：观察知$\cos\frac{\pi}{2}x=0$时，$f(x)$无定义,

$\therefore \frac{\pi}{2}x=k\pi+\frac{\pi}{2}$,即$x=2k+1,k\in Z$为$f(x)$的间断点.

又$g(x)=x(x-1),g(1)=0$,

$$\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x)}=-\frac{2}{\pi}$$

$\therefore x=1$为$f(x)$的可去间断点.

$$\lim_{\substack{x\to2k+1\\k\neq0}}\frac{x(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\infty$$

$\therefore x=2k+1,k\neq0$,为$f(x)$的无穷间断点.

注1.（1）若$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}, h(x_0)=0, g(x_0)\neq 0,$

则$x=x_0$为$f(x)$的无穷间断点。

⑵ 若$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}, h(x_0)=0, g(x_0)=0,$

此时$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}$为$\dfrac{0}{0}$型，则$x_0$不确定。

注 2： 判断间断点的类型：

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{array}\right\}\text{第一类间断点}\left(\begin{array}{l} f(x_0-0), f(x_0+0)\text{存在且相等}\\ f(x_0-0), f(x_0+0)\text{存在但不等}\end{array}\right)\\ \left.\begin{array}{l}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{array}\right\}\text{第二类间断点}\left(\begin{array}{l} f_-(x_0).f_+(x_0)\text{至少有一为}\infty\\ \quad\text{其它}\end{array}\right)\end{cases}$$

内容小结

1、理解函数连续与间断的概念，掌握初等函数的连续性.

2、会判别间断点的类型

注：判断间断点的类型：

（1）先求出可疑间断点(函数无定义点,分段函数的分段点).

(2)根据左、右极限判别间断点的类型。

习题 1-8