1.9 闭区间上连续函数的性质

1 有界性与最值定理

2 零点定理与介值定理

1.9 闭区间上连续函数的性质

一　有界性与最值定理

定义： 对于在区间 I上有定义的函数 $f(x)$,
如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$在区间 I上的最大(小)值.

例如 ,$y = 1 + \sin x$,在$[0,2\pi]$上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

$y = \operatorname{sgn} x$, 在$(-\infty,+\infty)$上,$y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

在$(0,+\infty)$上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$.

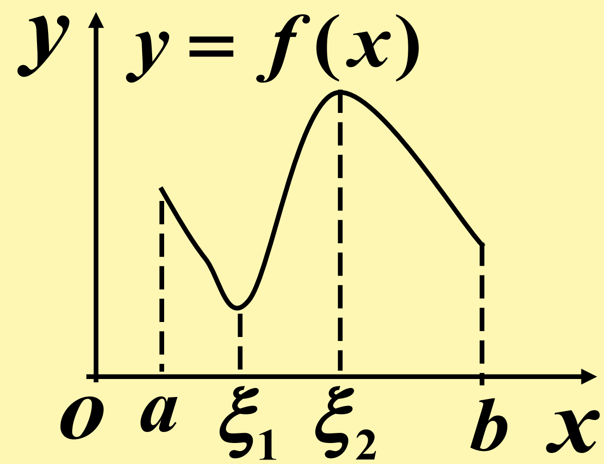
定理 1（最值定理） 在闭区间上连续的函数一定有最大值 M 和最小值 m.

即： 设 $f(x) \in C_{[a,b]}$ 则 $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$,

使

$$f(\xi_1) = \min_{a \le x \le b} f(x)$$

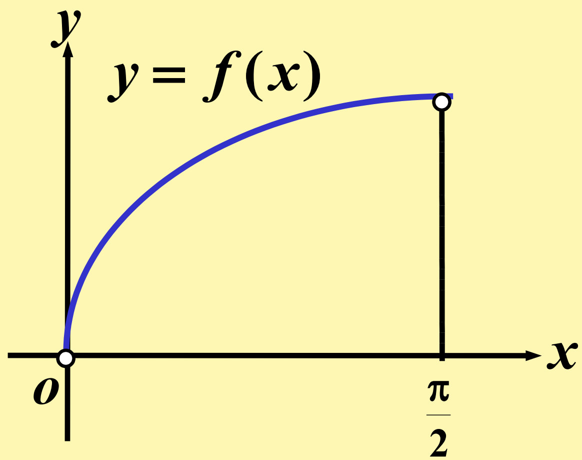
$$f(\xi_2) = \max_{a \le x \le b} f(x)$$

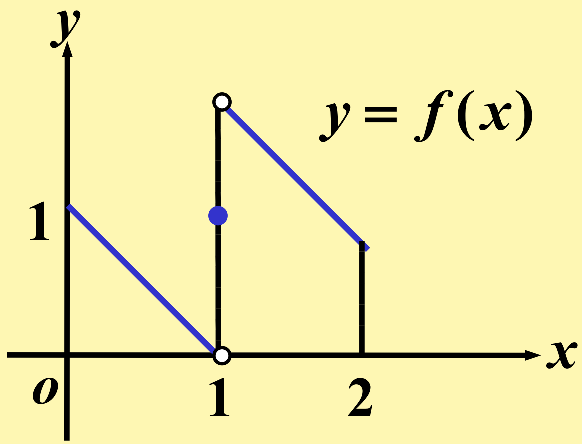


注: 1.函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，记为 $f(x) \in C_{[a,b]}$

2. 若区间是开区间，定理不一定成立；

若区间内有间断点，定理不一定成立.





无最大值和最小值

定理 2（有界性定理） 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证明 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续， $\forall x \in [a,b]$,

有 $m \le f(x) \le M$, 取 $K = \max\{|m|,|M|\}$,

则有 $|f(x)| \le K$. $\therefore$ 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.

二、 零点定理与介值定理

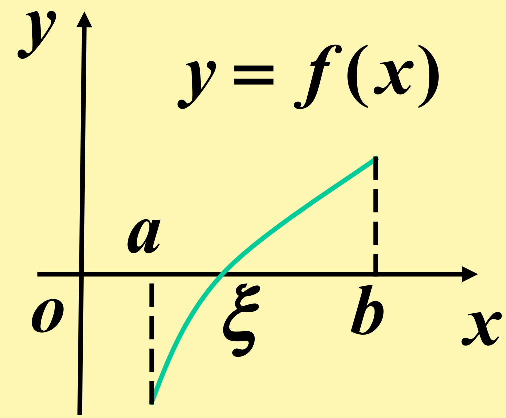
定义：如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 3.(零点定理) $f(x)\in C_{[a,b]}$,

且 $f(a)f(b)<0$

则至少有一点 $\xi\in(a,b)$,

使 $f(\xi)=0$.



即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根.

几何解释：连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 的不同侧, 则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.

例 1. 证明方程$x^5-3x+1=0$在区间$(0,1)$内至少有一个根 .

证明： 显然$f(x)=x^5-3x+1\in C_{[0,1]}$，

又 $f(0)=1>0,\ \ f(1)=-1<0$

故据零点定理，至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使

$$f(\xi)=0$$

即 $\xi^5-3\xi+1=0$

例 2 设 $f(x) \in C_{[a,b]}$，且 $f(a) < a, f(b) > b$.

证明 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = \xi$.

证明 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x) \in C_{[a,b]}$

而 $F(a) = f(a) - a < 0$,

$F(b) = f(b) - b > 0$, 由零点定理,

$\exists \xi \in (a,b)$，使 $F(\xi) = f(\xi) - \xi = 0$

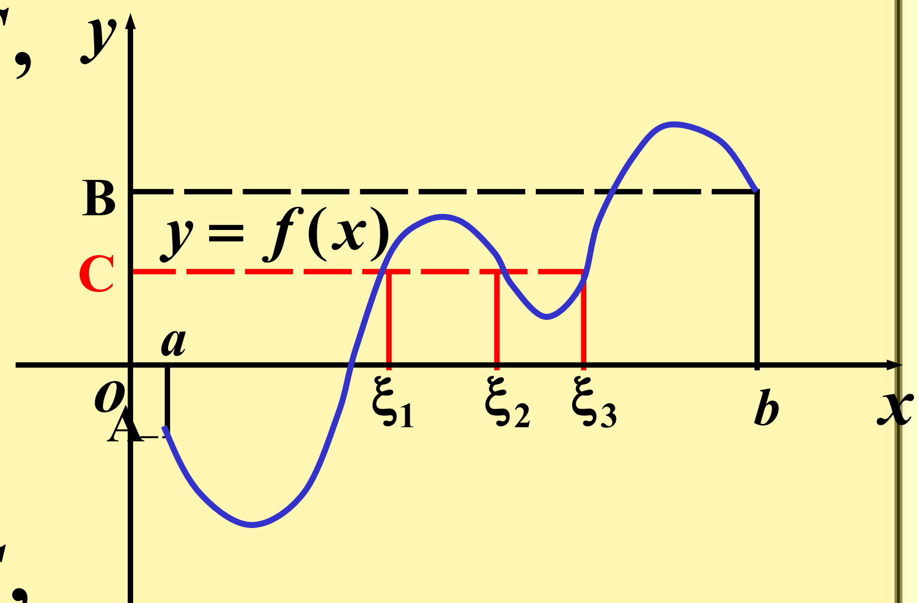
即 $f(\xi) = \xi$.

注： 先作辅助函数 $F(x)$，再利用零点定理.

定理 4.(介值定理) 设$f(x)\in C_{[a,b]}$，且$f(a)=A$，$f(b)=B$，$A\neq B$，则对 A 与 B 之间的任一数 C，至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=C$.

证明 设$\varphi(x)=f(x)-C$，

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，



且$\varphi(a)=f(a)-C$

$=A-C$，

$\varphi(b)=f(b)-C\;=B-C$，

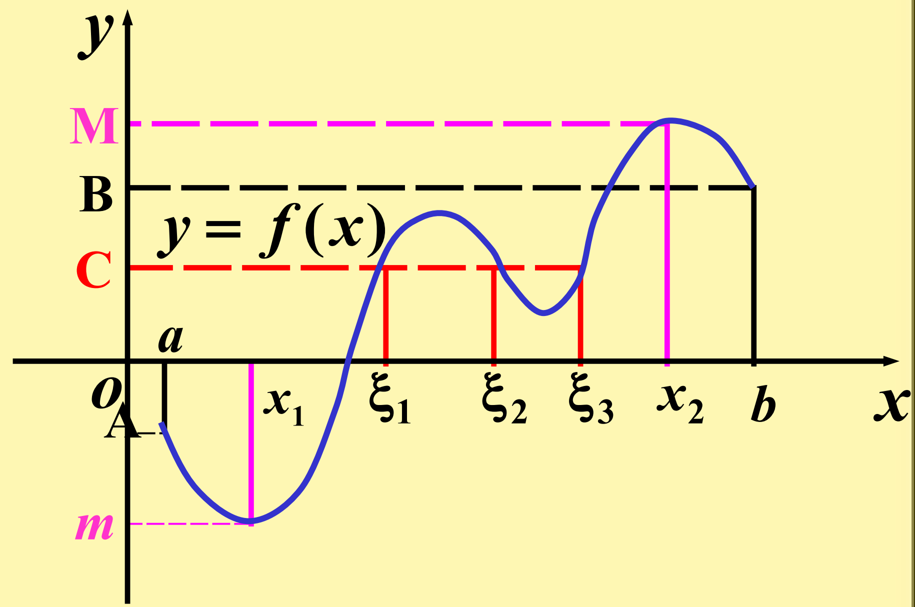
$\therefore \varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$，　由零点定理，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使

$\varphi(\xi)=0$，　即 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C=0$，　$\therefore\ f(\xi)=C$.

N J U P T

几何解释： 连续曲线弧 $y = f(x)$ 与水平直线 $y = C$ 至少有一个交点.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.



例 3 设 $f(x)\in C_{[a,b]}$, 且 $a<c<d<b$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$ 使

$$lf(c)+nf(d)=(l+n)f(\xi),\quad l.n\in N.$$

证. $\because\ f(x)\in C_{[c,d]}$,

$$\therefore \exists M=\max_{x\in[c,d]}f(x),\quad m=\min_{x\in[c,d]}f(x)$$

$$\therefore m\le\frac{lf(c)+nf(d)}{l+n}\le M$$

若 $\dfrac{lf(c)+nf(d)}{l+n}=m$ 或 M，根据最值定理，则结论成立

$\therefore m<\dfrac{lf(c)+nf(d)}{l+n}<M$, **则根据介值定理**

$$\therefore \exists\xi\in[c,d]\subset(a,b)\quad 使得\ f(\xi)=\frac{lf(c)+nf(d)}{l+n}.$$

内容小结

掌握闭区间上连续函数的性质

有界性定理；最值定理；介值定理；零点定理.

注意 1．闭区间； 2．连续函数.

这两点不满足上述定理不一定成立.

习题 1-9

习题 1-10 课后完成