2.2 求导法则

2.2　函数的求导法则（续）

2.2.5 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

1. 隐函数的导数

定义： 由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数

$y = y(x)$ 称为隐函数.

$y = f(x)$ 形式称为显函数.

$F(x, y) = 0 \Rightarrow y = f(x)$ 隐函数的显化

问题：隐函数不易显化或不能显化如何求导？

隐函数求导法则：

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

例 1 求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$所确定的隐函数

y的导数 $\dfrac{dy}{dx}, \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程两边对x求导,

$$y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

解得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x - y}{x + e^y}$, 由原方程知 $x = 0, y = 0,$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

例 2 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程,并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

解 方程两边对x求导, $3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$

$$\therefore y'\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1.$$

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$ 即 $x+y-3=0.$

法线方程为 $y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$ 即 $y=x,$

显然通过原点.

2、对数求导法

观察函数 $$y=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x},\quad y=x^{\sin x}.$$

方法：

先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

-------- 对数求导法

适用范围：

1). **幂指函数** $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

一般地 $y = u(x)^{v(x)} \quad (u(x) > 0)$

$\because \ \ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$

两边对x求导：

$$\therefore \frac{y'}{y} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\therefore y' = u(x)^{v(x)} [v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x) u'(x)}{u(x)}]$$

例 3 设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$, 求y'.

解 等式两边取对数得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

上式两边对x求导得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

另一方法:

$y=u(x)^{v(x)}=e^{v(x)lnu(x)}$, 再利用复合函数的求导法求出。

$$(x^{\sin x})' = (e^{\sin x \ln x})'$$

$$= e^{\sin x \ln x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

例 4　已知 $x^y=y^x$ 确立了 y 是 x 的函数，求 y 的导数。

解　两边取对数　$y\ln x=x\ln y$

两边对 x 求导　$y'\ln x+\dfrac{y}{x}=\ln y+x\dfrac{y'}{y}$

$$y'=\frac{\ln y-\dfrac{y}{x}}{\ln x-\dfrac{x}{y}}=\frac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}.$$

2). 形如$y=\dfrac{u_1^{k_1}(x)u_2^{k_2}(x)\cdots u_n^{k_n}(x)}{v_1^{k_1'}(x)v_2^{k_2'}(x)\cdots v_m^{k_m'}(x)}$

其中$k_1,k_2\cdots k_n,k_1',k_2',\cdots k_m'$为常数。

例 5 求$y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3(x-4)}}$的导数

解 两边先取绝对值再取对数得:

$$\ln|y|=\frac{1}{2}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|]$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

$$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

例 6 设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$，求$y'$.

解 等式两边先取绝对值再取对数得

$$\ln|y|=\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-1|-2\ln|x+4|-x$$

上式两边对 x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right]$$

3、由参数方程所确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定 y 与 x 的函数关系，

称此由参数方程所确定的函数．

例如 $\begin{cases} x=2t, \\ y=t^2, \end{cases} \Rightarrow t=\dfrac{x}{2}$ 消去参数 t

$$\therefore y=t^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4} \quad \therefore y'=\frac{1}{2}x$$

问题： 消参困难或无法消参如何求导？

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

设函数$x = \varphi(t)$**单调,则反函数** $t = \varphi^{-1}(x)$存在,

$$\therefore\ y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$$

再设函数$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$都可导, 且$\varphi'(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \text{即}\ \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

例 7 **求摆线** $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ **在** $t = \dfrac{\pi}{2}$ **处的切线方程**

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a - a \cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \dfrac{\pi}{2}}{1 - \cos \dfrac{\pi}{2}} = 1.$$

当 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 时, $x = a(\dfrac{\pi}{2} - 1)$, $y = a.$

所求切线方程为 $y - a = x - a(\dfrac{\pi}{2} - 1)$

即 $y = x + a(2 - \dfrac{\pi}{2})$

例 8 求对数螺线 $\rho = e^{\theta}$ 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程

解 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta = e^{\theta}\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta = e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta}{-e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left.\frac{\sin\theta + \cos\theta}{-\sin\theta + \cos\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$(x_0, y_0) = (0, e^{\frac{\pi}{2}})$$

切线方程为：$y - e^{\frac{\pi}{2}} = -x$

例 9. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ $(0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解： 方程组两边对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$

2.2.6 、相关变化率

设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 都是可导函数, 而变量 x 与 y 之间存在某种关系, 从而它们的变化率 $\dfrac{dx}{dt}$ 与 $\dfrac{dy}{dt}$ 之间也存在一定关系, 这样两个相互依赖的变化率称为相关变化率.

相关变化率问题:

已知其中一个变化率时如何求出另一个变化率?

例 10 一汽球从离开观察员 500米处离地面铅直上升，其速率为 140米/秒．当气球高度为 500米时，观察员视线的仰角增加率是多少？

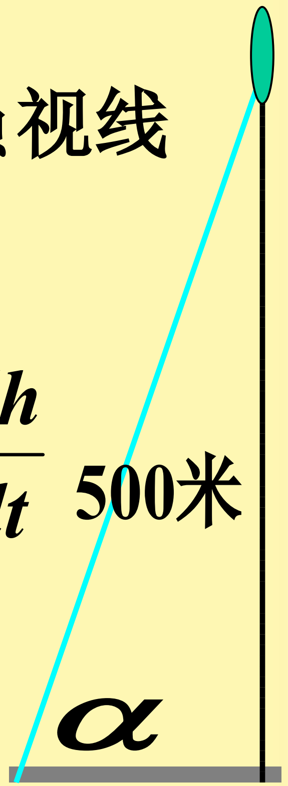
解 设气球上升 t 秒后，其高度为 h，观察员视线的仰角为 α，则 $\tan\alpha = \dfrac{h}{500}$

上式两边对 t 求导得 $\sec^2\alpha \cdot \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{1}{500} \cdot \dfrac{dh}{dt}$

$\because \dfrac{dh}{dt} = 140$米/秒,

当 $h = 500$米时， $\sec^2\alpha = 2$

$\therefore \dfrac{d\alpha}{dt} = 0.14$(弧度/秒)



内容小结

1、 熟练掌握隐含数、由参数方程确定的函数的导数的计算。

2、 会用对数求导法求幂指函数及因子较多的一些函数的导数。

3、了解相关变化率的概念，会求相关变化率

作业 2-2 5-8, 2-3 7