3.2 洛必达 (L'Hospital) 法则

3.2.1 、$\dfrac{0}{0}$型未定式

3.2.2 、$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

3.2.3 、其他未定式

3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定型

定理 3.2.1(洛必达 L'Hospital 法则)

设(1) 当 $x \to a$时,函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;

(2) 在 a **点的某去心邻域**$U^0(a,\delta)$内, $f'(x)$及 $F'(x)$ 都存且 $F'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大);

那末 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

注：　这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为<u>洛必达法则</u>.

注 1: 如果 $\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型，且 $f'(x), F'(x)$ 满足定理的条件，可以继续使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{F''(x)}=\cdots.$$

注 2:当 $x\to a^{+}, x\to a^{-}, x\to\infty(\pm\infty)$时,该法则仍然成立

例：设(1) 当 $x\to\infty$时,函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;

(2) $|x|>X$时, $f'(x)$及 $F'(x)$ 都存且 $F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大);

那末 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}.$

注 3: 洛必达法则中的条件是充分而非必要的.

即当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在时, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在。

例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$$

不存在。

3.2.2 $\dfrac{\infty}{\infty}$型未定型

定理 3.2.2

设(1) 当 $x \to a$时,函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于∞;

(2) 在 a 点的某去心邻域内 $f'(x)$及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(**或为无穷大**);

那末 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

注 1: 当$x \to a^+, x \to a^-, x \to \infty$**时的未定式**$\dfrac{\infty}{\infty}$,也有

相应的洛必达法则

例 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}$ $(\dfrac{0}{0})$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mu(1+x)^{\mu-1}}{1}=\mu$

所以当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^{\mu}-1\sim \mu x$（μ 为实数）

特别地 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$ $(n\in N^{+})$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. $(\dfrac{0}{0})$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $原式=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}(a,b>0)$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 $原式=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\cos ax\cdot\sin bx}{b\cos bx\cdot\sin ax}$

$=1.$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos 3x\sin 3x}{-2\cos x\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3.$$

注：可以先化简并且极限不为 0 的因子的极限可以先求出。

另解 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos 3x}{\sin 3x\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{-\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{\sin x}=3$$

例 6 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}(\alpha>0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n}}{a^{x}}(a>1,n\in N^{+})=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{(\ln a)^{n}a^{x}}=0$$

（使用 n 次法则）

设 $n\le\alpha<n+1$, 利用夹逼定理，可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}(\alpha>0)=0$$

结论：当 $x\to+\infty$ 时，$\ln x$ 、 x^{α}（$\alpha>0$）、 a^{x}（$a>1$）都是无穷大，但趋于无穷大的速度不同，它们是由慢到快。

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\tan x}$. $(\dfrac{0}{0})$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

注：洛必达法则是求未定式的一种有效方法，但与其它求极限方法结合使用，效果更好．如能化简尽量先化简；能用等价无穷小替换或重要极限应尽量应用．

总结：使用洛必达法则时应注意的问题

（1）法则中的条件是充分的。

（2）使用此法则时要检验是否符合定理的条件，首先验证条件（i）即是否为$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型。

如不是，则不能用此法则，

至于条件（ii）、（iii），可在计算中加以解决。

（3）洛必达法则可以连续使用。

（4）应与其它求极限的方法相结合。如先化简、非零因子极限先求出、重要极限、等价无穷小替换等。

3.2.3 $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$型未定式

方法：将这些类型未定式化为 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

1. $0\cdot\infty$型

步骤：

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$ 或 $$f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

化为 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^{x}$. $(0\cdot\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{2}=+\infty.$

例 9 $\lim\limits_{x\to0^{+}} x^{\mu}\ln x(\mu>0)$ $(0\cdot\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{\ln x}{x^{-\mu}}$

$$=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{x^{\mu}}{-\mu}=0$$

例 10 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\arctan\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x+1})$ $(0\cdot\infty)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2(arc\cot x - arc\cot(x+1))$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+(x+1)^2}}{-2x^{-3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+x^3}{2(x^2+1)(x^2+2x+2)}$$

$$=1$$

2. $\infty-\infty$ 型

步骤：

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

化为 $\frac{0}{0}$ 型

例 11 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)$ $(\infty-\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

例 12 $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$ $(\infty-\infty)$

解: 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)]$ $(令x=\frac{1}{t})$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2t(1+t)}=\frac{1}{2}$$

注: $\infty-\infty$型一般可采用通分、变量替换等方法转换。

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

步骤： $y = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

$$\left.\begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \xrightarrow{g(x)\ln f(x)} \left\{\begin{array}{l} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \to 0\cdot\infty \\ 0\cdot\ln\infty \end{array}\right.$$

例 13 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. (0^0)

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

例 14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$ (1^{∞})

解法一 先求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}=2 \qquad \therefore \text{原式}=e^{2}.$$

$$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)\ln u(x)}$$

解法二 先求 $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}$$

$=2$ $\quad\therefore$ 原式 $=e^2$.

$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim\left[(1+u(x)-1)^{\frac{1}{u(x)-1}}\right]^{[u(x)-1]v(x)}$$

$$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$$

例 15 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^0)

解 $\because (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}$,

先求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\dfrac{1}{\cot x}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}}{\dfrac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1$,

$\therefore$ 原式 $= e^{-1}$.

注：数列极限如何用洛必达法则

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 不定型

（1） 设 $x_n = f(n)$， $y_n = F(n)$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

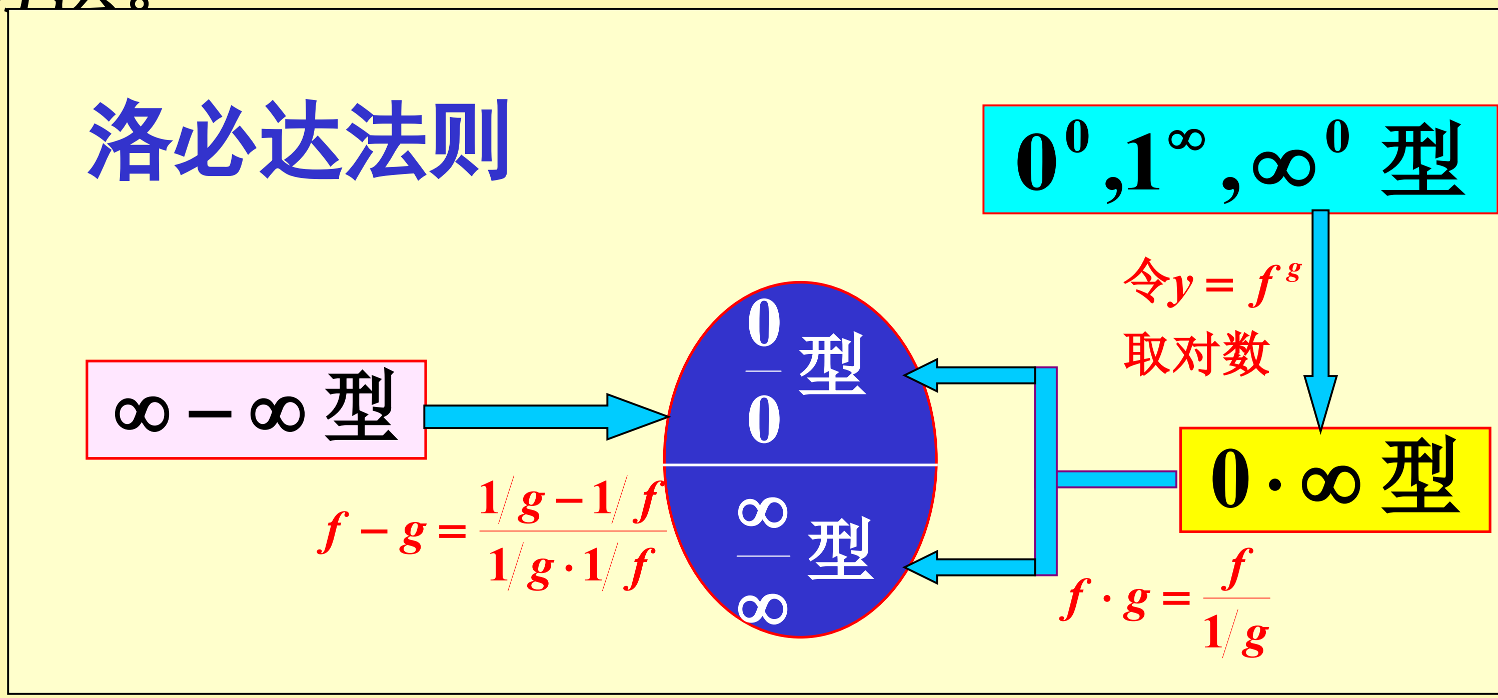
例 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a^n}(a>1)$， $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{a^x\ln a} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{a^x(\ln a)^2} = 0$$

小结

本节主要介绍了洛必达法则 .

本节要求熟练掌握利用洛必达法则求极限的方法。



作业　　习题 3-2