高等数学 A （上）期末复习 (2017)

第 一部分 期中考试前内容 (30% 左右)

重点

1、无穷小的比较，无穷小阶的估计；

利用两个重要极限、等价无穷小替换求极限；

函数连续的概念；会判别间断点类型 .

2、初等函数、隐函数、参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数的计算 .

3、利用洛必达法则求极限

难点

中值定理的应用

例 1　选择题与填空

1、当$x \to 0^{+}$时，下列无穷小量关于x阶数最高的是 $\underline{D}$

$(A)\ 1-\cos\sqrt{x},$　　$(B)\ \sqrt{x}+x^{4},$

$(C)\ x\sin\sqrt[3]{x}$　　$(D)\ x\ln(1+2x^{2})$

解　$x \to 0,\ 1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x$　　$\sqrt{x}+x^{4} \sim x^{\frac{1}{2}}$

$x\sin\sqrt[3]{x} \sim x^{\frac{3}{4}}$　　$x\ln(1+2x^{2}) \sim 2x^{3}$

2、设$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x} & x<0 \\ (1-x)^{\frac{1}{x}} & x>0 \end{cases}$，则$x=0$是$f(x)$的 $\underline{B}$

(A)　可去间断点　　(B)　跳跃间断点

(C)　无穷间断点　　(D)　低连续点

3、$f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$，则$x=0$是$f(x)$的 跳跃 间断点

解 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=0,\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=1,$

4、已知$f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-1)}$，则$x=0$为 跳跃 间断点，

$x=1$为 无穷 间断点，$x=-1$为 可去 间断点

5、已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2} & x\neq0\\ k & x=0\end{cases}$ 在$x=0$处连续，

则$k=$ $\dfrac{3}{2}$

4、解 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)\sin x}{x(x^2-1)} = -1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)\sin x}{-x(x^2-1)} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{|x|(x-1)} = \infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{\sin x}{|x|(x-1)} = \frac{1}{2}\sin 1$$

5、解 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 2\sin 2x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 4\cos 2x}{2} = \frac{3}{2}$$

6、若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = e^4$，则$a=$ $\underline{\quad 2 \quad}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\left(\dfrac{x+a}{x-a}-1\right)\right]^x$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2a}{x-a}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a} = e^4$$

$$\Rightarrow a = 2$$

7、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+5^n+7^n} =$ $\underline{\quad 7 \quad}$

注：设$a_i>0,(i=1,2,\cdots m.)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^{\,n}+a_2^{\,n}\cdots+a_m^{\,n}}$

$$= Max(a_1, a_2 \cdots a_m)$$

8、设$f(x)$可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线的斜率为 $\underline{\quad -2 \quad}$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1 \qquad \Rightarrow k=f'(1)=-2$$

9、$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在$x=0$处(B)

(A) 不连续 (B) 连续但不可导

(C)可导但导函数不连续 (D) 导函数连续

解:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$\because \lim_{x\to 0} x^{\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$$

$\therefore f(x)$在$x=0$处连续

$$\text{又}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{-\frac{1}{3}}\sin\frac{1}{x}$$

极限不存在, $\therefore f(x)$在$x=0$处不可导　应选 B

10、设$f(x)=\begin{cases} ae^{x}, & x<0 \\ b+\ln(x+1), & x\geq 0 \end{cases}$在$x=0$处可导,则$a=$____

$b=$____

解 根据$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ 得: $a=b$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ae^{x}-a}{x}=a$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{b+\ln(1+x)-b}{x}=1$$

$$\Rightarrow a=b=1$$

NJUPT

例 2 、计算下列极限

1、 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin^2 x\cdot 2\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x^2}=\frac{1}{2}$$

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

解: $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\frac{1}{2}$

原极限 $=\frac{1}{2}$

3、$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{-\tan(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2(-\sin\frac{\pi}{2}x)}=-\frac{4}{\pi^2}$$

4、$$\lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$$

$$=\lim_{t\to 0}[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)]\qquad (\text{令}x=\frac{1}{t})$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2t(1+t)}=\frac{1}{2}$$

NJUPT

5、$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (1^∞)

解法一 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim\left[(1+u(x)-1)^{\frac{1}{u(x)-1}}\right]^{[u(x)-1]v(x)}$$

$$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \qquad (1^\infty)$$

解法二 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x\sin x}{6x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

$$\lim u(x)^{v(x)} = e^{\lim v(x)\ln u(x)}$$

例3、计算题

1、设$y=y(x)$由方程 $xy+2\ln x=y^4$确定，求曲线 $y=y(x)$在点(1,1)处的切线方程及dy和$y''(1)$。

解：方程两边对x求导， $y+x\cdot y'+\dfrac{2}{x}=4y^3y'$ ①

$$y'=\frac{xy+2}{4xy^3-x^2}$$

将$x=1$，$y=1$代入上式解得 $y'(1)=1$

切线方程$y=x$， $dy=y'dx=\dfrac{xy+2}{4xy^3-x^2}dx$

再对 ① 求导，得

$$2y'+xy''-\frac{2}{x^2}=12y^2(y')^2+4y^3y''$$

将$x=1$，$y=1$，$y'=1$ 代入上式 解得 $y''(1)=-4$

2、$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \int_0^{t^2} \ln(1+u)du \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} / \dfrac{dx}{dt} = (1+t^2)\ln(1+t^2),$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = (1+t^2)[\ln(1+t^2)+1]$$

3、$y = f(\arcsin\sqrt{x}) + x^{\sin\frac{1}{x}} (x>0)$，求$dy$.

解：$dy = [f'(\arcsin\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

$$+x^{\sin\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x})]dx$$

4、设 $y = x^2 e^{2x}$, 求$y^{(20)}$.

解 $$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$$

5、已知$y = \dfrac{3x}{x^2 - x - 2}$, 求$y^{(n)}$.

$$\boxed{\left(\frac{1}{x \pm a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x \pm a)^{n+1}},}$$

解 $$y = \frac{3x}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{2 \cdot (-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$$

NJUPT

6、 对数螺线$r=e^{\theta}$在点$(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$处的切线的直角坐标方程

解：
$$\begin{cases} x = r\cos\theta = e^{\theta}\cos\theta \\ y = r\sin\theta = e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta}{-e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left.\frac{\sin\theta+\cos\theta}{-\sin\theta+\cos\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$(x_0, y_0) = (0, e^{\frac{\pi}{2}})$$

切线方程为：$y - e^{\frac{\pi}{2}} = -x$

第 二部分 期中考试后内容 (70% 左右)

第 3 章 （ 20% 左右）

重点

1、求函数单调区间、极值及最值；曲线凹凸区间及拐点坐标；曲线的渐近线

2、会证明函数不等式

3、利用单调性结合零点定理判别函数零点的个数及范围

难点 泰勒公式及其应用（建议不考）

例 1 选择与填空

1、函数$y=e^{-\frac{1}{2}x^2}$的单增区间为 $(-\infty,0]$ ，相应曲线在 $[-1,1]$ 上凸，拐点坐标为 $(\pm 1, e^{-\frac{1}{2}})$

解：$y'=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ $\quad y''=e^{-\frac{1}{2}x^2}(x+1)(x-1)$

2、函数$f(x)=x^3+2x+q$的零点个数为 1个

解：$f'(x)=3x^2+2>0,$ $\quad f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上增

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3、设$f(x)$二阶可导，$f'(x)>0, f''(x)<0,$则当$\Delta x>0$时有(C)

$(A)\ \Delta y>dy>0$ $\qquad (B)\ \Delta y<dy<0$

$(C)\ dy>\Delta y>0$ $\qquad (D)\ dy<\Delta y<0$

4、函数$y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$的单调区间______，极值___

解：$y'=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$

令$y'=0$得驻点

$x=2, x=-1$

单调增区间$(-\infty,-1)$, $(2,+\infty)$

单调减区间$(-1,0)$, $(0,2)$

极大值$f(-1)=e^{-1}$，极小值$f(2)=4e^{\frac{1}{2}}$

5、若函数$f(x)$满足$x^2f''(x)+5x[f'(x)]^2=3-e^{-x}$，

且$f'(c)=0, (c>0)$，则$x=c$是$f(x)$的极小值点

解：$\because f''(c)=\dfrac{3-e^{-c}}{c^2}>0$

6、设$f(x)$有二阶连续导数，$f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{\sqrt[3]{x}}=-2,$

则下列正确的是(D)

(A) $(0, f(0))$不是拐点 (B) $f(0)$是$f(x)$的极小值

(C) $f(0)$取得极大值 (D) $(0, f(0))$是拐点

解：由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{\sqrt[3]{x}}=-2, \Rightarrow f''(0)=0$

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{\sqrt[3]{x}}=-2, \Rightarrow f''(x)$在$x=0$的两边变号，

$\therefore (0, f(0))$是拐点

7、曲线$y=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-5x+6}$的渐近线有____条？

解：
$$\frac{x^2-3x+4}{x^2-5x+6}=\frac{x^2-3x+4}{(x-2)(x-3)}$$

曲线有两条铅直渐近线$x=2, x=3$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-5x+6}=1$ 曲线有水平渐近线$y=1$

例 2、证明：当$0<x<1$时，$(1-x)e^{2x}<1+x$

证明：设 $f(x)=(1-x)e^{2x}-1-x$,

$$f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1,$$

$$f''(x)=-4xe^{2x}<0 \quad (0<x<1)$$

$f'(x)$在$(0,1)$内单调递减且在$x=0$连续

$\therefore \quad f'(x)<f'(0)=0$

$f(x)$在$(0,1)$内单调递减且$x=0$在连续

因此 $f(x)<f(0)=0$

即$(1-x)e^{2x}<1+x$ 证毕 .

例3 讨论方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}$ 有几个实根.

解 令 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$, $D(0,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0,\quad \Rightarrow x=e$$

$f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调增，在 $(e,+\infty)$ 单调减

$$f(e)=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx>0$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\ln x-\frac{x}{e}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\ln x-\frac{x}{e}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx\right)=-\infty$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,e),(e,+\infty)$ 上各有一实根。

例 4 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，$f(0)=0$

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得 $\dfrac{3f(\xi)}{1-\xi}=f'(\xi)$

证明　令$F(x)=(x-1)^3 f(x)$，

$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导

又$F(0)=F(1)=0$　由罗尔定理

$\exists\xi\in(0,1)$，使$F'(\xi)=0$

$$F'(x)\Big|_{x=\xi}=(x-1)^2[3f(x)+(x-1)f'(x)]\Big|_{x=\xi}=0$$

即：$\dfrac{3f(\xi)}{1-\xi}=f'(\xi)$

第 4 、 5 章　　一元函数积分学 (35% 左右)

第 4 章

1 、原函数、不定积分的概念；

2 、利用换元法、分部积分法计算不定积分；

第 5 章

1 、定积分的定义、几何意义及性质；

2 、利用导数研究有关积分上限函数的单调性、极限、极值等，求分段函数的积分上限函数；

3 、利用换元法、分部积分法计算定积分，两类广义积分的基本计算；

4、 求平面图形的面积 、平面曲线弧长、旋转体的体积；

5、求变力沿直线所作的功、侧压力.

难点

1、 积分等式、不等式的证明；

2、积分中值定理的应用;

3、微积分的综合问题.

例 1、 选择题与填空

1、已知$\int f(x)dx = F(x)+C$，则$\int e^{-x} f(e^{-x})dx =$ ________

解 $\int e^{-x} f(e^{-x})dx = -\int f(e^{-x})de^{-x} = -F(e^{-x})+C$

2、设$f(x)$的一个原函数为$\sin 2x$，则$\int f'(2x)dx =$ ______

解 $F(x)=\sin 2x,\qquad f(x)=F'(x)=2\cos 2x,$

$$\int f'(2x)dx = \frac{1}{2}f(2x)+C \quad = \cos 4x + C$$

3、设$\int xf(x)dx = \arcsin x + C$，则$\int \frac{1}{f(x)}dx =$ ______

解 $xf(x)=(\arcsin x)' \qquad f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{1}{f(x)}dx = \int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

4、设$f(x)=x+2\int_0^1 f(x)dx$,则$f(x)=$ $\underline{\quad x-1 \quad}$

解. 设$\int_0^1 f(x)dx=C$,两边积分

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x+2C)dx \Rightarrow C=\frac{1}{2}+2C \Rightarrow C=-\frac{1}{2}$$

5、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2\sin 2x}=$ $\underline{\quad -\frac{1}{6}\quad}$

解： $$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{6x^2}=-\frac{1}{6}$$

6、(1)广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$收敛，则$p$的取值范围 $p>1$

注 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$，当$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散.

(2)已知$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}dx=1$，则$k=$______

解：$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}dx=\underline{\int_{-\infty}^{0}e^{-kx}dx}+\int_0^{+\infty}e^{kx}dx$$

$\boxed{令\ x=-t}$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{kx}dx=\frac{2}{k}e^{kx}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{2}{k}=1\quad k=-2$$

7、(1)曲线$y=\sin x \quad (\frac{\pi}{2}\le x\le \pi)$与直线$x=\frac{\pi}{2}, y=0$所围绕$x$轴旋转的旋转体的体积为$\underline{\quad \frac{\pi^2}{4} \quad}$

解：$V=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\frac{\pi^2}{4}$

(2)曲线$y=\frac{1}{x}$与直线$x=1, x=2$及x轴所围的图形绕y轴旋转的旋转体的体积为$\underline{\quad 2\pi \quad}$

解：用柱壳法

$$V=2\pi\int_1^2 xf(x)dx=2\pi\int_1^2 dx=2\pi$$

例 2 、计算下列积分

(1) $\int x\arctan x dx$

(2) $\int x\tan^2 x dx$

(3) $\int x^2\sin^2 x dx$

(4). $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$

(5). $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

(6) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$

(7) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

(8) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$

$$(1)\int x\arctan x dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2})\arctan x-\frac{x}{2}+C$$

$$(2)\int x\tan^2 x dx$$

$$=\int x(\sec^2 x-1)dx=\int x d\tan x-\int x dx$$

$$=x\tan x-\int\tan x dx-\int x dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+x\tan x+\ln|\cos x|+C$$

⑶ $\int x^2\sin^2 x dx = \int \frac{x^2}{2}dx - \frac{1}{2}\int x^2\cos 2x dx$

…… $2'$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4}\int x^2 d\sin 2x$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}\int 2x\sin 2x dx$$

------ $3'$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4}x^2\sin 2x - \frac{1}{4}\int x d\cos 2x$$

…… $2'$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4}x^2\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$$

(4). $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$ 令$x=\sin t$

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{\pi}{4}\ (令 t=\frac{\pi}{2}-u)$$

(5). $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \overset{x=\tan t}{=\!=\!=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{\sin t}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

注：也可令倒代换

$$(6)\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx \xlongequal{\sqrt{e^x-1}=t} \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}dt$$

$$=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2(t-\arctan t)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$$

$$(7)\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx \xlongequal{x=\sin t} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 t-1)dt=1-\frac{\pi}{4}$$

$$(8)\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$$

$$=\left(-\frac{\ln x}{1+x}+\ln\frac{x}{1+x}\right)\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$$

例 3. 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x<-1 \\ \dfrac{1}{2}(1-x), & -1\le x\le 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$ 求$F(x)=\int_0^x f(t)dt$

解：当$x<-1$

$$F(x)=\int_0^{-1}\frac{1}{2}(1-t)dt+\int_{-1}^{x}1dt=x+\frac{1}{4}$$

当$-1\le x<1$

$$F(x)=\int_0^{x}\frac{1}{2}(1-t)dt=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2$$

当$x>1$

$$F(x)=\int_0^{1}\frac{1}{2}(1-t)dt+\int_1^{x}(t-1)dt=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{4}$$

例 4、计算下列积分

1、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx$

解： 原式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)dx$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}$$

2、设 $G(x)=\int_{x^2}^{1}\frac{t}{\sqrt{1+t^3}}dt$，求 $\int_0^1 xG(x)dx$

解 $\int_0^1 xG(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 G(x)dx^2$

$$=\frac{1}{2}x^2G(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2G'(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}G(1)+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x^5}{\sqrt{1+x^6}}dx=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$$

3、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\ge 0\\ \dfrac{1}{1+e^{x}} & x<0.\end{cases}$ 求$\int_0^2 f(x-1)dx$

解：$\int_0^2 f(x-1)dx \overset{x-1=t}{=\!=\!=} \int_{-1}^{1} f(t)dt$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^{t}}dt+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1+e^{t}-e^{t}}{1+e^{t}}dt+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt$$

$$=[t-\ln(1+e^{t})]_{-1}^{1}+[\ln(1+x)]_0^1$$

$$=1+\ln(1+e^{-1})$$

4、 已知$f(x)$的一个原函数为e^{-x^2}，求$\int xf'(x)dx$

解 $\int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx,$

$\int f(x)dx = e^{-x^2} + C,$

又 $f(x) = -2xe^{-x^2},$

$\therefore \int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$

$= -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$

例 5 、定积分应用题

例 1. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线．该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积；

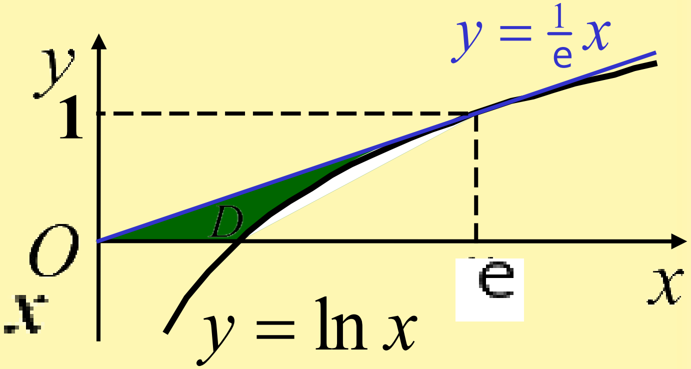
(2) 求 D 分别绕直线 x、y 轴旋转所得旋转体的体积

解：(1) 设切点的横坐标为 x_0，则所求切线方程为

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)$$

由切线过原点知 $\ln x_0-1=0$,

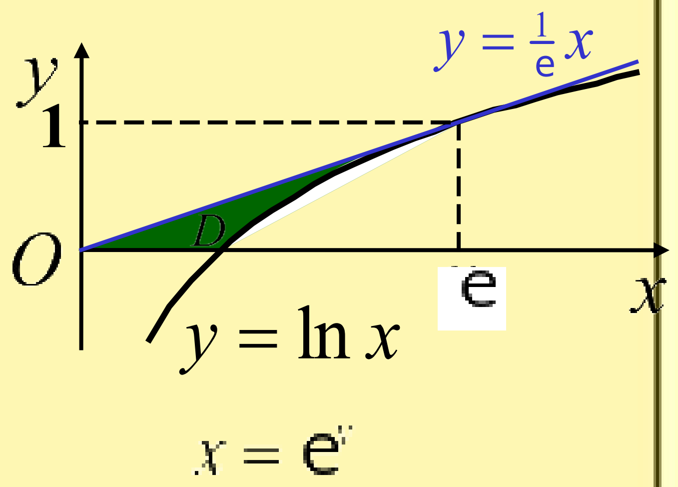
因此 $x_0=e$，故切线方程为 $y=\frac{1}{e}x$



D 的面积为 $A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\frac{e}{2}-1$

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

$$V_x=\frac{\pi e}{3}-\pi\int_1^e(\ln x)^2dx$$



$$=\frac{\pi e}{3}-\pi[x(\ln x)^2\Big|_1^e-2\int_1^e\ln x dx]$$

$$=\frac{\pi e}{3}-e+2$$

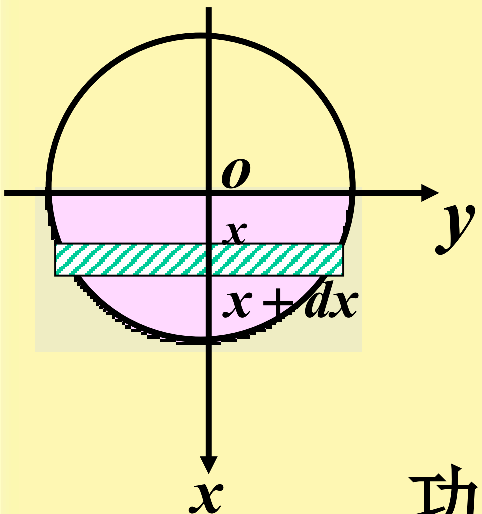
求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

$$V_y=\pi\int_0^1[(e^y)^2-(ey)^2]dy$$

$$=\frac{1}{6}\pi e^2-\frac{1}{2}\pi$$

例2 **有一半径为**R米开口向上的半球型容**器，盛满了水，试问要将容器里**的水全部吸出需做多少功？

解 建立坐标系如图



$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x$$

这一薄层水的重力为

$$9.8\pi\cdot(R^2-x^2)dx$$

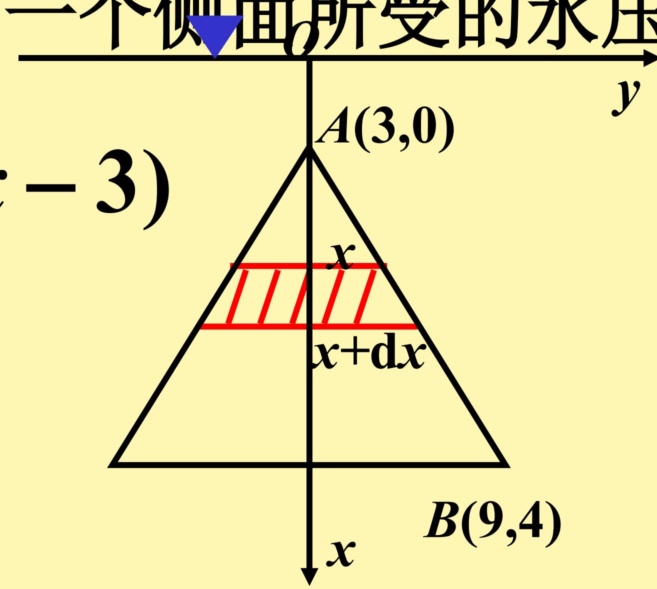
功元素为 $dw=9.8\pi\cdot x(R^2-x^2)dx$

$$w=\int_0^R 9.8\pi\cdot x(R^2-x^2)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\rho g R^4$$

例 3. 一底为 8m, 高为 6m 的等腰三角形薄片，铅直地沉入水中，顶在上，底边在下且与水面平行，而顶离水面 3m 时，试求它的一个侧面所受的水压力。

解：建立坐标系如图所示。



直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{2}{3}(x-3)$

$$dF=\rho g x\cdot\frac{4}{3}(x-3)dx$$

$$F=\frac{4}{3}\cdot\rho g\int_3^9 x(x-3)dx$$

$$=168\rho g(KN)$$

例 6 、有关微积分的综合证明题

1、设$f(x)$为$[0,+\infty)$上单调减少的连续函数，

证明：$\int_0^x (x^2-3t^2)f(t)\mathrm{d}t \ge 0$

证明：设$F(x)=x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x 3t^2 f(t)\mathrm{d}t$

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2x^2 f(x)$$

$$=2x^2 f(\xi)-2x^2 f(x) \quad \xi\in[0,x]$$

$\because f(x)$为$[0,+\infty)$上单调减少，$\therefore f(\xi)\ge f(x)$

则$F'(x)\ge 0$

$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加，又$F(0)=0$

$$\therefore \int_0^x (x^2-3t^2)f(t)\mathrm{d}t\ge 0$$

2、 设 $f(x)$ 在 [0， 1] 上可微，且有

$$f(1)=2\int_0^{1/2} e^{1-x^2} f(x)dx$$

求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

证明： 令 $g(x)=e^{1-x^2} f(x)$ 则 $f(1)=2\int_0^{1/2} g(x)dx$

$g(1)=f(1)$ $\underline{\underline{\text{积分中值定理}}}$ $e^{1-c^2} f(c)=g(c),\quad c\in[0,\frac{1}{2}]$

则 $g(x)$ 在 $[c,1]$ 上满足罗尔定理的条件

故存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$ 使 $g'(\xi)=0$,

即 $[-2xe^{1-x^2} f(x)+e^{1-x^2} f'(x)]_{x=\xi}=0$

$\because e^{1-\xi^2}\neq 0 \qquad \therefore f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

3、证明$f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t\,dt$在$(0,+\infty)$上的

最大值不超过$\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

证明：先求最大值

$$f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n} x=0 \Rightarrow x=1, x=n\pi$$

$$0<x<1, f'(x)>0, x>1,$$

$x>1, f'(x)\le 0,$ 仅在$x=n\pi, f'(x)=0$

$x=1$为极大值点也为最大值点

最大值$f(1)=\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n} t\,dt \le \int_0^1 (t-t^2)t^{2n}dt$

$$=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

高等数学 A （上）期末复习 (2017)

第 6 章　微分方程 (15% 左右)

1 、一阶微分方程中可分离变量方程、齐次方程、一阶线性方程 、伯努利方程的求解 .

2 、可降阶的微分方程的求解 .

重点：一阶微分方程中可分离变量方程、一阶线性方程 的求解；可降阶的微分方程的求解 .

例 1　求解微分方程

1、$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{y}e^{y^2+3x}=0$

2、　$x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$

3、$xy'+2y=x\ln x$，且$y(1)=-\dfrac{1}{9}$

4、求微分方程 $xy''-y'=x^2$ 的满足初始条件

$y(1)=1$，

$y'(1)=2$ 的特解．

例 1　求解微分方程

1、$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{y}e^{y^2+3x}=0$

解： 变形 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{y}e^{y^2}\cdot e^{3x}$

分离变量 $-ye^{-y^2}dy=e^{3x}dx$

积分得 $\dfrac{1}{2}e^{-y^2}=\dfrac{1}{3}e^{3x}+C_1$

方程通解为 $2e^{3x}-3e^{-y^2}=C$　$(C=-6C_1)$

2、 $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$

解法一

方程变形为 $$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

令 $u=\frac{y}{x}$ $\quad\therefore\quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,

方程为 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1+u^3}$, 即 :$-\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^4}\right)du=\frac{dx}{x}$

两边积分

$$\ln|x|+\ln|C_1|=\frac{1}{3u^3}-\ln|u| \Rightarrow \ln|C_1xu|=\frac{1}{3u^3}$$

$$\Rightarrow \ln|C_1y|=\frac{x^3}{3y^3} \qquad y=Ce^{\frac{x^3}{3y^3}} \qquad C=\pm\frac{1}{|C_1|}$$

2、 $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$

解法二: $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x^3+y^3}{x^2y}=\dfrac{1}{y}x+y^2x^{-2}$

$\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}\cdot x=y^2x^{-2}$ —— 伯努利方程

令 $z=x^3$，方程化为 $\dfrac{dz}{dy}-\dfrac{3}{y}z=3y^2$

所以 $z=e^{\int\frac{3}{y}dy}\left(\int 3y^2e^{\int-\frac{3}{y}dy}dy+C_1\right)$

$=y^3\left(\int\dfrac{3}{y}dy+C\right)=Cy^3+y^3\ln|y|$

原方程的通解为 $x^3=Cy^3+y^3\ln|y|$

3、$xy' + 2y = x\ln x$， 且$y(1) = -\frac{1}{9}$

解： 方程化为 $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \ln x$

通解：$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[C + \int \ln x e^{\int \frac{2}{x}dx} dx\right]$

$$= \frac{c}{x^2} + \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x$$

特解：$y = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x$

4、求微分方程 $xy'' - y' = x^2$ 的满足初始条件 $y(1)=1$，$y'(1)=2$ 的特解

解: 令 $y' = p$ 代入方程得 $xp' - p = x^2$，

即 $p' - \frac{1}{x}p = x$ ---- 一阶非齐次线性方程

$$p = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int xe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C_1\right)$$

$$= e^{\ln x}\left(\int xe^{-\ln x}dx + C_1\right) = x^2 + C_1 x$$

由 $y'(1)=2$，得 $C_1=1$ 所以 $y' = x^2+x$

两端再积分得 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C_2$ 由 $y(1)=1$，得 $C_2 = \frac{1}{6}$.

所求特解为 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}$.

例 2. 已知曲线c过点$A(1,0)$及$B(0,1)$，且$\overset{\frown}{AB}$为凸弧，P为曲线c上异于B的任一点，已知弧$\overset{\frown}{PB}$与弦PB所围的图形的面积为P的横坐标的立方，求此曲线方程

解. 设曲线：$y=f(x)$

建立微分方程：$\int_0^x f(t)dt-\frac{[f(x)+1]x}{2}=x^3$

求导：$f(x)-\frac{f(x)+1}{2}-\frac{x}{2}f'(x)=3x^2$且$f(1)=0$

求导：$y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x}-6x$且$y(1)=0$

解得$y=f(x)=-6x^2+5x+1,\qquad x\in[0,1]$

例 3. 由坐标原点向曲线的切线所作垂线之长等于切点的横坐标，求此曲线方程 .

解. **设曲线方程为**：$y = f(x)$

在(x, y)处的切线方程： $Y - y = y'(X - x)$

根据题设: $\dfrac{|y - xy'|}{\sqrt{1 + y'^2}} = x$ 即: $y' - \dfrac{1}{2x} y = -\dfrac{x}{2} y^{-1}$

令$z = y^2$,解此伯努利方程得

$$y^2 = x(C - x)$$

例 4 求一连续函数 $f(x)$,满足 $f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)dt$

解. 令 $x-t=u$

$$\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du$$

方程化为: $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)du$

求导方程化为求初值问题: $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$

求得 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x-e^{-x})$