# 2.3　高阶导数

## 一　高阶导数的概念

**定义**

如果函数$f(x)$的数 $\{f'(x)$在点$x$处可导,即¿ $(f'(x))' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$ ¿存在,则称$(f'(x))'$ 函数$f(x)$在点$x$处的二阶导数.¿¿

记作　$f''(x),\ y'',\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数，$f'''(x),\ y''',\ \dfrac{d^3y}{dx^3}$.

三阶导数的导数称为四阶导数，$f^{(4)}(x),\ y^{(4)},\ \dfrac{d^4y}{dx^4}$.

一般地, 函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的$n$阶导数,记作

$$f^{(n)}(x),\ \ y^{(n)},\ \ \frac{d^n y}{dx^n}\text{或}\frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

相应地, $f(x)$称为零阶导数; $f'(x)$称为一阶导数.

注（1） 若 $f^{(n)}(x)$ 存在，则称 $f(x)$ $n$ 阶可导。

（2） 若 $f^{(n)}(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x$ 的某一领域内必具有低于 $n$ 阶的一切导数。

## 二、 求函数的高阶（二、三阶）导数

**方法：** 由高阶导数的定义逐步求二、三阶导数．

**例 1** $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 求 $y'''$.

**解** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

$$y''=\left((x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$y'''=-(x^2+1)^{-3/2}-x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(x^2+1)^{-5/2}\cdot 2x$$

$$=(x^2+1)^{-5/2}\left(-(x^2+1)+3x^2\right)=\frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}$$

例 2　设 $y=\ln f(x)$, 其中 $f(x)$ 二阶可导，求 $y''$

解

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$y'' = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{f^2(x)}$$

$$= \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}$$

**例 3** 求由方程 $y=1+xe^y$ 确定的隐函数 $y$ 的二阶导数

**解** 两边对 $x$ 求导,得 $y' = e^y + xe^y \cdot y'$

$$y' = \frac{e^y}{1-xe^y}.$$

$$y'' = \frac{(1-xe^y)e^y \cdot y' - e^y(-e^y - xe^y \cdot y')}{(1-xe^y)^2}$$

$$= \frac{e^y \cdot y' + e^{2y}}{(1-xe^y)^2} = \frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$$

**另解** 直接在 $y' = e^y + xe^y \cdot y'$ 两边对 $x$ 求导

$$y'' = e^y \cdot y' + e^y \cdot y' + xe^y \cdot (y')^2 + xe^y \cdot y''$$

解得 $$y'' = \frac{e^{2y}(2 - xe^{y})}{(1 - xe^{y})^{3}}$$

注　（1）隐函数求导实质是在方程 $F(x,y)=0$ 两边对 $x$ 求导时，把 $y$ 看成中间变量，利用复合函数的求导法则。

(2)　隐函数的高阶导数 ( 一般二阶 ), 可直接在一阶导数的基础上两边求导 , 不一定要解出 $y'$.

(3)一般 $y', y''$ 中可含有 $y$.

**例 4** 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$，求$y''$在点(0,1)处的值 .

**解** 方程两边对$x$求导得

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3 y' = 0 \qquad (1)$$

代入 $x = 0,\ y = 1$得 $\left. y' \right|_{\substack{x=0\\y=1}} = \dfrac{1}{4}$;

将方程(1)两边再对$x$求导得

$$12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2 (y')^2 + 4y^3 y'' = 0$$

代入 $x = 0,\ y = 1,\ \left. y' \right|_{\substack{x=0\\y=1}} = \dfrac{1}{4}$ 得 $\left. y'' \right|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\dfrac{1}{16}$.

例 5 求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d(-\tan t)}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

一般地，若函数$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$二阶可导，

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

即 $$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

**例 6** 已知$y(x)$由$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$确定，求$\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

**解**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{1}{2t})}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{4t^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d(-\frac{1+t^2}{4t^3})}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^2)(3+t^2)}{8t^5}$$

# 三、求函数的 $n$ 阶导数

## 1. 几个基本初等函数的 $n$ 阶导数

**方法:** 求 $n$ 阶导数时，求出 1-3 或 4 阶后，分析结果的规律性，写出 $n$ 阶导数.(数学归纳法证明)

**例 1.** 设 $y=e^x$，求 $y^{(n)}$

**解**

$$y' = e^x, \quad y'' = e^x, \cdots\cdots y^{(4)} = e^x.$$

一般地 $$y^{(n)} = e^x$$

即 $$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

注： $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \qquad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$

**例 2** 设 $y=\sin x$, 求$y^{(n)}$.

**解** $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$\cdots\cdots$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

注： $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

**例 3** 设 $y=\ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$.

**解** $y'=\dfrac{1}{1+x}$ $\quad y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$y'''=\dfrac{2!}{(1+x)^3}$ $\quad y^{(4)}=-\dfrac{3!}{(1+x)^4}$

$\cdots\cdots$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n\geq 1,\ \ 0!=1)$$

注：$\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

一般 $\left(\dfrac{1}{x\pm a}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x\pm a)^{n+1}}$

**例4** 设 $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$, 求 $y^{(n)}$.

**解** $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad n \geq 1$$

若 $\alpha$ 为正整数，则

$$(x^n)^{(n)} = n!, \quad (x^n)^{(k)} = 0, k > n$$

## 2. 高阶导数的运算法则:

设函数$u$和$v$具有$n$阶导数, 则

(1) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

(2) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

(3) $(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$ 莱布尼兹公式

**例 5** 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求$y^{(20)}$.

**解** 设$u = e^{2x}, v = x^2$,则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)$$

注：用莱布尼兹公式的一般形式：$P_n(x) f(x)$,条件：

$n$较小，$f(x)$的$n$阶高阶导数易求。

## 3. 求函数的 $n$ 阶导数

**间接法：** 将函数初等变形，利用已知的高阶导数公式和运算法则求 $n$ 阶导数。

常用高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0) \qquad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

(6) $(\frac{1}{x \pm a})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x \pm a)^{n+1}}$

**例 6**　已知$y=\dfrac{3x}{x^2-x-2}$，求$y^{(n)}$.

**解**　$$y=\frac{3x}{x^2-x-2}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}$$

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{(n+1)}},\quad \left(\frac{2}{x-2}\right)^{(n)}=\frac{2(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}+\frac{2\cdot(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$$

例7 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

解： $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos(4x+n\frac{\pi}{2})$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

## 内容小结

1、 熟练掌握初等函数、隐含数、由参数方程确定的函数的一阶，二阶导数的计算。

2、 熟练掌握对数求导法

3、掌握一些函数的 $n$ 阶导数的计算

注：求高阶 $(n)$ 导数的方法：

(1) 利用归纳法。

(2) 将函数初等变形，利用已知的高阶导数公式和运算法则求出 $n$ 阶导数。

(3) 利用莱布尼兹公式计算。（一般乘积形式。）

**作业 2-3 课后 2-3**