# 第 3 章　　中值定理

# 3.1　中值定理

一　费马 (Fermat) 引理

二　罗尔 (Rolle) 定理

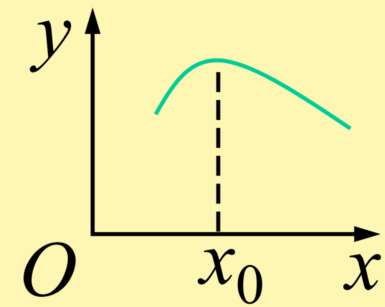
三　拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

四　柯西 (Cauchy) 中值定理

## 一、费马 (Fermat) 引理

设$f(x)$在$\mathring{U}(x_0)$有定义，且$f(x)\le f(x_0)$（或 $\ge$），

$f'(x_0)$存在，则$f'(x_0)=0$




证明 $\forall x_0+\Delta x\in \mathring{U}(x_0)$，$f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$，

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\begin{cases} f'_-(x_0)\ge 0 & (\Delta x\to 0^-) \\ f'_+(x_0)\le 0 & (\Delta x\to 0^+) \end{cases} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$

证毕

## 二　罗尔 (Rolle) 定理

设函数 $f(x)$ 满足：

(1) 在区间 $[a, b]$ 上连续

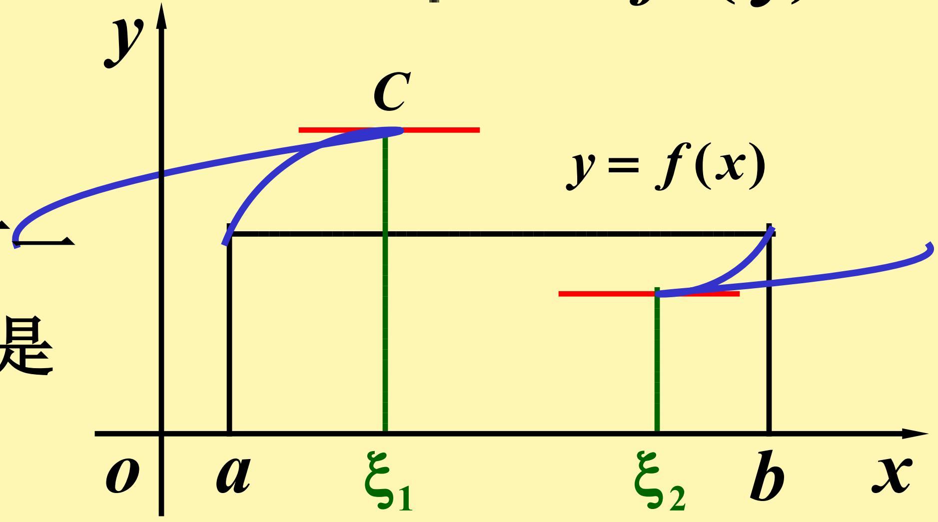
(2) 在区间 $(a, b)$ 内可导

(3) $f(a) = f(b)$

$\Longrightarrow$ 在 $(a, b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f'(\xi) = 0.$

几何解释：

在曲线弧 $AB$ 上至少有一点 $C$，在该点处的切线是水平的.



**证明** $\because f(x) \in C_{[a,b]}$，必有最大值 $M$ 和最小值 $m$.

(1) 若 $M = m$. 则 $f(x) = M$.

由此得 $f'(x) = 0$. $\forall \xi \in (a,b)$, 都有 $f'(\xi) = 0$.

(2) 若 $M \neq m$. $\because f(a) = f(b)$,

$\therefore$ 最值不可能同时在端点取得.

设 $M \neq f(a)$,

则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$ 使 $f(\xi) = M$.

$\because f'(\xi)$存在,由费马定理得:

$\therefore$ 只有 $f'(\xi) = 0$.

**注** (1) 若罗尔定理的三个条件中有一个不满足，其结论可能不成立.

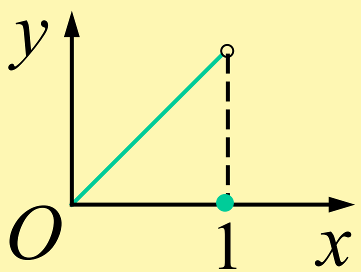
$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

$f(x)=|x|$

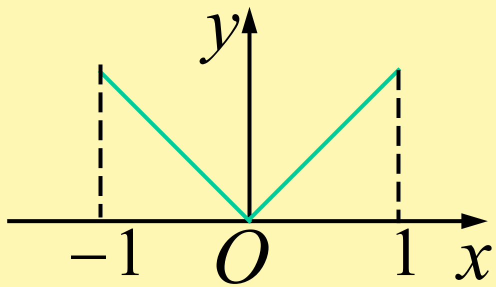
$x\in[-1,1]$

$f(x)=x$

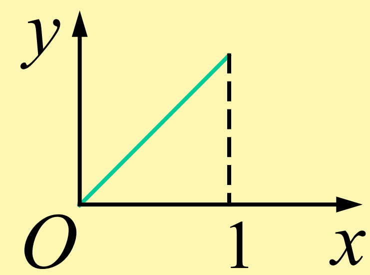
$x\in[0,1]$




在$[0,1]$不连续




在$(0,1)$不可导




$f(0)\neq f(1)$

(2)$\xi$不止一个。

## 应用罗尔定理的简单例子

例 1． $f(x)=x(x-1)(x-2)$，不解方程，问 $f'(x)$ 有几个零点，位于哪个区间。

解：显然 $f(x)$ 处处可导，$f(0)=f(1)=f(2)$，由罗尔定理知，$\exists\xi_1\in(0,1)$使$f'(\xi_1)=0$ $\exists\xi_2\in(1,2)$使$f'(\xi_2)=0$

而 $f'(x)$ 是二次多项式，仅有两个零点，所以 $f'(x)$ 有且仅有两个零点，分别位于区间 (0,1) （1,2）内．

思考：$g(x)=\prod_{n=0}^{2014}(x-n)$，$g'(x)$有多少零点。

(2014个零点)

例 2 设$f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$可导$f(a)=0$,

证明$\exists\xi\in(0,a)$, 使得$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

分析　存在 $\xi\in(0,a)$ 使 (1) 成立

$$\Leftrightarrow f(\xi)+\xi f'(\xi)=0 \Leftrightarrow [xf(x)]'_{x=\xi}=0$$

证明：　令　$\varphi(x)=xf(x)$

则$\varphi(x)$在$[0,a]$连续，在$(0,a)$可导，

且$\varphi(0)=\varphi(a)=0$。

由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,a)$, 使　$\varphi'(\xi)=0$

即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$,　$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

## 三、拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

设函数 $f(x)$ 满足：

(1) 在区间 $[a,b]$ 上连续

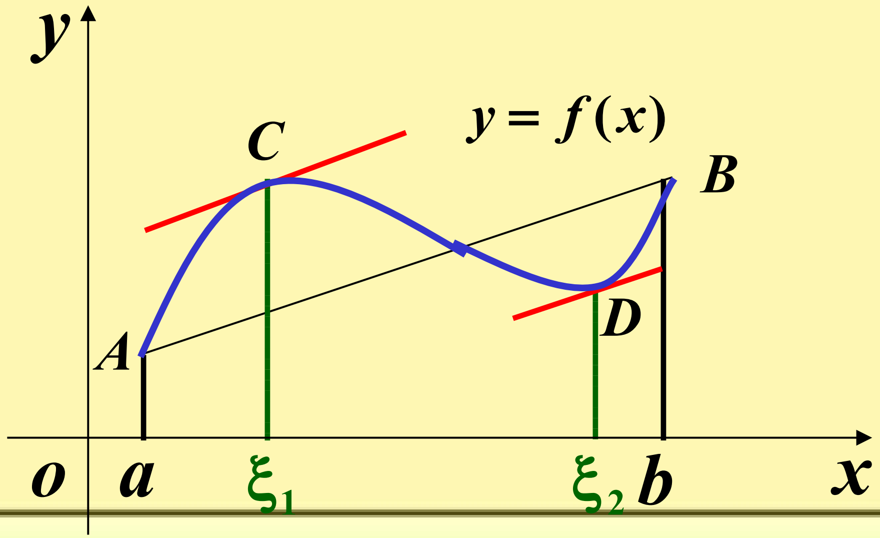
(2) 在区间 $(a,b)$ 内可导

$\Longrightarrow$ 在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

几何解释：

在曲线弧 $AB$ 上至少有一点 $C$，在该点处的切线平行于弦 $AB$.



分析： 要证 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow$

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'_{x=\xi}=0$$

证明： 令 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

**$\varphi(x)$在$[a,b]$连续，在$(a,b)$可导，且**

$$\varphi(a)=\varphi(b)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a},$$

**则**$\exists\xi\in(a,b),\left[f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'_{x=\xi}=0$

即$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

注： 1 拉格朗日中值公式

拉格朗日中值公式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

**注意**：拉氏公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

设 $f(x)$在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导, $x_0, x_0+\Delta x\in(a,b)$, 则有

$\xi$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

也可写成 $\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$

$(\ \Delta y\approx dy=f'(x_0)\cdot\Delta x \quad )$

增量$\Delta y$的精确表达式.

拉格朗日中值公式又称**有限增量公式**.

## 2．一个重要结论

**推论**　如果函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的导数恒为零，那末 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是一个常数.

**证明**　在 $I$ 上任取两点 $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$，

在 $[x_1, x_2]$ 上用拉格朗日中值定理

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$$

$$(x_1 < \xi < x_2)$$

$$\therefore \quad f(x_2) = f(x_1)$$

由 $x_1, x_2$ 的任意性知，$f(x)$ 在 $I$ 上为常数.

**例 3** 证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \ (-1 \le x \le 1).$

**证明** 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x, \quad x \in (-1,1)$

$$\because f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

$$\therefore f(x) \equiv C, \quad x \in (-1,1)$$

又 $\because f(0) = \frac{\pi}{2} = f(1) = f(-1)$

即 $C = \frac{\pi}{2}$. $\quad \therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

**例 4** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，证明

$$\exists\xi\in(a,b),\text{使得}\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$$

**证明** 令 $\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$ 则 $\varphi(a) = 0$

$$\varphi(b) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}$$

$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，由拉格朗日中值定理得

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b-a) \qquad a < \xi < b$$

即 $$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$$

**例 5** 证明当$x>0$时, $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

**证明** 设 $f(x)=\ln(1+x)$,

$f(x)$在$[0,x]$上满足拉氏定理的条件，

$$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\ (0<\xi<x)$$

$$\because f(0)=0,\ f'(x)=\frac{1}{1+x},\ \text{由上式得}\ \ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi},$$

又$\because 0<\xi<x \Rightarrow 1<1+\xi<1+x$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1,$$

$\therefore \dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x,$ 即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

# 四、柯西 (Cauchy) 中值定理

$f(x), F(x)$ 满足：

(1) 在区间 $[a, b]$ 上连续 (2) 在区间 $(a, b)$ 内可导

(3) 在区间 $(a, b)$ 内 $F'(x) \neq 0$

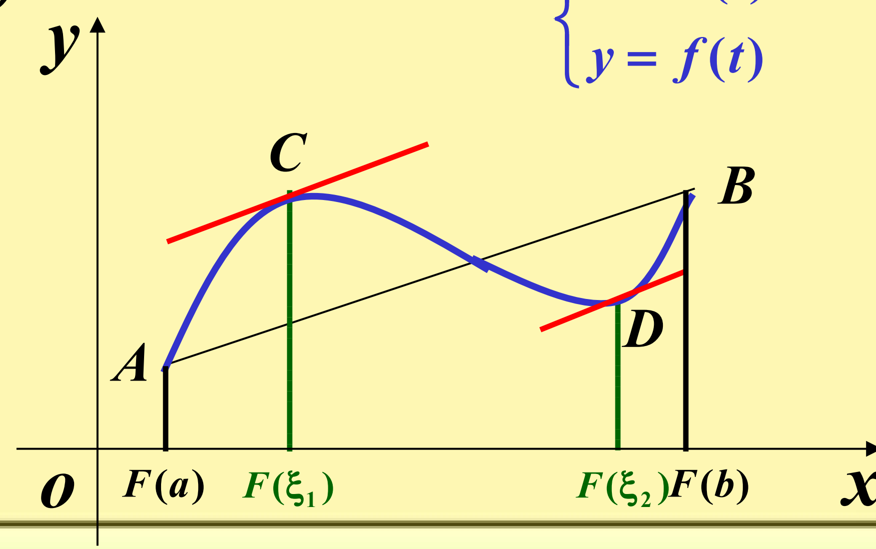
$\Longrightarrow$ 在 $(a, b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

$$\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$

几何解释：

**在曲线弧** $AB$ 上至少有一点 $C(F(\xi), f(\xi))$，在**该点处的切线平行于**弦 $AB$.



**分析：** 问题转化为证 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)=0$

**证明** 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，

$$\varphi(a)=\frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$$

则至少 $\exists \xi\in(a,b)$, $\varphi'(\xi)=0$

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

思考：柯西定理的下述证法对吗？

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$

两个 $\xi$ 不一定相同

上面两式相比即得结论. 错！

注 当 $F(x)=x$,

$$F(b)-F(a)=b-a,\ F'(x)=1,$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

—— 拉格朗日中值定理

例 6　对函数 $f(x)=x^2+2$ ， $F(x)=x^3-1$ 在 $[1,2]$ 上验证柯西定理的正确性。

解：易知 $f(x)$、$F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，$(1,2)$ 内可导，且 $F'(x)=3x^2$ 在 $(1,2)$ 内不为零，

满足柯西中值定理的条件。

$$\frac{f(2)-f(1)}{F(2)-F(1)}=\frac{6-3}{7-0}=\frac{3}{7}\qquad \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{2\xi}{3\xi^2}=\frac{2}{3\xi}$$

令 $\dfrac{2}{3\xi}=\dfrac{3}{7}$　　解得 $\xi=\dfrac{14}{9}\in(1,2)$

这样就验证了柯西定理的正确性。

**例 7** 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明：至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

**分析：** 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \frac{f'(x)}{(x^2)'}\bigg|_{x=\xi}.$$

**证明** 设 $g(x) = x^2$,

则 $f(x), g(x)$ 在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件，

$\therefore$ 在$(0,1)$内至少存在一点$\xi$，有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

# 内容小结

1. 微分中值定理的条件、结论及关系

费马引理

$f(b)=f(a)$

拉格朗日中值定理

$F(x)=x$

罗尔定理

柯西中值定理

$f(b)=f(a)$

$F(x)=x$

2. 微分中值定理的应用

(1) 证明恒等式

(2) 证明不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

关键：

利用逆向思维

设辅助函数

**作业 3-1**