第 2 章　　导数与微分

2.1　导数的定义

2.1 导数的定义

2.1.1 引例

1 直线运动的速度

设 s 表示一运动物体从某一时刻 开始到时刻 t 所走过的路程。

显然：路程 s 是时间 t 的函数，即 $s=s(t)$

(1). 物体作匀速直线运动

时间 t: $t_0 \to t$ 令： $\Delta t = t - t_0$

路程的变化为

$$\Delta s(t) = s(t) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$

速度$v=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$是一常数.

(2). 物体作变速直线运动

则$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$不是常数，它表示在$\Delta t$时间内的平均速度.

若令$\Delta t\to 0$,则$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$表示在$t_0$处的瞬时速度.

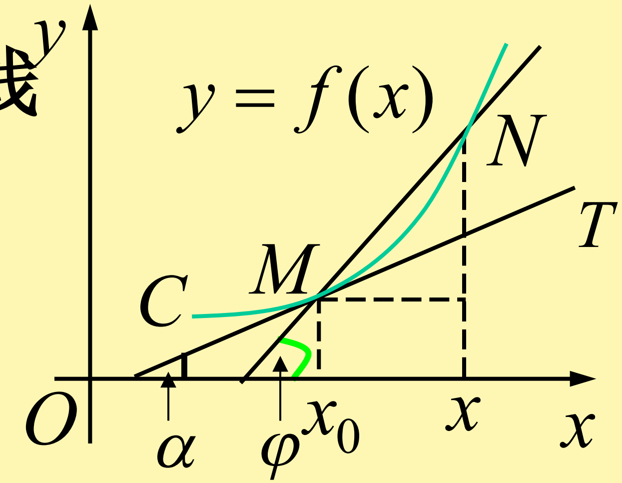
结论：物体作变速直线运动，用$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$来表示物体在时刻$t_0$处的瞬时速度，即：$v_0=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$.

----- 路程对于时间的变化率 .(此公式同样适用于匀速直线运动)

2. 曲线的切线斜率问题

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线

—— 割线 MN 的极限位置 MT (当 $\varphi \to \alpha$ 时)



切线 MT 的斜率

$$k = \tan\alpha = \lim_{\varphi \to \alpha} \tan\varphi$$

割线 MN 的斜率 $\tan\varphi = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

令 $\Delta x = x - x_0$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

结论：上面两例都归结为如下极限：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

两个问题的共性：

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

类似问题还有：

加速度 是速度增量与时间增量之比的极限

角速度 是转角增量与时间增量之比的极限

线密度 是质量增量与长度增量之比的极限

电流强度 是电量增量与时间增量之比的极限

……….

变化率问题

2.1.2 导数的定义

定义 1. 设函数$y=f(x)$在点 x_0的某邻域内有定义 ，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$ 若存在

则称函数$y=f(x)$在点x_0处可导,并称

此极限为函数 $y=f(x)$在点x_0处的导数，记为$y'\big|_{x=x_0}$,

即 $$y'\big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

也可以记作 $f'(x_0)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$

注 物体作变速直线运动，在时刻t_0处的瞬时速度

即：$v_0 = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)$

曲线 $C: y=f(x)$在 M 点处的切线的斜率

$$k = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

2. 导数定义的不同形式，常见的有：

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta y &= f(x)-f(x_0)\\ \Delta x &= x-x_0\end{aligned}}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

3. 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导也称为 $f(x)$ 在点 x_0 具有导数或导数存在；

若极限不存在，

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处导数不存在或不可导.

如果不可导的原因是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ 则称导数为无穷大

4. 对于任一 $x\in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数 $f(x)$ 的导函数.记作

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx} \text{ 或 } \frac{df(x)}{dx}.$$

即 $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

或 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

注意： $$f'(x_0)=f'(x)\Big|_{x=x_0}.$$

5. 单侧导数

1）. 左导数：

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2）. 右导数：

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

★ 函数$f(x)$在点x_0处可导⇔左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等.

如果$f(x)$在开区间(a,b)内可导，且$f'_+(a)$及$f'_-(b)$都存在，就说$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

2.1.3 、由定义求导数

步骤： (1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x);$

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x};$

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}.$

例 1 求函数 $f(x) = C$（C为常数）的导数.

解 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{C - C}{h} = 0.$

即 $(C)' = 0.$

例 2 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即 $$(\sin x)'=\cos x.$$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

同理可求： $$(\cos x)'=-\sin x$$

例 3 求函数 $y = x^n$ (n为正整数)的导数.

解 $$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}]$$

$$= nx^{n-1}$$

即 $$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

更一般地 $$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu - 1}. \qquad (\mu \in R)$$

例如，$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

例 4 求函数 $f(x)=a^x (a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$= a^x \ln a.$$

即 $$(a^x)' = a^x \ln a.$$

特别 $$(e^x)' = e^x.$$

例 5 求函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h\ln a}\cdot=\frac{1}{x\ln a}.$$

即 $$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

特别 $$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

注　　以下几个函数的导数公式要记。

$$(C)' = 0$$

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

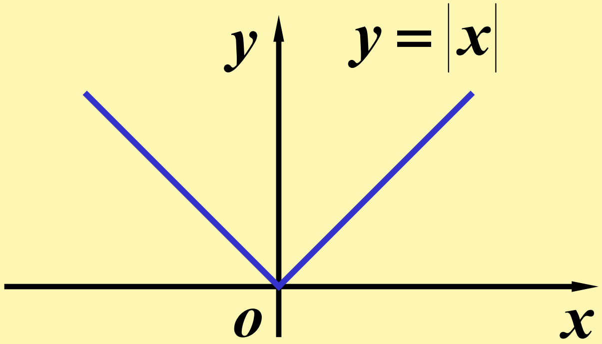
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

例 6 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解 $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$,



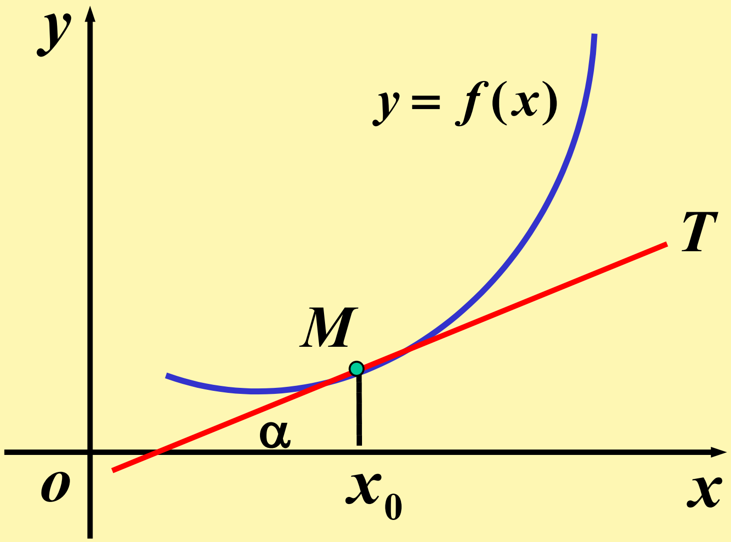
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, $\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

2.1.4 、导数的几何意义与物理意义

1. 几何意义



$f'(x_0)$表示曲线 $y=f(x)$ 在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)

切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

若$f'(x_0)=0$ 切线方程为: $y=y_0$ 法线: $x=x_0$

$f'(x_0)=\infty$ ， $x=x_0$ $y=y_0$

例 7 求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(\dfrac{1}{2},2)$ 处的切线的斜率,并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义，得切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

所求切线方程为 $y-2=-4(x-\dfrac{1}{2})$, 即 $4x+y-4=0.$

法线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{1}{2})$, 即 $2x-8y+15=0.$

2. 物理意义 非均匀变化量的瞬时变化率.

变速直线运动: 路程对时间的导数为物体的瞬时速度.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

交流电路: 电量对时间的导数为电流强度.

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}.$$

非均匀的物体: 质量对长度(面积, 体积)的导数为物体的线(面, 体)密度.

2.1.5、可导与连续的关系

定理 1 凡可导函数都是连续函数.

证明 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

$$\alpha\to 0 \quad (\Delta x\to 0) \qquad \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

注意: 该定理的逆定理不成立.

例 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.

2.1.6 利用导数定义的例子

例 1 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

在$x=0$处的连续性与可导性.

解 $\because \sin\dfrac{1}{x}$是有界函数, $\therefore \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\because f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ $\therefore f(x)$在$x=0$处连续.

但在$x=0$处有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)\sin\dfrac{1}{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

极限不存在. $\therefore f(x)$在$x=0$处不可导.

例 2 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$，求$f'(x)$

解 $$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x>0 \\ 1, & x<0 \end{cases},$$

当$x=0$时，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-0}{x}=1$$

$$\Rightarrow f'(0)\text{不存在}$$

例 3. 试确定常数 a 、 b, 使 $f(x)=\begin{cases}1+\sin 2x & x\le 0\\ a+be^{x} & x>0\end{cases}$ 函数在 $x=0$ 处连续可导。

解 根据 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=1$ 得:

$$a+b=1 \qquad （1）$$

又 $f_+'(0)=f_-'(0)$

且 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a+be^{x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{b(e^{x}-1)}{x}=b$$

$b=2$, $a=-1$

例 4 设$f'(x_0)$存在,求(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)}{h}$

解 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=-3\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{-3\Delta x}=-3f'(x_0)$$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$$

$$=3\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h}+\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0-h)-f(x_0)]}{-h}=4f'(x_0)$$

内容小结

1．理解导数的概念：

(1). 导数的定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(2). 可导的等价条件：函数 $f(x)$ 在点 x 处可导的充要条件为 $f(x)$ 在该点的左右导数存在且相等.

(3). 可导与连续的关系：可导一定连续，反之不成立.

(4). 导数的几何意义与物理意义.

2、 熟记导数基本公式

作业：习题 2-1

5.设$f(x)$为偶函数，且$f'(0)$存在，证明$f'(0)=0$

证明　　因为$f(-x)=f(x)$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-h)-f(0)}{h}$$

$$=-\lim_{-h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}=-f'(0)$$

所以　　$f'(0)=0.$