2.4 函数的微分

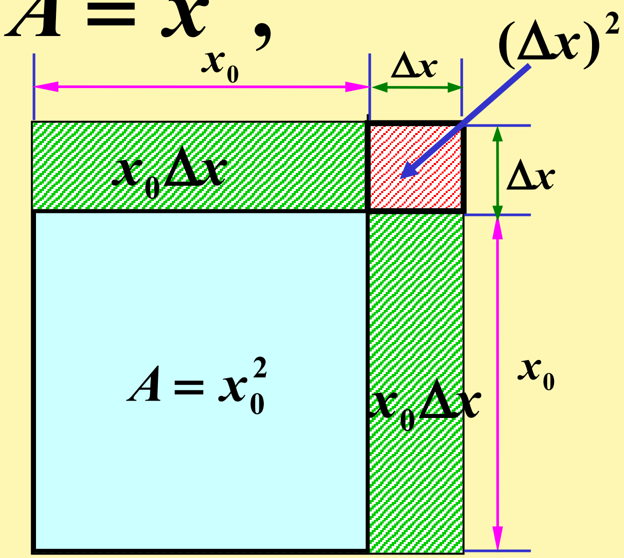
2.4 函数的微分

2.4.1 微分的概念

1 **引例：** 正方形金属薄片受热后其边长从x_0变到$x_0+\Delta x$，

问此薄片面积改变了多少？

设薄片边长为 x，面积为 A，$A = x^2$，则面积的增量为



$$\therefore \Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= \underbrace{2x_0 \cdot \Delta x}_{(1)} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$

(1)：Δx的线性函数，且为ΔA的主要部分；$\Delta A \approx 2x_0\Delta x$

(2)：Δx的高阶无穷小，当$|\Delta x|$很小时可忽略.

再例如，设函数 $y=x^3$ 在点 x_0 处的改变量为 Δx 时，求函数的改变量 Δy.

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3$$

$$=\underbrace{3x_0^2\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}_{(2)}.$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，(2)是 Δx 的高阶无穷小 $o(\Delta x)$,

$\therefore \Delta y\approx 3x_0^2\cdot\Delta x.$ 既容易计算又是较好的近似值

问题：这个线性函数（改变量的主要部分）是否所有函数的改变量都有？它是什么？如何求？

2. 微分的定义

定义 . 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义 ,

若函数在 x_0 的增量可表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

(A 为不依赖于△ x 的常数)

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，而 $A\cdot\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作 $dy\big|_{x=x_0}$ 或 $df(x_0)$,

$$\text{即}\, dy\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x.$$

微分 dy 叫做函数增量 Δy 的线性主部.（微分的实质）

注：由定义知

：

(1) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶无穷小，(当 $\Delta x \to 0$)；

(2) 当 $A \neq 0$ 时，dy 与 Δy 是等价无穷小；($\Delta x \to 0$)

$$\because \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0).$$

(3) 当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y \approx dy$ （线性主部）.

3、可微的条件

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A = f'(x_0)$.

证明 (1) 必要性 $\because f(x)$ 在点 x_0 可微，

$$\therefore \Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \qquad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

$$\text{则} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

即函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $A = f'(x_0)$.

(2) 充分性 $\because$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0),\quad \text{即}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

从而 $\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot(\Delta x)$, $\because \alpha\to 0\quad(\Delta x\to 0)$,

$$=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x),$$

$\because$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，且 $f'(x_0)=A$.

$\therefore$ 可导 $\Leftrightarrow$ 可微. $\qquad A=f'(x_0)$.

注1　函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 dy 或 $df(x)$, 即 $dy=f'(x)\Delta x$.

2 通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 dx，即 $dx = \Delta x$.

$$\therefore dy = f'(x)dx. \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

即函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商等于该函数的导数. 导数也叫"微商".

例 1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$, $\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $\because dy = (x^3)'\Delta x = 3x^2\Delta x.$

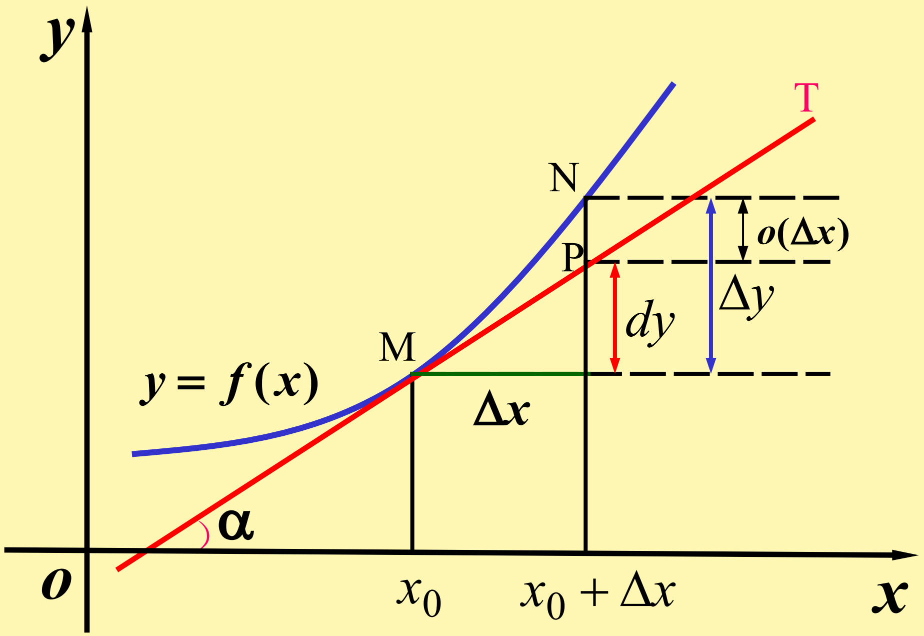
$$\therefore dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 0.24.$$

注 $\Delta y = (2+0.02)^3 - 2^3 = 0.242408 \approx dy = 0.24$

4、微分的几何意义

几何意义：（如图）

当Δy是曲线的纵坐标增量时，dy就是切线纵坐标对应的增量.



当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，切线段MP可近似代替曲线段MN.

2.4.2 、微分的运算法则及基本公式

$$dy = f'(x)dx$$

求法： 计算函数的导数，乘以自变量的微分 .

1. 基本初等函数的微分公式

$d(C) = 0$ $\qquad$ $d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$

$d(\sin x) = \cos x dx$ $\qquad$ $d(\cos x) = -\sin x dx$

$d(\tan x) = \sec^2 x dx$ $\qquad$ $d(\cot x) = -\csc^2 x dx$

$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$ $\qquad$ $d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \qquad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx \qquad d(arc \cot x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

3、复合函数的微分法则 --- 一阶微分形式的不变性

设函数 $y=f(x)$有导数 $f'(x)$,

(1) 若x是自变量时， $dy=f'(x)dx;$

(2) 若x是中间变量时，即另一变量 t的可微函数 $x=\varphi(t)$，则 $dy=f'(x)\varphi'(t)dt$

$\because \varphi'(t)dt=dx,$ $\therefore dy=f'(x)dx.$

结论： 无论 x是自变量还是中间变量，函数 $y=f(x)$的微分形式总是 $\boxed{dy=f'(x)dx}$

微分形式的不变性

例 2 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求 $dy\big|_{x=0}$

解 $\because y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$, $\therefore dy\big|_{x=0}=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx\Big|_{x=0}=dx.$

另解 : $dy\big|_{x=0}=\dfrac{d(x+e^{x^2})}{x+e^{x^2}}\Big|_{x=0}=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx\Big|_{x=0}=dx.$

例 3 设 $y=e^{1-3x}\cos x$, 求 dy.

解 $dy=\cos x\cdot d(e^{1-3x})+e^{1-3x}\cdot d(\cos x)$

$$=\cos x\cdot e^{1-3x}d(1-3x)+e^{1-3x}\cdot(-\sin x)dx$$

$$\therefore dy=\cos x\cdot(-3e^{1-3x})dx+e^{1-3x}\cdot(-\sin x)dx$$

$$=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx.$$

例 4 设 $y = f(\ln(x^2+1))$，f 可导，则 $dy = ($ B $)$

$A \quad dy = f'(\ln(x^2+1))dx$

$B \quad dy = f'(\ln(x^2+1))d\ln(x^2+1)$

$C \quad dy = f'(\ln(x^2+1))\dfrac{1}{x^2+1}dx$

$D \quad dy = f'(\ln(x^2+1))\dfrac{1}{x^2+1}d\dfrac{1}{x^2+1}$

$$dy = f'(\ln(x^2+1))\frac{2x}{x^2+1}dx$$

例 5 在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立.

(1) $d(\quad) = \cos\omega t dt$; (2) $d(\sin x^2) = (\quad) d(\sqrt{x})$.

解 (1) $\because d(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t dt$,

$$\therefore \cos\omega t dt = \frac{1}{\omega} d(\sin\omega t) = d\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right);$$

$$\therefore d\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t + C\right) = \cos\omega t dt.$$

(2) $$\because \frac{d(\sin x^2)}{d(\sqrt{x})} = \frac{2x\cos x^2 dx}{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx} = 4x\sqrt{x}\cos x^2,$$

$$\therefore d(\sin x^2) = (4x\sqrt{x}\cos x^2) d(\sqrt{x}).$$

注：此题也称为求 $\sin x^2$ 对 $\sqrt{x}$ 的导数

例 6　设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$，求 dy.

注　　这是由隐函数确定的函数的微分，方法有二：

(1). 可以先求 y 的导数，然后再根据公式 $dy=y'dx$ 求出 dy.

(2). 利用微分形式的不变性，两边微分 .

解：利用一阶微分形式不变性，有

$$d(y\sin x)-d(\cos(x-y))=0$$

$$\sin x\,dy+y\cos x\,dx+\sin(x-y)(dx-dy)=0$$

$$dy=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}dx$$

内容小结

1、 理解微分的概念及几何意义

2、 熟练掌握微分的计算

3、 微分在近似计算中的应用（自学）

习题 2.4

2.4.3 微分在近似计算中的应用

1 计算函数增量的近似值.

若$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)\neq 0$,且

$|\Delta x|$很小时, $\Delta y\big|_{x=x_0}\approx dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x.$

例 1 半径10厘米的金属圆片加热后,半径伸长了0.05厘米,问面积大约增大了多少?

解 设$A=\pi r^2$, $r=10$厘米, $\Delta r=0.05$厘米.

$$\therefore\quad \Delta A\approx dA=2\pi r\cdot\Delta r=2\pi\times 10\times 0.05$$

$$=\pi\ (\text{厘米}^2).$$

2、计算函数的近似值

1.求$f(x)$在点$x=x_0$附近的近似值;

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot \Delta x.$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x. \quad (|\Delta x|\text{很小时})$$

例 1 计算$\cos 60^o 30'$的近似值.

解 设$f(x)=\cos x$, $\therefore f'(x) = -\sin x$, ($x$为弧度)

$$\because x_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \Delta x = \frac{\pi}{360},$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \cos 60^{o}30' = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{360}\right) \approx \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360} \approx 0.4924.$$

2.求$f(x)$在点$x=0$附近的近似值;

令 $x_0 = 0, \Delta x = x.$

$$\because f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

$$\therefore f(x) \approx f(0)+f'(0)\cdot x.$$

常用近似公式 ($|x|$很小时)

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$;　(2) $\sin x \approx x$ (x为弧度);

(3) $\tan x \approx x$ (x为弧度); (4) $e^x \approx 1+x$;

(5) $\ln(1+x) \approx x$.

证明 (1) 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$, $f'(x)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}$,

$$f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{n}.$$

$$\therefore f(x) \approx f(0)+f'(0)x = 1+\frac{x}{n}.$$

例 2　计算下列各数的近似值.

(1) $\sqrt[3]{998.5}$;　　(2) $e^{-0.03}$.

解　(1) $\sqrt[3]{998.5} = \sqrt[3]{1000 - 1.5}$

$$= \sqrt[3]{1000(1 - \frac{1.5}{1000})} = 10\sqrt[3]{1 - 0.0015}$$

$$\approx 10(1 - \frac{1}{3} \times 0.0015) = 9.995.$$

(2) $e^{-0.03} \approx 1 - 0.03 = 0.97.$