2.2 求导法则

2.2.1 函数和、差、积、商求导法则

2.2.2 反函数的求导法则

2.2.3 复合函数求导法则

2.2.4 初等函数求导问题

2.2.5 隐函数及由参数方程确定的函数的导数

2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则

1. 定理 如果函数 $u(x)$, $v(x)$在点 x处可导,则它们的和、差、积、商 (分母不为零)在点 x处也可导, 并且

$$(1)\ [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2)\ [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

证（1）、（2）略.

证（3） 设 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)},(v(x)\neq 0),$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)v(x)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

$$= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$\therefore f(x)$在x处可导.

推论 (1) $$[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x);$$

(2) $$[Cf(x)]' = Cf'(x);$$

(3) $$[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)]' = f_1'(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$$

$$+ \cdots + f_1(x) f_2(x) \cdots f_n'(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} f_i'(x) f_k(x);$$

注: $$\prod_{i=1}^{n} f_i(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots \cdot f_n(x)$$

2、例题分析

例 1 $y = 2\sin x + \frac{1}{3}\ln x - \sqrt{\frac{2}{x}} - \cos\frac{\pi}{3}$，求$y'$

解 $y' = 2(\sin x)' + \frac{1}{3}(\ln x)' - \sqrt{2}(x^{-\frac{1}{2}})' - (\cos\frac{\pi}{3})'$

$$= 2\cos x + \frac{1}{3x} + \frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$$

例 2 求 $y = \sin 2x \cdot \ln x$ 的导数.

解 $\because y = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \ln x$

$$y' = 2\cos x \cdot \cos x \cdot \ln x + 2\sin x \cdot (-\sin x) \cdot \ln x$$

$$+ 2\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2\cos 2x \ln x + \frac{1}{x}\sin 2x.$$

例3 求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $y'=(\tan x)'=(\dfrac{\sin x}{\cos x})'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x.$

同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x.$

例 4 求 $y = \sec x$ 的导数.

解 $$y' = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x.$$

同理可得 $$(\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

2.2.2 反函数的导数

定理 如果函数 $x=\varphi(y)$在某区间 I_y内单调、可导且$\varphi'(y)\neq 0$，那末它的反函数 $y=f(x)$在对应区间 I_x内也可导，且有$f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

即 反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

证明 任取$x\in I_x$，给x以增量Δx $(\Delta x\neq 0, x+\Delta x\in I_x)$

由$y=f(x)$的单调性可知 $\Delta y\neq 0$,

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$ 即 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

例 5　求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解　$\because\ x=\sin y$ 在 $I_y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，

且 $(\sin y)'=\cos y>0$，　$\therefore$ 在 $I_x\in(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得　$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};\quad (arc\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

2.2.3　复合函数的求导法则

定理　如果函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0可导，而$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导, 且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即　因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

证明 由$y=f(u)$在点u_0可导，$\therefore \lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha \quad (\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$

则 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}]$$

$$=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

推广 设 $y=f(u),\ u=\varphi(v),\ v=\psi(x)$,

则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

例 6 求函数 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解 $\because\ y=\ln u,\ u=\sin x.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

一般 $:y'=\dfrac{1}{\sin x}(\sin x\,)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

例 7 求函数 $y=(x^2+1)^{10}$ 的导数 .

解 $$\frac{dy}{dx}=10(x^2+1)^9\cdot(x^2+1)'$$

$$=10(x^2+1)^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9.$$

例 8 求函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的导数.

解 $$y'=e^{\sin\frac{1}{x}}(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(\frac{1}{x})'$$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

例 9 求函数 $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\ (x>2)$ 的导数.

解 $\because y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\dfrac{1}{3}\ln(x-2),$

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{3(x-2)}$$

$$=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}$$

例 11求函数 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ 的导数．

$(a>0)$

解 $$y'=(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2})'+(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a})'$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}.$$

例 12 证明幂函数的求导公式：$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$

证明 $(x^{\mu})' = (e^{\mu\ln x})' = e^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)'$

$$= x^{\mu}\cdot\mu\cdot\frac{1}{x} = \mu x^{\mu-1}$$

2.2.4 初等函数的导数问题

1. 常数和基本初等函数的导数公式

(1).$(C)' = 0$, (2). $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$,

(3).$(\sin x)' = \cos x$, (4). $(\cos x)' = -\sin x$,

(5).$(\tan)' = \sec^2 x$, (6). $(\cot x)' = -\csc^2 x$,

(7).$(\sec x)' = \sec x\tan x$, (8). $(\csc x)' = -\csc x\cot x$,

(9).$(a^x)' = a^x\ln a$, (10) $(e^x)' = e^x$,

$$(11).\ (\log_a^x)' = \frac{1}{x\ln a},\qquad (12).\ (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(13).\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (14).\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(15).\ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},\qquad (16).\ (arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x), v=v(x)$ 都可导，则

$$(1).\ (u \pm v)' = u' \pm v',\qquad (2).\ (Cu)' = Cu',$$

$$(3).\ (uv)' = u'v + uv',\qquad (4).\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ (v \neq 0).$$

3. 反函数的求导法则

3. 复合函数的求导法则

设$y = f(u)$, 而$u = \varphi(x)$则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$的导数为$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 或 $y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

利用上述公式及法则初等函数求导问题可完全解决.

注意：初等函数的导数仍为初等函数.

课堂练习 .

1. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$,求 y' .

2. 设 $y=x^{a^{a}}+a^{x^{a}}+a^{a^{x}}\ (a>0)$,求 y'.

3. $y=\mathrm{e}^{\sin x^{2}}\arctan\sqrt{x^{2}-1}$,求 y' .

4. 求函数 $y=f^{n}(\sin x)$ **的导数**,其中$f(u)$**可导**.

1. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$，求 y'.

$\boxed{\text{先化简后求导}}$

解 ∵ $y=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$

$$\therefore\quad y'=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(2x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

2. 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$，求 y'.

解： $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}$

$$+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$$

3. $y = \mathrm{e}^{\sin x^2} \arctan\sqrt{x^2 - 1}$，求 y'.

解：
$$y' = \left(\mathrm{e}^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x\right) \arctan\sqrt{x^2-1}$$
$$+ \mathrm{e}^{\sin x^2}\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x\right)$$

$$= 2x\cos x^2 \mathrm{e}^{\sin x^2} \arctan\sqrt{x^2-1}$$
$$+ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \mathrm{e}^{\sin x^2}$$

关键： 搞清复合函数结构 由外向内逐层求导

N J U T

4 求函数 $y = f^n(\sin x)$ 的导数,其中 $f(u)$ 可导.

解

$$y' = nf^{n-1}(\sin x)\cdot[f(\sin x)]'$$

$$= nf^{n-1}(\sin x)\cdot f'(\sin x)(\sin x)'$$

$$= nf^{n-1}(\sin x)\cdot f'(\sin x)\cos x$$

内容小结

1、 熟记导数基本公式以及导数的运算法则。

2、 熟练掌握初等函数（复合函数）导数的计算。

作业： 习题 2-2 1---4

课后： 习题 2-2